



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>

~~Sci 880.178~~
Period, Shelves

Bound

18 1903



Harvard College Library

BOUGHT WITH THE INCOME

FROM THE BEQUEST OF

PROF. JOHN FARRAR, LL.D.

AND HIS WIDOW

ELIZA FARRAR

FOR

"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
ASTRONOMY, AND NATURAL PHILOSOPHY"

SCIENCE CENTER LIBRARY

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE.

37519 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 35.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE,

PUBLIÉ
PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME TRENTE-QUATRIÈME. — ANNÉE 1906.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ
A LA SORBONNE.
1906

1312
1

Sa 880.48

ÉTAT

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

AU COMMENCEMENT DE L'ANNÉE 1906 ⁽¹⁾.

Membres honoraires du Bureau....	MM. APPELL. DARBOUX. GUYOU. HATON DE LA GOUPILLIÈRE. HUMBERT. JORDAN. MANNHEIM. MITTAG-LEFFLER. PICARD. POINCARÉ, VOLTERRA. ZEUTHEN.
----------------------------------	---

Président.....	MM. HADAMARD.
Vice-Présidents	BIOCHE. BLUTEL. BRICARD. PERRIN (R.).
Secrétaires	GRÉVY. RAFFY.
Vice-Secrétaires.....	ESTANAVE. MAROTTE.
Archiviste.....	SERVANT.
Trésorier.....	CLAUDE-LAFONTAINE.
Membres du Conseil(*)	ANDOYER, 1907. ANDRÉ, 1907. BOREL, 1909. BOURLET, 1908. CARVALLO, 1908. FONTENÉ, 1908. FOURET, 1907. LAISANT, 1909. LÉVY (L.), 1909. MAILLET, 1908. D'OCAGNE, 1909. PAINLEVÉ, 1907.

(¹) MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser au Secrétariat les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à cette liste.

(²) La date qui suit le nom d'un membre du Conseil indique l'année au commencement de laquelle expire le mandat de ce membre.

Date
de
l'admission.

1872. **ACHARD**, ancien directeur de la Compagnie d'assurances sur la vie *la Foncière*, rue de la Terrasse, 6 *bis*, à Paris (17°).
1900. **ACKERMANN-TEUBNER**, éditeur, à Leipzig (Allemagne).
- ✓ 1900. **ADÉMAR** (vicomte Robert d'), professeur suppléant à la Faculté libre des Sciences, place de Genevières, 14, à Lille (Nord).
- ✓ 1896. **ANDOYER**, professeur à la Faculté des Sciences, rue du Val-de-Grâce, 1, à Paris (5°).
1894. **ANDRADE**, professeur à la Faculté des Sciences, rue de la Mouillière, 1, à Besançon.
1872. **ANDRÉ** (Désiré), docteur ès sciences, rue Bonaparte, 70 *bis*, à Paris (6°).
- ✓ 1879. **APPELL**, membre de l'Institut, doyen de la Faculté des Sciences et professeur à l'École Centrale des Arts et Manufactures, rue Bonaparte, 17, à Paris (6°).
1900. **AURIC**, ingénieur des ponts et chaussées, à Valence (Drôme).
1882. **AUTONNE**, ingénieur des ponts et chaussées, rue Mont-Bernard, 9, à Lyon.
- ✓ 1900. **BAIRE**, chargé de cours à la Faculté des Sciences de Dijon.
1876. **BAKER**, professeur à l'Université de Toronto (Canada).
1891. **BALITRAND**, ingénieur, à Métlaoui (Tunisie).
1905. **BARRÉ**, lieutenant du génie, à Verdun.
1889. **BEGHIN**, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du Champ-de-Mars, 22, à Paris (7°).
1875. **BERDELLÉ**, ancien garde général des forêts, à Rioz (Haute-Saône).
1904. **BERNSTEIN**, docteur ès sciences, rue Pouchkinskaja, 10, à Saint-Petersbourg (Russie).
1888. **BIOCHE**, professeur au lycée Louis-le-Grand, rue Notre-Dame-des-Champs, 56, à Paris (6°).
1875. **BISCHOFFSHEIM**, membre de l'Institut, rue Taitbout, 3, à Paris (9°).
1898. **BLAKE** (Edwin-M.), Université d'Arizona, à Tucson (Arizona, États-Unis).
1900. **BLUMENTHAL** (Otto), docteur en philosophie, Vincenzstrasse, à Aix-la-Chapelle (Allemagne).
1891. **BLUTEL**, professeur au lycée Saint-Louis, chargé de conférences à la Faculté des Sciences, rue Denfert-Rochereau, 110, à Paris (14°).
1902. **BOBERIL** (vicomte Roger du), rue d'Orléans, 30, à Rennes.
1892. **BONAPARTE** (prince Roland), avenue d'Iéna, 10, à Paris (16°).
- ✓ 1895. **BOREL**, professeur-adjoint à la Faculté des Sciences, boulevard Arago, 2, à Paris (13°).
1896. **BOULANGER**, professeur-adjoint à la Faculté des Sciences, rue Caumartin, 78, à Lille.
1896. **BOURGET** (Henry), professeur adjoint à la Faculté des Sciences, rue Saint-Jacques, 20, à Toulouse.
- ✓ 1896. **BOURLET**, professeur à l'École des Beaux-Arts et au lycée Saint-Louis, avenue de l'Observatoire, 22, à Paris (14°).
1903. **BOUTIN**, rue La Vieuville, 26, à Paris (18°).
1904. **BOUTBOUX** (P.), maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue Saint-Firmin, 2, à Montpellier.
1900. **BREITLING**, proviseur du lycée Saint-Louis, boulevard Saint-Michel, 44, à Paris (6°).
- ✓ 1897. **BRICARD**, ingénieur des manufactures de l'État, répétiteur à l'École Polytechnique, boulevard Raspail, 295, à Paris (14°).
1873. **BROCARD**, chef de bataillon du génie en retraite, Ville-Haute, 75, à Bar-le-Duc.
1901. **BUBL** (Adolphe), maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue de Villefranche, 6, à Montpellier.
1893. **BURKHARDT**, professeur à l'Université, Kreuzplatz, 1, à Zürich (Suisse).
1897. **CABREIRA**, membre de l'Académie royale des Sciences, rua da Alegria, 32, à Lisbonne.

Date
de
l'admission.

- 1894. **CAHEN**, professeur au collège Rollin, rue Cortambert, 46, à Paris (16°).
- 1893. **CALDARELLA**, professeur à l'Université, palazzo Giampaolo, via della Libertà, à Palerme.
- 1888. **CANET** (Gustave), ingénieur civil, directeur de l'artillerie de MM. Schneider et C^{ie}, avenue Henri-Martin, 87, à Paris (16°).
- 1885. **CARON**, professeur de géométrie descriptive, rue Claude-Bernard, 71, à Paris (5°).
- 1892. **CARONNET**, docteur ès sciences mathématiques, rue Demours, 62 bis, à Paris (17°).
- 1896. **CARTAN**, chargé de cours à la Faculté des Sciences, rue du faubourg Saint-Jean, 76, à Nancy.
- 1887. **CARVALLO**, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, rue Clovis, 1, à Paris (5°).
- 1890. **CEDERCRUTZ** (baronne Nanny), Unionsgatan, 4, à Helsingfors (Finlande).
- 1892. **CELLÉRIER** (Gustave), cours de Rive, 12, à Genève (Suisse).
- 1887. **CERRUTI**, professeur à l'Université, piazza S. Pietro in vincoli, 5, à Rome (Italie).
- 1888. **CHAILAN** (Édouard), rue Berthollet, 16, à Paris (5°).
- 1896. **CHARVE**, doyen de la Faculté des Sciences, cours Pierre-Puget, 60, à Marseille.
- 1884. **CHRYSTAL**, professeur à l'Université, à Édimbourg (Écosse).
- 1901. **CLAIRIN**, docteur ès sciences, maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue Jacquemars-Giélée, 57 bis, à Lille.
- 1875. **CLAUDE-LAFONTAINE**, banquier, rue de Trévise, 32, à Paris (9°).
- 1890. **COLOT**, château du Seuil, à Cérons (Gironde).
- 1898. **COMBÉBIAC**, capitaine du génie, docteur ès sciences, rue de Dun, 32, à Bourges.
- 1900. **COMTE** (Firmin), ingénieur des ponts et chaussées, à Commercy (Meuse).
- 1896. **COSSERAT** (E.), professeur à la Faculté des Sciences, rue de Metz, 1, à Toulouse.
- 1896. **COSSERAT** (F.), ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue d'Alsace, 23, à Paris (10°).
- 1900. **COTTON** (Émile), professeur adjoint à l'Université de Grenoble.
- 1904. **CURTIS**, Sherman avenue, 1939, à Evanston (Illinois, États-Unis).
- 1872. **DARBOUX**, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, doyen honoraire de la Faculté des Sciences, rue Gay-Lussac, 36, à Paris (5°).
- 1885. **DAUTHVILLE**, doyen de la Faculté des Sciences, cours Gambetta, 27, à Montpellier.
- 1901. **DELAUSSUS**, professeur à la Faculté des Sciences, chemin de Chastre-Monjoux, à Besançon.
- 1895. **DELAUNAY** (N.), professeur à l'Institut Polytechnique Empereur Nicolas II, à Varsovie.
- 1899. **DELENER**, ingénieur des ponts et chaussées, place Simon-Vollant, 10, à Lille.
- 1885. **DEMARTRES**, doyen de la Faculté des Sciences, avenue Saint-Maur, à la Madeleine-Lille (Nord).
- 1892. **DEMOULIN** (Alph.), professeur à l'Université, rue de la Vallée, 79, à Gand (Belgique).
- ? 1883. **DERUYTS**, professeur à l'Université, rue des Augustins, 35, à Liège (Belgique).
- 1894. **DESAINT**, docteur ès sciences, boulevard Gouvion-Saint-Cyr, 47, à Paris (17°).
- 1900. **DICKSTEIN**, Marzatkowska, 117, à Varsovie.
- 1902. **DIEGUEZ** (D.-F.), professeur de mathématiques à l'École provinciale des Arts et Industries, calle del Orzan, 4-3°, à La Corogne (Espagne).
- 1899. **DRACH** (Jules), chargé de cours à la Faculté des Sciences, rue des Carmélites, 68, à Poitiers.
- 1896. **DUMAS** (G.), docteur de l'Université de Paris, privat-docent à l'École Polytechnique fédérale, à Zurich (Suisse).
- 1897. **DUMONT**, professeur au lycée, avenue Bouvard, 6, à Annecy (Haute-Savoie).
- 1886. **DUNCAN**, Consulting Engineer, Empire Building, Broadway, 71, New-York City.

Date
de
l'admission.

1897. DURAN-LORIGA (commandant), plaza de Maria Pita, 20, à la Corogne (Espagne).
1885. DYCK (Walther), Technische Hochschule, à Munich (Bavière).
1902. EGOROFF (Dimitri), professeur à l'Université, Razgoulai, 2^e gymnase, à Moscou (Russie).
1903. ESPANET, ingénieur civil, rue Berthollet, 2, à Paris (5^e).
1900. ESTANAVE, docteur ès sciences, à la Sorbonne, à Paris (5^e).
1896. EUVERTE, ancien élève de l'École Polytechnique, ancien capitaine d'artillerie, ingénieur aux Forges de Denain (Nord).
1888. FABRY, professeur à la Faculté des Sciences, 17, rue Chaptal, à Montpellier.
1904. FATOU, astronome-adjoint à l'Observatoire, rue des Ursulines, 15, à Paris (5^e).
1891. FAUQUENBERGUE, professeur au lycée, à Mont-de-Marsan.
1892. FERR (Henri), professeur à l'Université, rue Ph.-Plantamour, 19, à Genève (Suisse).
1885. FIELDS (J.), professeur à l'Université, Toronto (Ontario, Canada).
1881. FLOQUET, professeur à la Faculté des Sciences, rue de la Commanderie, 21, à Nancy.
1872. FLYE SAINTE-MARIE, chef d'escadron d'artillerie en retraite, ancien répétiteur à l'École Polytechnique, place Royer-Collard, à Vitry-le-François (Marne).
1896. FONTANEAU, ancien officier de marine, cours Bugeaud, 8, à Limoges.
1897. FONTENÉ, inspecteur de l'Académie de Paris, rue Le Goff, 7, à Paris (5^e).
1891. FONTVILLANT (DE), professeur à l'École Centrale, rue d'Erlanger, 29, Paris (16^e).
1903. FORD (WALTER R.), à Ann Arbor (Michigan, États-Unis).
1889. FOUCHÉ, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Soufflot, 5, à Paris (5^e).
1905. FOUËT (l'abbé), professeur à l'Institut catholique, rue Férou, 11, à Paris (6^e).
1872. FOURET, répétiteur à l'École Polytechnique, avenue Carnot, 4, à Paris (17^e).
1904. FRÉCHET, agrégé de Mathématiques, rue Bausset, 7, à Paris (15^e).
1892. FROLOV (le général), quai des Eaux-Vives, 36, à Genève (Suisse).
1903. FURTER, Seevogelstrasse, 7, à Bâle (Suisse).
1900. GALDEANO (Z.-S. DE), professeur à l'Université, corso 99, 3, à Saragosse (Espagne).
1872. GABRIEL, ingénieur en chef des ponts et chaussées, professeur à la Faculté de Médecine, rue Édouard-Detaille, 6, à Paris (17^e).
1896. GAUTHIER-VILLARS, ancien élève de l'École Polytechnique, éditeur, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris (6^e).
1890. GEBBIA, professeur libre à l'Université, à Palerme (Italie).
1872. GENTY, ingénieur en chef des ponts et chaussées, avenue Rapp, 20, à Paris (7^e).
1890. GERRALDI, professeur à l'Université, via Daita, 11, à Palerme (Italie).
1897. GERRANS, professeur à Worcester College, Saint-John street, 20, à Oxford (Grande-Bretagne).
1896. GIRARDVILLE, capitaine d'artillerie, rue Michelet, 6, à Montreuil-sous-Bois (Seine).
1903. GODEY, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du Bois-de-Boulogne, 7, à Paris (16^e).
1881. GOURSAT, professeur à la Faculté des Sciences, répétiteur à l'École Polytechnique, boulevard Raspail, 270, à Paris (14^e).
1896. GREENHILL, professeur à l'École d'artillerie, à Woolwich (Grande-Bretagne).
1896. GRÉVY, professeur au lycée Saint-Louis, rue Saint-Placide, 62, à Paris (6^e).
1899. GUADET, ancien élève de l'École Polytechnique, boulevard Saint-Germain, 240 bis, à Paris (7^e).
1880. GUCCIA (Jean), professeur à l'Université, via Ruggiero Settimo, 30, à Palerme (Italie).

Date
de
l'admission.

1900. **GUICHARD**, professeur à l'Université de Clermont-Ferrand.
1891. **GUINARIES**, officier du génie, membre de l'Académie des Sciences de Lisbonne, à Elvas (Portugal).
1881. **GUNTHER** (Dr Sigismond), professeur à l'École Polytechnique, à Munich (Bavière).
1885. **GUYOU**, membre de l'Institut, capitaine de frégate, rue Marguerin, 4, à Paris (14°).
1873. **HAAG**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, professeur à l'École Polytechnique, rue Chardin, 11 bis, à Paris (16°).
1882. **HANICH**, directeur de l'École des Ingénieurs, à Lima (Pérou).
1896. **HADANARD**, professeur adjoint à la Faculté des Sciences, professeur suppléant au Collège de France, rue Humboldt, 25, à Paris (14°).
1904. **HALBERSTADT**, ingénieur des Arts et Manufactures, boulevard Saint-Germain, 68, à Paris (5°).
1894. **HALSTED**, professeur au Kenyon College, à Gambier (Ohio, États-Unis).
1901. **HANCOCK** (Harris), professeur à l'Université de Cincinnati, Auburn Hotel (Ohio, États-Unis).
1900. **HARDEL**, villa italienne, à Dieppedalle-Croisset (Seine-inférieure).
1872. **HATON DE LA GOUPILLIÈRE**, membre de l'Institut, inspecteur général des mines, directeur honoraire de l'École des mines, rue de Vaugirard, 56, à Paris (6°).
1905. **HEDRICK** (Earle), professeur à l'Université, South Ninth street, 302, à Columbia (Missouri, États-Unis).
1892. **HERMANN**, libraire-éditeur, rue de la Sorbonne, 8, à Paris (5°).
1893. **HIOUX**, professeur en retraite, rue des Fossés-Saint-Jacques, 16, à Paris (5°).
1879. **HOLST** (Elling), professeur à l'École Polytechnique, à Høvik, près Christiania (Norvège).
1895. **HOTT** (Stanislas), professeur à l'École Supérieure-Général, rue Bausset, 4, à Paris (15°).
1880. **HUNKEAT**, membre de l'Institut, ingénieur en chef des mines, professeur à l'École Polytechnique, rue Daubigny, 6, à Paris (17°).
1881. **IMBER**, directeur des études à l'École Centrale, 33, boulevard Voltaire, à Paris (11°).
1903. **ISSALY** (l'abbé), rue Poquelin-Molière, 9, à Bordeaux.
1896. **JACQUET** (E.), professeur au Prytanée militaire, rue Couchot, 8, à la Flèche.
1898. **JAHNKE** (Dr E.), professeur à l'Académie des Mines, Ludwigskirchstrasse, 6, à Berlin W¹⁵ (Allemagne).
1898. **JARRY** (N.), ingénieur civil, avenue du Bel-Air, 7, à Paris (12°).
1872. **JAVARY**, chef de bataillon du génie en retraite, chef des travaux graphiques à l'École Polytechnique, rue du Cardinal-Lemoine, 1, à Paris (5°).
1903. **JENSEN** (J.-L.-W.-V.), ingénieur en chef des Téléphones, Gl. Kongevej, 80, à Copenhague, V (Danemark).
1872. **JORDAN**, membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique et au Collège de France, rue de Varenne, 48, à Paris (7°).
1875. **JUNG**, professeur à l'Institut technique supérieur, via Fatebenefratelli, 19, à Milan (Italie).
1890. **KOBB** (Gustaf), maître de conférences à l'Université, à Stockholm (Suède).
1892. **KOCH** (H. von), professeur à l'École Polytechnique, à Djursholm-Stockholm (Suède).
1880. **KONIGS**, professeur à la Faculté des Sciences de Paris, répétiteur à l'École Polytechnique, boulevard Arago, 101, à Paris (14°).
1897. **LACAUCHIE**, ingénieur civil, chef du laboratoire de la Compagnie générale des Omnibus, rue de Douai, 48, à Paris (9°).
1873. **LAISANT**, docteur ès sciences, répétiteur et examinateur à l'École Polytechnique, avenue Victor-Hugo, 162, à Paris (16°).

Date
de
l'admission.

1893. LANCELIN, astronome adjoint à l'Observatoire, rue Boissonnade, 3, à Paris (14°).
1899. LANDAU (Edmond), professeur à l'Université de Berlin, Hardenborgstrasse, 13, à Charlottenburg (Allemagne).
1896. LAUGEL, ancien attaché d'ambassade, villa Ensoleillée, à Beaulieu-sur-Mer (Alpes-Maritimes).
1873. LAUTH, manufacturier, à Thann (Alsace).
1896. LEAU, professeur au lycée Michelet, rue Vavin, 6, à Paris (6°).
1880. LÉAUTÉ, membre de l'Institut, boulevard de Courcelles, 18, à Paris (17°).
1896. LEBEL, professeur au lycée de Montpellier, villa Mont-Carmel, avenue Bonisson-Bertrand, à Montpellier.
1902. LEBESGUE, docteur ès sciences, maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue de la Palestine, 32, à Rennes.
1903. LEBELF, directeur de l'observatoire de Besançon.
1893. LECORNU, ingénieur en chef des mines, professeur à l'École Polytechnique, rue Gay-Lussac, 3, à Paris (5°).
1895. LÉMERAY, licencié ès sciences, ingénieur civil du génie maritime, boulevard de l'Océan, 51, à Saint-Nazaire (Loire-Inférieure).
1872. LEMOINE (Émile), ancien élève de l'École Polytechnique, place Pereire, 5, à Paris (17°).
1904. LEMOYNE (T.), rue des Anglais, 9, à Paris (5°).
1879. LE PAIGE, professeur à l'Université, à l'observatoire de Cointe, à Liège (Belgique).
1895. LE ROUX, professeur à la Faculté des Sciences, rue de Châteaudun, 17, à Rennes.
1898. LE ROY, docteur ès sciences, rue Notre-Dame-des-Champs, 27, à Paris (6°).
1891. LERY, agent voyer d'arrondissement, à Pontoise (Seine-et-Oise).
1900. LEVI CIVITA (T.), professeur à l'Université, via Altinate, 14, à Padoue (Italie).
1882. LÉVY (Lucien), répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue du Regard, 12, à Paris (6°).
1872. LÉVY (Maurice), membre de l'Institut, inspecteur général des ponts et chaussées, professeur au Collège de France, avenue du Trocadéro, 15, à Paris (16°).
1875. LEZ (Henri), à Lorrez-le-Bocage (Seine-et-Marne).
1898. LINDELÖF (Ernst), professeur à l'Université, Sandvikskajan, 15, à Helsingfors (Finlande).
1877. LINDEMANN, professeur à l'Université, Franz-Josephstrasse, 12, à Munich (Bavière).
1886. LIOUVILLE, ingénieur des poudres, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, quai Henri-IV, 12, à Paris (4°).
1900. LOVETT (E.-O.), professeur à Princeton University, New-Jersey (États-Unis).
1888. LUCAS (Félix), ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue Boissière, 30, à Paris (16°).
1902. LUCAS-GIRARDVILLE, ingénieur à la Manufacture des Tabacs, rue de Charenton, 319, à Paris (12°).
1902. LUCAS DE PESLOUAN, ancien élève de l'École Polytechnique, rue Marbeuf, 8, à Paris (8°).
1886. LYON, docteur ès sciences mathématiques, chemin de la Roseraie, 26, à Genève (Suisse).
1882. MACÉ DE LÉPINAY, professeur de mathématiques spéciales au lycée Henri IV, rue Claude-Bernard, 79, à Paris (5°).
1895. MAILLET, ingénieur des ponts et chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique, rue de Fontenay, 11, à Bourg-la-Reine (Seine).
1905. MALUSKI, professeur au lycée de Montpellier.
1872. MANNHEIM, colonel d'artillerie en retraite, professeur honoraire à l'École Polytechnique, boulevard Beauséjour, 1, à Paris (16°).
1905. MANTELL (M^{lle} L.), rue Dutot, 30, à Paris (15°).
1904. MAROTTE, professeur au lycée Charlemagne, rue de Reuilly, 35 bis, à Paris (12°).
1884. MARTIN (Artemas), N. Street, 915. N. W., à Washington D. C. (États-Unis).

Date
de
l'admission.

1889. **MARTIN** (Émile), ancien élève de l'École Polytechnique, professeur de mathématiques, rue des Fossés-Saint-Jacques, 22, à Paris (5°).
1901. **MASSAU** (J.), professeur à l'Université, avenue des Arts, 43, à Gand (Belgique).
1894. **MAUPIN**, professeur au collège, rue de l'Arceau, 30, à Saintes (Charente-Inférieure).
1897. **MEHNKE**, professeur à l'École technique supérieure, Weisseinburgstrasse, 29, à Stuttgart (Wurtemberg).
1889. **MENDIZABAL TAMBORÉL** (DE), membre de la Société de Géographie de Mexico, calle de Jesus, 13, à Mexico (Mexique).
1884. **MERCEREAU**, licencié ès sciences, rue de l'Université, 193, à Paris (7°).
1902. **MERLIN** (E.), avenue Négrié, 46, à Forest-lès-Bruxelles (Belgique).
1902. **MESNY** (R.), professeur d'hydrographie à Saint-Tropez (Var).
1904. **METZLER**, professeur à l'Université, à Syracuse (État de New-York).
1893. **MICHEL** (François), chef de parcours de la Compagnie des chemins de fer du Nord, faubourg Saint-Denis, 210, à Paris (10°).
1899. **MILLER** (Dr G.-A.), professeur à Stanford University, Californie (États-Unis).
1873. **MITTAG-LEFFLER**, professeur à l'Université, à Stockholm (Suède).
1904. **MIWA**, professeur à l'Université de Kyoto (Japon).
1902. **MOLK** (J.), professeur à la Faculté des Sciences, rue d'Alliance, 8, à Nancy.
1897. **MONTCHÉUIL** (l'abbé DE), docteur ès sciences, rue du Languedoc, 9, à Toulouse.
1898. **MONTÉSSUS DE BALLORE** (vicomte Robert DE), professeur suppléant à la Faculté libre des Sciences, boulevard de la Liberté, 121, à Lille (Nord).
1903. **MULLER** (J.-O.), Kirchweg, 1°, à Göttingen (Allemagne).
1885. **NEUBERG**, professeur à l'Université, rue Sclessin, 6, à Liège (Belgique).
1897. **NICOLLIÉ**, professeur, à Montreux (Suisse).
1903. **NIELS NIELSEN**, inspecteur général de l'enseignement secondaire, Norrebrogade, 57, à Copenhague (Danemark).
1900. **NIEWENGLOWSKI**, docteur ès sciences, inspecteur général de l'Université, rue de l'Arbalète, 35, à Paris (5°).
1882. **OCAGNE** (M. D'), ingénieur des ponts et chaussées, professeur à l'École des Ponts et Chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique, rue La Boétie, 30, à Paris (8°).
1905. **OUVET**, licencié ès sciences, rue d'Allemagne, 60, à Paris (19°).
1873. **OVIDIO** (Enrico D'), professeur à l'Université, Corso-Oporto, 30, à Turin (Italie).
1901. **PADÉ** (H.), professeur à l'Université, rue de Turenne, 89, à Bordeaux.
1893. **PAINLEVÉ**, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences et à l'École Polytechnique, rue d'Assas, 33, à Paris (6°).
1888. **PAPELIER** (Georges), professeur de mathématiques spéciales au lycée, rue de Reconnaissance, 20, à Orléans (Loiret).
1884. **PARAF**, professeur-adjoint à la Faculté des Sciences de Toulouse.
1881. **PELLET**, doyen de la Faculté des Sciences, rue Pascal, 30, à Clermont-Ferrand.
1900. **PERCHOT**, astronome adjoint à l'Observatoire, avenue de l'Observatoire, 1, à Paris (6°).
1874. **PÉRCIN**, général de division, rue de la Faisanderie, 116, à Paris (16°).
1881. **PERROTT** (Joseph), Université Clark, à Worcester (Massachusetts, États-Unis).
1873. **PERRIN** (R.), inspecteur général des mines, rue de Grenelle, 80, à Paris, (7°).
1892. **PERRIN** (Élie), professeur de mathématiques, rue Tarbé, 3, à Paris (17°).
1896. **PETROVITCH**, professeur à l'Université, Kossantch-Venac, 24, à Belgrade (Serbie).
1902. **PETROVITCH** (S.), capitaine d'artillerie de la garde, professeur adjoint à l'Académie d'artillerie Michel, Sabalkansky prospect 17 log. 15, à Saint-Petersbourg.
1887. **PEZZO** (DEL), professeur à l'Université, piazza San Marcellino, 2, à Naples (Italie).
1905. **PFEIFFER**, maître de conférences à l'Université de Kiew (Russie), rue Toullier, 9, à Paris (5°).

Date
de
l'admission.

- 1879. **PICARD** (Émile), membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences et à l'École Centrale des Arts et Manufactures, rue Bara, 4, à Paris (6°).
- 1872. **PICQUET**, chef de bataillon du génie, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, rue Monsieur-le-Prince, 4, à Paris (6°).
- 1896. **PIÉRON**, inspecteur général de l'Instruction publique, rue du Cherche-Midi, 91, à Paris (6°).
- 1899. **PIERPONT** (James), professeur à l'Université Yale, Mansfield street, 42, à New Haven (Connecticut, États-Unis).
- 1882. **POINCARÉ**, membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes, ingénieur en chef des mines, professeur à la Faculté des Sciences, rue Claude-Bernard, 63 (5°).
- 1894. **POTRON**, docteur ès sciences, rue du Val-de-Grâce, 11, à Paris (5°).
- 1872. **POLIGNAC** (prince C. de), à Radmannsdorf (Carniole, Autriche).
- 1899. **PRINGSHEIM**, professeur à l'Université, Arcisstrasse, 12, à Munich (Bavière).
- 1896. **PRUVOST**, inspecteur général honoraire de l'Instruction publique, 11, rue de la Tour, à Paris (16°).
- 1902. **PUX** (Victor), ancien élève de l'École Polytechnique, professeur de Mathématiques, rue des Fossés-Saint-Jacques, 16, à Paris (5°).
- 1896. **QUIQUET**, actuaire de la Compagnie *la Nationale*, rue Laffitte, 17, à Paris (9°).
- 1898. **RADUT**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue Duplessis, 77, à Versailles.
- 1883. **RAFFY**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Pierre-Nicole, 7, à Paris (5°).
- 1903. **REMOUDOS**, professeur de mathématiques, rue Soultani, 17, à Athènes (Grèce).
- 1900. **RENARD**, rue de la Tour, 7, à Paris (16°).
- 1903. **RICHARD**, professeur au lycée, place du Rosoir, 1, à Dijon.
- 1893. **RIVEREAU** (l'abbé), professeur à l'Institut catholique, à Angers (Maine-et-Loire).
- 1903. **ROCHE**, agrégé de l'Université, rue d'Assas, 76, à Paris (6°).
- 1872. **ROUART**, ingénieur civil, rue de Lisbonne, 34, à Paris (8°).
- 1872. **ROUCHÉ**, membre de l'Institut, boulevard St-Germain, 213, à Paris (7°).
- 1896. **ROUGIER**, docteur ès sciences, rue Sylvabelle, 84, à Marseille.
- 1885. **ROUQUET** (V.), professeur honoraire de mathématiques spéciales, à Belpèch (Aude).
- 1900. **SALTYKOW**, maître ès sciences mathématiques, professeur à l'Institut Polytechnique, rue Pankovskaia, 10, à Kiew (Russie).
- 1872. **SARTIAUX**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, chef de l'exploitation à la Compagnie du chemin de fer du Nord, à Paris.
- 1885. **SAUVAGE**, professeur à la Faculté des Sciences de Marseille.
- 1897. **SCHOU** (Erik), Gl. Antvorskov, à Slagelse (Danemark).
- 1881. **SCHOUTE**, professeur à l'Université, à Groningue (Hollande).
- 1901. **SEE** (Thomas-J.-J.), Observatory Mare Island (Californie).
- 1896. **SÉQUIER** (J.-A. de), docteur ès sciences, rue des Saints-Pères, 56, à Paris (7°).
- 1882. **SÉLIVANOFF** (Démétrius), professeur à l'Université, Fontanka, 116, log. 16, à Saint-Petersbourg (Russie).
- 1900. **SERVANT**, docteur ès sciences, rue des Saints-Pères, 8, à Paris (7°).
- 1900. **SPARRE** (comte Magnus de), avenue de l'Archevêché, 7, à Lyon.
- 1879. **STEPHANOS** (D^r Cyparissos), professeur à l'Université, à Athènes (Grèce).
- 1901. **STETSON** (Orlando), à Franklin (Massachusetts, États-Unis).
- 1898. **STÖRNER** (Carl), professeur à l'Université, Davesgade, 14, à Christiania (Norvège).
- 1903. **SUCHAR**, docteur ès sciences, rue Saint-Lazare, 43, à Paris (8°).
- 1904. **SUDRIA**, professeur à l'École pratique d'électricité industrielle, rue Ernest-Renan, 28, à Paris (15°).
- 1904. **SUNDMAN**, maître de conférences à l'Université d'Helsingfors, Villagatan, 2, Hos Rosenqvist (Finlande).

Date
de
l'admission.

1872. **SYLOW**, professeur à l'Université, à Frederikshald (Norvège).
1896. **TANNENBERG** (DE), rue d'Assas, 118, à Paris (6°).
1875. **TANNERY**, professeur à la Faculté des Sciences, sous-directeur de l'École Normale supérieure, rue d'Ulm, 45, à Paris (5°).
1882. **TARRY** (Gaston), boulevard Pereire, 177, à Paris (17°).
1872. **TERRIER**, professeur au collège Chaptal, avenue Léonie, 1, à Saint-Cloud (S.-et-O.).
1899. **THYBAUT** (Alexandre), docteur ès sciences, professeur au lycée Carnot, rue du Rocher, 101, à Paris (8°).
1873. **TISSOT**, ancien examinateur d'admission à l'Ecole Polytechnique, à Voreppe (Isère).
1896. **TISSOT**, enseigne de vaisseau, professeur au *Borda*, à Brest (Finistère).
1896. **TORRES**, membre de l'Académie des Sciences, Valgame Dios, 3, à Madrid (Espagne).
1893. **TOUCHE**, lieutenant-colonel d'artillerie territoriale, rue Truffault, 23, à Paris (17°).
1872. **TERSCA**, ingénieur en chef des ponts et chaussées en retraite, rue du général Henrion-Berthier, 7, à Neuilly-sur-Seine (Seine).
1893. **VALLÉE-POUSSIN** (CH.-J. DE LA), professeur à l'Université, rue Léopold, 38, à Louvain (Belgique).
1904. **VAN DEUREN**, lieutenant du génie, avenue Macan, 16, à Bruxelles.
1905. **VAN VLECK**, professeur de Mathématiques, Hesleyan University, à Middletown (Connecticut, Etats-Unis).
1897. **VASSILAS-VITALIS** (J.), professeur à l'Ecole militaire supérieure, rue Epicure, 36, à Athènes (Grèce).
1898. **VASSILIEF**, président de la Société physico-mathématique, à Kasan (Russie).
1901. **VESSIOT**, professeur à la Faculté des Sciences, chemin des Granges, 45, à Lyon.
1888. **VOLTERRA** (Vito), professeur à l'Université, via Lucina, 17, à Rome.
1904. **VORONOI**, professeur à l'Université, rue Vilcza, 18, à Varsovie (Russie).
1900. **VUIBERT**, éditeur, boulevard Saint-Germain, 63, à Paris (5°).
1880. **WALCKENAEER**, ingénieur en chef des mines, boulevard St-Germain, 218, à Paris (7°).
1879. **WEILL**, directeur du collège Chaptal, boulevard des Batignolles, 45, à Paris (8°).
1878. **WORMS DE RONILLY**, ingénieur en chef des mines, rue Balzac, 7, à Paris (8°).
1882. **ZABOUDSKI**, membre du Comité d'artillerie et professeur à l'Académie d'Artillerie, rue Znamenskaia, 22, à Saint-Petersbourg (Russie).
1890. **ZARENSKI**, docteur ès sciences, professeur à l'Université de Cracovie (Autriche).
1903. **ZERVOS**, docteur de l'Université, rue Filis, 7, à Athènes (Grèce).
1881. **ZEUTHEN**, professeur à l'Université, Rosenvonget, Sanct-Kanutkestræde, 11, à Copenhague (Danemark).
1898. **ZIWET**, South Ingalls street, 644, à Ann Arbor (Michigan, États-Unis).

SOCIÉTAIRES PÉRENNELS.

ACKERMANN-TEUBNER, à Leipzig. — BENOIST (décédé). — BERDELLÉ, à Rioz. — BIENAYNE (décédé). — BIOCHE, à Paris. — BISCHOFFSHEIM, à Paris. — BODERIL (vicomte R. du), à Rennes. — BORCHARDT (décédé). — BOREL, à Paris. — BROCARD, à Bar-le-Duc. — CANET, à Paris. — CARVALLO, à Paris. — CHASLES (décédé). — CLAUDE-LAFONTAINE, à Paris. — COTTON, à Grenoble. — FOURET, à Paris. — GAUTHIER-VILLARS (décédé). — GOURSAT, à Paris. — HALPHEN (décédé). — HALSTED, à Austin. — HADAMARD, à Paris. — HATON DE LA GOUPIILLIÈRE, à Paris. — HERMITE (décédé). — HIRST (décédé). — HOTT, à Paris. — JORDAN, à Paris. — LAFFON DE LADÉBAT (décédé). — LÉAUTÉ, à Paris. — MAILLET, à Bourg-la-Reine. — MANNHEIM, à Paris. — DE MENDIZABAL TAMBORÉL, à Mexico. — MENCEREAU, à Paris. — D'OCAGNE, à Paris. — PEROTT, à Worcester. — PERRIN, à Paris. — POINCARÉ, à Paris. — POLIGNAC (prince C. de), à Radmannsdorff. — RAFFY, à Paris. — SALTYSKOW, à Kiew. — SÉLIVANOFF, à Saint-Petersbourg. — SPARRÉ, (comte M. de), à Saint-Georges-de-Reneins. — SYLOW, à Frederikshald. — TANNERY (Paul) (décédé). — TARRY (G.), à Paris. — TCHERBICHEF (décédé). — VIELLARD (décédé).

LISTE

DES

PRÉSIDENTS DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

DEPUIS SA FONDATION.

AN.		AN.	
1873	CHASLES.	1890	HATON DE LA GOUPIILLIÈRE.
1874	LAFFON DE LADÉBAT.	1891	COLLIGNON.
1875	BIENAYMÉ.	1892	VICAIRE.
1876	DE LA GOURNERIE.	1893	HUMBERT.
1877	MANNHEIM.	1894	PICQUET.
1878	DARBOUX.	1895	GOURSAT.
1879	O. BONNET.	1896	KÖNIGS.
1880	JORDAN.	1897	PICARD.
1881	LAGUERRE.	1898	LECORNU.
1882	HALPHEN.	1899	GUYOU.
1883	ROUCHE.	1900	POINCARÉ.
1884	PICARD.	1901	D'OCAGNE.
1885	APPELL.	1902	RAFFY.
1886	POINCARÉ.	1903	PAINLEVÉ.
1887	FOURET.	1904	CARVALLO.
1888	LAISANT.	1905	BOREL.
1889	ANDRÉ (DÉSIRÉ).		

Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels
la Société mathématique de France échange son Bulletin.

Amsterdam.....	Académie Royale des Sciences d'Amsterdam.	Pays-Bas.
Amsterdam.....	Société mathématique d'Amsterdam.	Pays-Bas.
Amsterdam.....	<i>Revue semestrielle des publications mathématiques.</i>	
Bâle.....	Naturforschende Gesellschaft.	Pays-Bas.
Baltimore.....	<i>American Journal of Mathematics.</i>	Suisse.
Berlin.....	Académie des Sciences de Berlin.	États-Unis.
Berlin.....	<i>Archiv für Mathematik und Physik.</i>	Allemagne.
Berlin.....	<i>Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.</i>	Allemagne.
Berlin.....	<i>Journal für die reine und angewandte Mathematik.</i>	Allemagne.
Bologne.....	Académie des Sciences de l'Institut de Bologne.	Italie.
Bordeaux.....	Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux.	France.
Bruxelles.....	Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.	Belgique.
Bruxelles.....	Société scientifique de Bruxelles.	Belgique.
Cambridge.....	Cambridge philosophical Society.	Grande-Bretagne.
Cambridge.....	<i>Annals of Mathematics.</i>	Massachusetts.
Christiania.....	<i>Archiv for Mathematik og Naturvidenskab.</i>	Norvège.
Coimbre.....	<i>Annaes scientificos da Academia Polytechnica do Porto.</i>	
Copenhague.....	<i>Nyt Tidsskrift for Mathematik.</i>	Portugal.
Cracovie.....	Académie des Sciences de Cracovie.	Danemark.
Édimbourg.....	Société Royale d'Édimbourg.	Autriche.
Édimbourg.....	Société mathématique d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Gand.....	<i>Mathesis.</i>	Grande-Bretagne.
Göttingen.....	Société Royale des Sciences de Göttingen.	Belgique.
Halifax.....	Nova Scotian Institute of Science.	Allemagne.
Hambourg.....	Société mathématique de Hambourg.	N ^{lle} Écosse (Canada)
Harlem.....	Société hollandaise des Sciences.	Allemagne.
Helsingfors.....	Société des Sciences de Finlande.	Hollande.
Kansas.....	Université de Kansas.	Finlande.
Kasan.....	Société physico-mathématique.	États-Unis.
Kharkov.....	Annales de l'Université.	Russie.
Kharkov.....	Société mathématique de Kharkov.	Russie.
La Haye.....	Archives néerlandaises des Sciences exactes et naturelles.	Russie.
Leipzig.....	Société Royale des Sciences de Saxe.	Pays-Bas.
Leipzig.....	<i>Mathematische Annalen.</i>	Allemagne.
Leipzig.....	<i>Archiv der Mathematik und Physik.</i>	Allemagne.
Leipzig.....	<i>Bibliotheca mathematica.</i>	Allemagne.

Liège.....	Société Royale des Sciences.	Belgique.
Livourne.....	<i>Periodico di Matematica.</i>	Italie.
Londres.....	Société astronomique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres.....	Société mathématique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres.....	Société Royale de Londres.	Grande-Bretagne.
Luxembourg.....	Institut Royal de Luxembourg.	Luxembourg.
Marseille.....	<i>Annales de la Faculté des Sciences de Marseille.</i>	France.
Mexico.....	Sociedad científica <i>Antonio Alzate.</i>	Mexique.
Milan.....	Institut Royal lombard des Sciences et Lettres.	Italie.
Moscou.....	Société mathématique de Moscou.	Russie.
Munich.....	Académie des Sciences de Munich.	Bavière.
Naples.....	Académie Royale des Sciences physiques et mathématiques de Naples.	Italie.
New-Haven.....	Académie des Sciences et Arts du Connecticut.	États-Unis.
New-York.....	American mathematical Society.	États-Unis.
Odessa.....	Société des naturalistes de la Nouvelle-Russie.	Russie.
Palerme.....	<i>Rendiconti del Circolo matematico.</i>	Italie.
Paris.....	Académie des Sciences de Paris.	France.
Paris.....	Association française pour l'avancement des Sciences.	France.
Paris.....	Société philomathique de Paris.	France.
Paris.....	<i>Bulletin des Sciences mathématiques.</i>	France.
Paris.....	<i>Journal de l'École Polytechnique.</i>	France.
Paris.....	Institut des Actuaire français.	France.
Paris.....	<i>Intermédiaire des Mathématiciens.</i>	France.
Pise.....	École Royale Normale supérieure de Pise.	Italie.
Pise.....	Université Royale de Pise.	Italie.
Pise.....	<i>Il Nuovo Cimento.</i>	Italie.
Prague.....	Académie des Sciences de Bohême.	Autriche.
Prague.....	<i>Casopis pro pěstování matematiky a fysiky.</i>	Autriche.
Prague.....	Société mathématique de Bohême.	Autriche.
Rome.....	Académie Royale des <i>Lincei.</i>	Italie.
Saint-Petersbourg.	Académie Impériale des Sciences.	Russie.
Stockholm.....	<i>Acta Mathematica.</i>	Suède.
Tokyo.....	Mathematico-physical Society.	Japon.
Toulouse.....	<i>Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse.</i>	France.
Turin.....	Académie des Sciences.	Italie.
Upsal.....	Société Royale des Sciences d'Upsal.	Russie.
Varsovie.....	Prace Matematyczno Fizyczne.	Suède.
Venise.....	Institut Royal vénitien des Sciences, Lettres et Arts.	Italie.
Vienne.....	Académie Impériale des Sciences de Vienne.	Autriche.
Vienne.....	<i>Monatshfte für Mathematik und Physik.</i>	Autriche.
Washington.....	Philosophical Society.	États-Unis.
Zurich.....	Naturforschende Gesellschaft.	Suisse.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE

PUBLIÉ
PAR LES SECRÉTAIRES.

S'adresser, pour la rédaction, à M. RAFFY, rue Pierre-Nicole, 7, Paris, 5^e;
pour la distribution, à M. GRÉVY, rue Saint-Placide, 62, Paris, 6^e.

TOME XXXIV. — FASCICULE I.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
A LA SORBONNE.

1906

MM. les Membres de la Société sont priés d'adresser leur cotisation à M. *Claude-Lafontaine*,
banquier, rue de Trévis, n° 32, à Paris, Trésorier de la Société.

On s'abonne et l'on trouve les Volumes déjà publiés au siège de la Société et à la Librairie
Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, Paris.

Les séances de la Société mathématique ont lieu les premier et troisième jendis de chaque mois à 9 heures du soir.

Depuis le 1^{er} mars 1900 les séances de la Société ont lieu dans une salle de la Faculté des Sciences (entrée place de la Sorbonne, escalier tout au bout de la galerie, deuxième étage à droite).

Les Membres de la Société ont dû recevoir une carte, portant le timbre du Secrétariat, leur donnant accès à la Bibliothèque de l'Université, et fournissant à ce sujet les renseignements nécessaires : ceux qui ne l'auraient pas reçue sont priés d'en informer le Secrétariat.

La correspondance peut être adressée, soit à la Faculté des Sciences, place de la Sorbonne, soit au domicile de l'un des secrétaires, de préférence à M. Grévy, sauf ce qui concerne la rédaction du Bulletin, qui doit être adressé de préférence à M. Raffy.

AVIS.

Dans sa séance du 2 février 1883, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé qu'à l'avenir tout Membre de la Société qui voudra compléter sa collection du *Bulletin* aura le droit personnel de le faire, une seule fois pour chacun des volumes publiés avant son admission, aux prix suivants :

	Le volume.
	fr
Dix volumes au moins.....	4,60
De cinq à neuf volumes.....	5,00
Moins de cinq volumes.....	6,00

Dans sa séance du 28 février 1900, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé qu'à l'avenir tout Membre de la Société, auteur d'un travail *quelconque* inséré dans le Bulletin et désirant en obtenir des tirages à part, **devra en faire la demande en retournant l'épreuve corrigée.**

Si le nombre demandé ne dépasse pas *cinquante*, les frais du tirage à part seront faits par la Société.

Conformément à des décisions prises par le Conseil et par la Commission d'impression :

1^o Le *Bulletin*, depuis le Tome XXVII, paraît tous les trois mois;

2^o Les auteurs de tous les travaux destinés au *Bulletin* sont **instantanément priés** d'inscrire en tête de leurs manuscrits la classification que leur assigne, d'après le sujet traité, l'*Index du Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*;

3^o Ils sont également invités à ne pas dépasser, autant que possible, la proportion de **une figure pour quatre pages** de texte imprimé.

F 13 02 13
BULLETIN

DE LA

Sever Fund

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 2 NOVEMBRE 1905.

PRÉSIDENCE DE M. BOREL.

Communications :

M. Andoyer : *Sur l'éclipse de Soleil du 30 août 1905.*

M. Lecornu : *Sur l'herpolodie.*

M. Fontené : *Sur une configuration remarquable dans l'espace.*

M. de Sparre adresse une *Note au sujet du valet de menuisier*

SÉANCE DU 16 NOVEMBRE 1905.

PRÉSIDENCE DE M. BOREL.

Communications :

M. Hadamard : *Sur les caractéristiques des systèmes aux dérivées partielles.*

M. Fréchet : *Sur la formule d'interpolation de M. Borel.*

M. Suchar : *Sur les lois de force centrale qui font décrire à un point matériel une conique.*

M. Hadamard présente quelques observations à ce sujet.

SÉANCE DU 7 DÉCEMBRE 1905.

PRÉSIDENCE DE M. BRICARD.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : M. Barré, présenté par MM. Clairin et Demartres; M. Denjoy, présenté par MM. Baire et Borel; M. Van Vleck, présenté par MM. Hadamard et Borel.

Communications :

M. Hadamard : *Conférence sur la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires.*

M. de Sparre adresse une *Note au sujet du frottement de glissement.*

SÉANCE DU 21 DÉCEMBRE 1905.

PRÉSIDENCE DE M. TOUCHE.

Communications :

M. Fatou : *Sur un point de la théorie arithmétique des formes quadratiques binaires.*

M. Andoyer : *Sur la discussion des problèmes.*

M. Fouché : *Sur le théorème de Dupin.*

SÉANCE DU 11 JANVIER 1906.

PRÉSIDENCE DE M. BOREL.

La Société, réunie en Assemblée générale, procède au renouvellement de son Bureau et à l'élection de membres du Conseil. Elle entend et approuve le Rapport de la Commission des finances sur l'exercice 1904-1905.

Communications :

M. Suchar : *Sur les lois de force centrale qui font décrire à un point matériel une conique.*

M. Raffy : *Sur l'équation d'Ossian Bonnet pour le problème de la déformation, considérée comme équation de Laplace.*

M. Hadamard : *Sur les transformations planes.*

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR UNE CONFIGURATION REMARQUABLE DANS L'ESPACE;

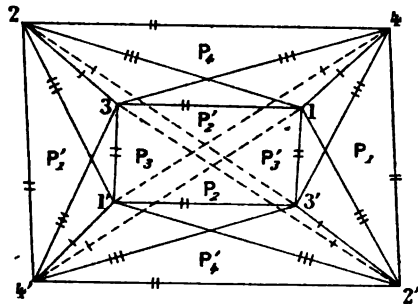
Par M. G. FONTENÉ.

I.

1. DÉFINITION D'UN OCTUPLE GAUCHE COMPLET. — Les trois couples de sommets d'un quadrilatère complet sont trois couples de points tels que la droite joignant un point du premier couple à un point du deuxième couple passe par un point du troisième couple; le nombre de ces droites est 2×2 . La figure corrélatrice, en géométrie plane, est le quadrangle avec ses trois couples de côtés. L'extension à l'espace va donner une figure qui est sa propre corrélatrice.

(Le lecteur fera bien de se familiariser immédiatement avec la figure 1, où l'on voit nettement deux quadrangles situés dans les

Fig. 1.



plans P_4 et P'_4 , deux autres dans les plans P_1 et P'_1 , et, avec un peu d'attention, deux encore dans les plans P_2 , P'_2 , deux dans les plans P_3 , P'_3 , d'après les indications du Tableau ci-après. Les deux contours quadrangulaires 424'2' et 313'1', par exemple, sont des contours gauches.)

Soient dans l'espace quatre couples de points

$$(1 \ 1'), \quad (2 \ 2'), \quad (3 \ 3'), \quad (4 \ 4'),$$

tels que le plan déterminé par un point du premier couple, un point du deuxième couple et un point du troisième couple, passe par un point du quatrième couple; le nombre de ces plans est $2 \times 2 \times 2$, et, si l'un d'eux est $(1 \ 2 \ 3 \ 4)$, les sept autres sont $(1 \ 2 \ 3' \ 4')$, ..., $(1' \ 2' \ 3' \ 4')$, le nombre des accents étant pair.

Ces plans forment quatre couples :

$$\begin{aligned} P_1 &= (4 \ 1 \ 2' \ 3'), & P'_1 &= (4' \ 1' \ 2 \ 3), \\ P_2 &= (4 \ 2 \ 3' \ 1'), & P'_2 &= (4' \ 2' \ 3 \ 1), \\ P_3 &= (4 \ 3 \ 1' \ 2'), & P'_3 &= (4' \ 3' \ 1 \ 2), \\ P_4 &= (1 \ 2 \ 3 \ 4), & P'_4 &= (1' \ 2' \ 3' \ 4'); \end{aligned}$$

et, CORRÉLATIVEMENT, ces quatre couples de plans sont tels que le point commun à trois plans pris dans les trois premiers couples appartient à un plan du quatrième couple :

$$1 = (P_1 P_2 P'_3 P'_4), \quad 1' = (P'_1 P'_2 P_3 P_4), \quad \dots$$

Chacun des 8 plans contient quatre des 8 points, et par chacun des 8 points passent quatre des 8 plans.

Nous nommerons la figure ainsi définie un OCTUPLE GAUCHE COMPLET.

2. CONDITIONS ET PARAMÈTRES. — *Les 8 conditions apparentes imposées aux 8 points par l'existence des 8 plans se réduisent à 7; la figure dépend de paramètres en nombre $3 \times 8 - 7 = 17$.*

En effet, soient donnés trois couples de plans (P_1, P'_1) , (P_2, P'_2) , (P_3, P'_3) formant un hexaèdre avec ses quatre couples de sommets $(1, 1') (2, 2') (3, 3') (4, 4')$; le trièdre P_1, P_2, P_3 aura pour sommet le point 4, et pour arêtes les droites $4 \ 1', 4 \ 2', 4 \ 3'$. Ces 8 points communs à trois quadriques (P_1, P'_1) , ... sont 8 points de Lamé; dès lors, si l'on suppose que les 4 points 1, 2, 3, 4 sont dans un même plan, la même chose a lieu pour les 4 autres. Un raisonnement corrélatif peut être fait en partant d'un octaèdre. On se rappellera que les 8 points du système sont 8 points de Lamé; les 8 plans du système sont de même 8 plans de Lamé.

3. DIVERS POINTS DE VUE. — a. *Le couple de plans* (P_1, P'_1) *contient deux quadrangles* $1\ 2\ 3\ 4$ *et* $1'\ 2'\ 3'\ 4'$, *tels que deux côtés de notations différentes* $2\ 3$ *et* $4'\ 1'$ *sont dans un même plan, et coupent par suite en un même point la droite d'intersection des deux plans; on a ainsi les 8 plans* P .

Si l'on se donne les plans P_1 et P'_1 , avec le quadrangle $1\ 2\ 3\ 4$, et si, par les points P_1, P_2, P_3 où les droites $4\ 1, 4\ 2, 4\ 3$ rencontrent l'arête du dièdre, on mène 3 droites dans le plan P'_1 , de manière à former le triangle $1'\ 2'\ 3'$, on peut démontrer directement ceci : P'_1, P'_2, P'_3 étant les points où les côtés du triangle $1\ 2\ 3$ rencontrent l'arête du dièdre, les trois droites qui joignent respectivement ces points aux points $1', 2', 3'$ concourent en un même point $4'$; il y a là une condition remplie d'elle-même. (Les notations $P_1, P_2, \dots$, qui représentent réellement des plans, ont été employées ici pour représenter les sommets d'angles contenus dans ces plans.)

b. Si l'on partage les 8 points en 2 couples, de manière que chaque couple renferme les 4 indices et un nombre impair d'accents, on obtient *deux tétraèdres dont chacun est inscrit à l'autre* : tels sont les tétraèdres $1'\ 2\ 3\ 4$ et $1\ 2'\ 3'\ 4'$; on a bien les 8 plans P . La figure donne 4 couples de tels tétraèdres. M. G. Humbert, dans un Mémoire inséré au *Bulletin* (t. XXXII, 1904, p. 140-144), a rencontré des couples de tétraèdres dont chacun se trouvait être inscrit à l'autre par la nature de la question étudiée, et il a observé que les 8 sommets et les 8 plans des faces pouvaient se grouper quatre à quatre de trois nouvelles manières pour former deux tétraèdres analogues.

c. On a considéré jusqu'ici les points et les plans du système. Considérons les droites qui joignent 2 points n'appartenant pas à un même couple; ce sont en même temps les droites d'intersection de 2 plans n'appartenant pas à un même couple; leur nombre est $\frac{6 \times 8}{2}$ ou 24, puisque chaque point, par exemple, est joint à 6 autres. Ces 24 droites se partagent en 3 groupes de 8, que nous appellerons les groupes I, II, III, et chaque groupe se subdivise en 2 sous-groupes; les droites du groupe I, par exemple, sont

$$\left\{ \begin{array}{llll} 4\ 1, & 4'\ 1', & 2\ 3', & 2'\ 3, \\ 4\ 1', & 4'\ 1, & 2\ 3, & 2'\ 3'. \end{array} \right.$$

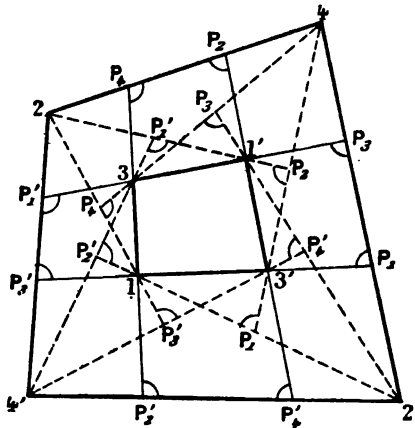
ou

$$\begin{cases} (P_1, P_1), & (P'_1, P'_1), & (P_2, P'_2), & (P'_2, P_2), \\ (P_3, P_3), & (P'_3, P'_3), & (P_4, P'_4), & (P'_4, P_4). \end{cases}$$

Les 8 droites d'un même groupe sont 8 génératrices d'un hyperboloïde, 4 d'un système et 4 de l'autre; la droite 4 1 ou (P_1, P_1) , par exemple, rencontre les 4 droites 4 1', 4' 1, $(P_4 P'_1)$, $(P'_4 P_1)$. Les 8 droites du groupe I (marquées d'un trait sur la figure 1) forment sur un hyperboloïde H_1 deux contours quadrangulaires 4 1 4' 1' et 2 3 2' 3' ayant pour sommets les 8 points du système; ces mêmes droites forment deux autres contours quadrangulaires dont les plans des angles sont P_1, P_1, P'_1, P'_1 et P_2, P_3, P'_2, P'_3 . Chacun des groupes II et III donne des résultats analogues.

Sur la figure 2, où la disposition des 8 points n'est pas la même

Fig. 2.



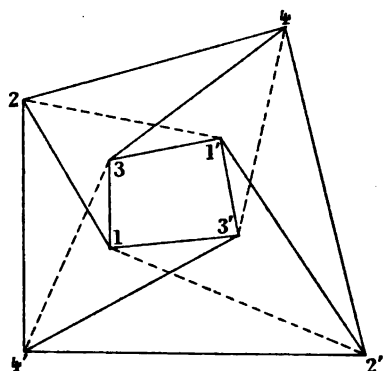
que dans la figure 1 (déplacement des points 1 et 1'), on a représenté seulement les groupes de droites II et III, que l'on aura à combiner plus loin; on voit nettement l'hyperboloïde du groupe II avec les deux contours 4 2 4' 2'; 3 1 3' 1' et les deux contours $P_4 P_2 P'_4 P'_2, P_3 P_1 P'_3 P'_1$; l'hyperboloïde du groupe III ne se détache pas, mais les contours 4 3 4' 3', 1 2 1' 2' et $P_1 P_3 P'_1 P'_3, P_4 P_2 P'_4 P'_2$ sont bien visibles (les derniers au centre de la figure).

Les 17 paramètres sont les 9 paramètres de l'hyperboloïde H_2 ,

par exemple, et les 8 paramètres des génératrices. On obtient encore ce nombre de 17 paramètres en observant que les 16 conditions d'intersection des 8 droites du groupe II, par exemple, se réduisent à 15 conditions distinctes ($32 - 15 = 17$); la 16^e condition est remplie d'elle-même.

c'. Chacun des 8 plans P contient, par définition, un quadrangle; le nombre des côtés de ces quadrangles est $\frac{6 \times 8}{2}$ ou 24, chaque côté étant commun à deux quadrangles. Chacun de ces quadrangles emprunte un couple de côtés à chacun des groupes I, II, III, et donne lieu à trois *contours quadrangulaires* en négligeant l'un des couples de côtés. (Corrélativement, chacun des 8 points du système est le sommet d'un angle tétraèdre complet donnant lieu à trois angles tétraèdres ordinaires.)

Fig. 3.



Si le groupe négligé est, par exemple, le groupe I, on a ceci (fig. 3) : *Les huit quadrilatères*

$$\begin{array}{cccc} 4 \ 2 \ 1 \ 3, & 4' \ 2 \ 1 \ 3', & 4' \ 2' \ 1' \ 3', & 4 \ 2' \ 1' \ 3; \\ 4 \ 2 \ 1' \ 3', & 4' \ 2 \ 1' \ 3, & 4' \ 2' \ 1 \ 3, & 4 \ 2' \ 1 \ 3' \end{array}$$

sont les faces d'un polyèdre Π , lequel a 8 sommets, 8 faces, 16 arêtes, les faces étant groupées quatre par quatre autour de chaque sommet. Les 8 points et les 8 plans d'un octuple gauche complet sont ainsi les sommets et les plans des faces de trois polyèdres différents de l'espèce indiquée.

(Avec la figure 1, si l'on néglige les droites du groupe III, les 8 faces du polyèdre II, sont les quatre quadrilatères convexes $4\ 1\ 3\ 2$, $2\ 3\ 1'4'$, ..., et les quatre quadrilatères à côtés croisés $4\ 1'3'2$, $2\ 3'1\ 4'$, ...)

Ces polyèdres à 8 sommets, 8 faces, 16 arêtes, rentrent dans la catégorie des polyèdres homogènes *de genre un* ($F + S = A$), que j'ai considérés en vue de l'extension à l'espace du théorème des polygones de Poncelet (*Bulletin*, t. XXXII, p. 284). Les polyèdres homogènes de genre *un* comprennent des polyèdres tétragonaux, dont les faces sont des quadrilatères assemblés 4 par 4 autour de chaque sommet; pour ceux que j'avais indiqués tout d'abord, le nombre des faces est pq , $p \geq 3$, $q \geq 3$. M. Bricard a signalé le premier le polyèdre de la figure 4 (*Nouvelles Annales*, 4^e série, t. IV, p. 554); j'ai ensuite retrouvé ce polyèdre en faisant $p = 4$, $q = 4$ et en supposant que les sommets se confondent deux à deux (*Bulletin*, t. XXXIII, p. 115; la figure donnée à cet endroit représente un polyèdre identique, comme disposition, au polyèdre II, de la figure 1 dont il est question ci-dessus).

II.

4. OCTUPLES GAUCHES COMPLETS, EN NOMBRE TRIPLEMENT INFINI, INSCRITS A UNE BIQUADRATIQUE. COUPLES DE POINTS EN INVOLUTION SUR UNE BIQUADRATIQUE; TROIS SÉRIES. — La considération des quadrilatères complets inscrits à une cubique plane introduit pour une telle courbe une correspondance bien connue (*couples steineriens*) et l'on sait avec quelle élégance les fonctions elliptiques expriment la relation entre deux points associés. *Une correspondance analogue s'introduit pour une biquadratique gauche par la considération des octuples complets qui lui sont inscrits*; M. Humbert, dans le Mémoire déjà cité, a rencontré cette correspondance par l'intermédiaire de quadriques que nous retrouverons au paragraphe III, et en considérant, comme il est dit plus haut, des systèmes de deux tétraèdres inscrits l'un dans l'autre : il y a intérêt à établir la correspondance en question sans le secours de ces quadriques. On peut d'ailleurs donner à une telle correspondance le nom d'*involution*, et ces involutions sont au nombre de trois; nous les nommerons à l'occasion α' , α'' , α''' .

Appelons *biquadratique ponctuelle* la courbe d'intersection de deux quadriques, et *biquadratique tangentielle* la courbe dont les plans osculateurs sont les plans tangents communs à deux quadriques (arête de rebroussement de la développable circonscrite aux deux quadriques); l'une ou l'autre de ces courbes dépend de 16 paramètres. Toute biquadratique ponctuelle qui passe par 7 des 8 points d'un octuplet gauche complet passe par le 8^e; il passe donc par ces 8 points des biquadratiques ponctuelles en nombre doublement infini. De même, toute biquadratique tangentielle qui admet pour plans osculateurs, etc.; il existe donc, en nombre doublement infini, des biquadratiques tangentielles admettant pour plans osculateurs les 8 plans d'un octuplet gauche complet.

L'ensemble d'un octuplet gauche complet et d'une biquadratique circonscrite dépend ainsi de $17 + 2$ ou 19 paramètres. Si l'on se donne la biquadratique (16 paramètres) et un plan (3 paramètres) qui la coupe aux 4 points 1, 2, 3, 4, il existe donc sur la biquadratique 4 autres points 1', 2', 3', 4', formant avec les premiers un octuplet gauche complet. La question est de savoir si la position du point 1' dépend uniquement de la position du point 1. Or, désignons par α l'argument elliptique d'un point de la biquadratique, la représentation paramétrique étant supposée telle que les arguments de quatre points de la courbe, situés dans un même plan, aient une somme nulle; soit ω l'une des trois demi-périodes des fonctions elliptiques introduites. Les arguments des quatre premiers points étant $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, si l'on prend

$$\alpha'_1 = \alpha_1 + \omega, \quad \alpha'_2 = \alpha_2 + \omega, \quad \dots,$$

l'hypothèse

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$$

donne six égalités telles que

$$\alpha_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3 + \alpha_4 \equiv 0 \pmod{2\omega},$$

et une dernière égalité

$$\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3 + \alpha'_4 \equiv 0 \pmod{2\omega};$$

réciroquement, même si l'on se borne aux cinq plans

$$(1 \ 2 \ 3 \ 4), \quad (1' \ 2 \ 3 \ 4'), \quad (1 \ 2' \ 3 \ 4'), \quad (1 \ 2 \ 3' \ 4'), \quad (1' \ 2' \ 3' \ 4').$$

c'est-à-dire si l'on part du plan 1 2 3 4 et du point 4' pour déterminer les points 1', 2', 3', et obtenir un plan 1' 2' 3' passant par le point 4', on obtient

$$\alpha'_1 = \alpha_1 + \omega, \quad \dots$$

Les arguments des 4 couples de sommets d'un octuplé gauche complet inscrit à une biquadratique sont donc α_1 et $\alpha_1 + \omega$, α_2 et $\alpha_2 + \omega$, ..., ce qui démontre le fait annoncé; *deux points associés ont des arguments qui diffèrent de ω* . Les octuplés gauches complets inscrits à une biquadratique dépendent de 3 paramètres.

On aurait des faits corrélatifs.

III.

§. OCTUPLES GAUCHES COMPLETS, EN NOMBRE DOUBLEMENT INFINI, INSCRITS A UNE BIQUADRATIQUE ET CIRCONSCRITS A UNE QUADRIQUE. — Un quadrilatère complet étant inscrit à une cubique plane, si l'on inscrit une conique à ce quadrilatère, il existe une infinité de quadrilatères complets inscrits à la cubique et circonscrits à la conique; le système de la cubique et de la conique dépend de paramètres en nombre $9 + 2 + 1 - 1$ ou 11. On peut se donner la conique, les coordonnées de ses points étant exprimées en fonctions rationnelles d'un paramètre t , et définir les quadrilatères complets par les valeurs que prend le paramètre t aux 4 points de contact, ces valeurs étant fournies par l'équation du quatrième degré

$$f(t) + \lambda \varphi(t) = 0,$$

où λ est variable; le nombre des paramètres est $5 + 9 - 3$ ou 11, en raison de la substitution linéaire que l'on peut effectuer sur λ .

La question suivante se pose alors pour l'espace :

Un octuplé gauche complet étant inscrit à une biquadratique Ω , si l'on considère une quadrique S tangente aux 8 plans de cet octuplé, existe-t-il une double infinité d'octuplés gauches complets inscrits à la biquadratique et circonscrits à la quadrique?

Le nombre de paramètres pour le système de la biquadratique et

de la quadrique serait $16 + 3 + 2 - 2$, ou 19. *La biquadratique étant donnée, la quadrique dépendrait de 3 paramètres.*

6. Une courte digression est ici nécessaire. J'ai donné en 1899 (*Nouvelles Annales*, p. 67) le théorème suivant que j'ai démontré analytiquement :

Étant données deux quadriques S' et S, pour que les tétraèdres inscrits à S' et circonscrits à S dépendent de 5 paramètres, au lieu de 4, il faut et il suffit que les deux quadriques aient 4 génératrices communes (soient quadritangentes). Si l'on se donne à volonté l'un des sommets du tétraèdre sur l'une des quadriques, et le plan de la face opposée tangent à l'autre quadrique, le tétraèdre dépend encore d'un paramètre. Au début du Mémoire cité plus haut, M. G. Humbert a établi géométriquement le même théorème, et il lui a donné sa portée véritable en observant que, dans les conditions indiquées, de quelque façon que l'on commence et que l'on poursuive la construction d'un tétraèdre inscrit à l'une des quadriques et circonscrit à l'autre, cette construction aboutit toujours : on peut se donner à volonté le sommet D sur l'une des quadriques, le trièdre DA, DB, DC circonscrit à l'autre par les plans de ses faces.

[Klein a montré que la surface de Kummer admet une série cinq fois infinie de tétraèdres à la fois inscrits et circonscrits ; or une telle surface peut dégénérer en un système de deux quadriques quadritangentes ; le théorème en question est un cas singulier du résultat obtenu par Klein.]

7. Revenons à la question posée plus haut. On peut chercher la condition nécessaire et suffisante pour qu'une biquadratique Ω et une quadrique S admettent une double infinité d'octuples gauches complets inscrits à Ω et circonscrits à S ; on va voir que *la biquadratique doit passer par les sommets de deux quadrilatères tracés sur la quadrique.*

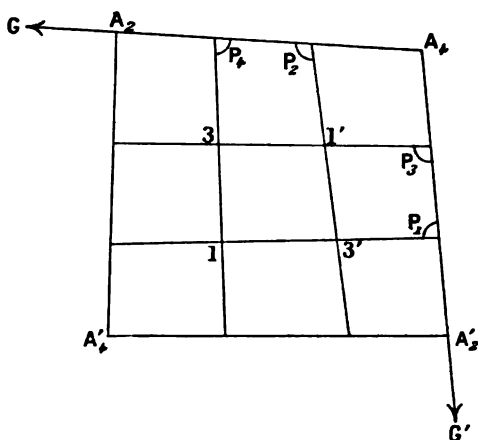
Pour montrer que la condition est nécessaire, considérons l'un des 8 points communs à Ω et à S, soit A_1 , et désignons par G, G' les deux génératrices de S qui passent par ce point (*fig. 4*). Un plan quelconque mené par G est un plan tangent à S ; s'il coupe

encore Ω aux points A_2 et 1, 3, il existe donc un octuple gauche complet, inscrit à Ω et circonscrit à S , admettant pour quatre de ses sommets les points $A_4, A_2, 1$ et 3. Des trois plans

$$(A_4, 1, A'_2, 3'), (A_4, A_2, 3', 1'), (A_4, 3, 1', A'_2),$$

tangents à la quadrique S , le deuxième, par exemple, passe par G comme le plan d'où l'on est parti, les deux autres passant par G' ;

Fig. 4.



le point A_2 est donc sur G , le point A'_2 sur G' . La biquadratique Ω passe ainsi par les sommets A_4, A_2, A'_4, A'_2 d'un quadrilatère tracé sur la quadrique S . Elle passe encore par les sommets d'un second quadrilatère $A_3 A_1 A'_3 A'_1$ analogue au premier. On remarquera que les 8 points A sont les sommets d'un octuple gauche très particulier, inscrit à Ω et circonscrit à S .

Réciproquement, soit une biquadratique Ω qui passe par les sommets A de deux quadrilatères tracés sur une quadrique S ; nous supposons que le point A_i est le point i de la figure 3, où l'on négligera les lignes pointillées. La quadrique S' menée par Ω et par la corde 4 2 contient les cordes 3 1 et 3' 1' qui s'appuient sur 4 2, et aussi la corde 4' 2' qui s'appuie sur 3 1 : cette quadrique contient donc le contour quadrangulaire $P_1 P_2 P'_1 P'_2$ tracé sur S ; une autre quadrique S'' menée par Ω contient le contour quadrangulaire $P_3 P_1 P'_3 P'_1$; la biquadratique Ω est ainsi l'intersection de deux

quadriques, S' et S'', quadritangentes à S. Si l'on mène à S un plan tangent *quelconque*, on voit aisément, par le théorème du n° 6, que ce plan fournit un octuplet gauche complet inscrit à Ω et circonscrit à S.

Le raisonnement précédent appartient pour le fond à M. Humbert; ce géomètre, après avoir établi le théorème du n° 6, s'est proposé de rechercher à quelles conditions une biquadratique Ω et une quadrique S admettent une double infinité de *tétraèdres* inscrits à Ω et circonscrits à S; il a trouvé la condition énoncée ci-dessus, et introduit à ce propos les couples de tétraèdres mentionnés précédemment.

Le nombre de paramètres dont dépend ici le système de la quadrique et de la biquadratique est $9 + 8 + 2$ ou 19. Comme c'est le nombre de paramètres indiqué à la fin du n° 5, il y a tout lieu de croire que la question posée dans ce numéro se résout par l'affirmative.

[Le théorème rappelé au début du n° 6 donne cette conséquence : Étant données deux quadriques quelconques S' et S, si l'on considère les tétraèdres en nombre doublement infini qui sont inscrits à S' et circonscrits à S, l'un des sommets étant donné sur S', le plan de la face opposée passe par un point fixe; si l'on considère en effet le cône qui a pour sommet le point donné et qui est circonscrit à S, il existe une quadrique S_0 inscrite à ce cône et quadritangente à S', et le plan dont il s'agit est tangent à la quadrique S_0 ; ce plan dépend d'un paramètre, et, quand on l'a choisi, on obtient une infinité simple de tétraèdres répondant à la question. En ce qui concerne la biquadratique Ω et la quadrique S, si l'on se donne sur Ω le sommet 1' du tétraèdre 1' 2 3 4, ce tétraèdre dépend encore d'un paramètre, et le plan de la face 2 3 4 passe par un point fixe, le point 1; ce fait se comprend bien d'après ce qui précède, en considérant une quadrique passant par Ω , à l'exception des deux quadriques S' et S'' qui sont quadritangentes à S.]

IV.

8. TÉTRAÈDRES EN NOMBRE SIMPLEMENT INFINI, INSCRITS À UNE BIQUADRATIQUE PONCTUELLE, ET DONT LES PLANS DES FACES SONT OSCULATEURS À UNE BIQUADRATIQUE TANGENTIELLE. — La condition

donnée au paragraphe III, pour qu'une biquadratique Ω et une quadrique S admettent une double infinité d'octuples gauches complets inscrits à Ω et circonscrits à S , peut, comme on l'a vu au cours de la démonstration, s'énoncer ainsi : il faut et il suffit que l'on puisse faire passer par la biquadratique deux quadriques S' et S'' quadritangentes à S . M. Humbert, qui considère dans son Mémoire deux tétraèdres (par analogie avec les triangles de Poncelet), indique en terminant le théorème suivant :

Pour qu'il existe une série *simplement infinie* de tétraèdres inscrits à une quadrique S' et circonscrits à la fois aux quadriques S_1 et S_2 , il *suffit* que, parmi les quadriques du faisceau tangentiel déterminé par S_1 et S_2 , il y en ait une qui soit quadritangente à S' ; le lieu des sommets de ces tétraèdres est une biquadratique tracée sur S' . *On a ainsi une série simplement infinie de tétraèdres inscrits à une biquadratique ponctuelle π , et dont les plans des faces sont osculateurs à une biquadratique tangentielle τ .* Et il y aurait à rechercher si, à toute quadrique passant par π , correspond une quadrique tangente aux plans osculateurs de τ , par la condition que ces deux quadriques soient quadritangentes; cela n'est pas certain, la condition ci-dessus n'étant pas donnée comme nécessaire.

V.

9. OCTUPLES GAUCHES COMPLETS INSCRITS A UNE QUADRIQUE ET CIRCONSCRITS A UNE AUTRE. — Le problème de construire un octuple gauche complet, circonscrit à une quadrique S et inscrit à une quadrique S' , est un problème triplement indéterminé en apparence : un octuple gauche dépend en effet de 17 paramètres, et on l'astreint à 14 conditions seulement, les 8 points d'un octuple formant un système de points de Lamé, ses 8 plans formant un système de plans de Lamé. J'ai déjà rencontré ce problème à un autre point de vue. On a remarqué, à la fin du paragraphe I, que les 8 points et les 8 plans d'un octuple gauche complet sont, de trois manières différentes, les sommets et les plans des faces d'un polyèdre Π qui rentre dans la catégorie des polyèdres tétragonaux de genre *un* (*fig. 3*); et j'ai montré (*Bulletin*, t. XXXIII, p. 118) que le problème de construire un polyèdre Π , circonscrit à une

quadrique S et inscrit à une quadrique S', est très probablement un problème généralement impossible, et qui ne devient possible qu'en devenant quadruplement indéterminé; s'il en est bien ainsi, la condition d'indétermination est que les racines du discriminant de la forme $kS + S'$, soit

$$\delta k^4 + \theta k^3 + \varphi k^2 + \theta' k + \delta',$$

vérifient la relation

$$d + a = b + c.$$

J'ai rencontré cette même condition pour un autre problème (*Nouvelles Annales*, 1905, p. 119). J'ai alors été conduit à remarquer que, si elle est satisfaite pour deux quadriques S et S', elle l'est encore lorsque l'on remplace la quadrique S' par une quadrique quelconque du faisceau ponctuel déterminé par S et S', ou la quadrique S par une quadrique quelconque du faisceau tangentiel déterminé par S et S'. J'ai également été conduit, en traitant ce nouveau problème, au résultat suivant : la racine carrée du polynôme

$$\delta + \theta h + \varphi h^2 + \theta' h^3 + \delta' h^4$$

étant

$$A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + Eh^4 + \dots,$$

la condition ci-dessus est simplement

$$D = 0.$$

NOTE I.

En ce qui concerne les trois involutions $\mathfrak{J}$ sur une biquadratique, d'après les formules

$$\alpha' = \alpha + \omega_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

j'indiquerai les faits suivants, qui ne sont d'ailleurs pas des faits nouveaux.

Considérons les couples de points de la biquadratique dont les arguments elliptiques satisfont à l'une des relations

$$m + n' = \omega_1, \quad m + n'' = \omega_2, \quad m + n''' = \omega_3, \quad m + n = 0,$$

le double de chacune des quantités $\omega_1, \omega_2, \omega_3, 0$ étant de la forme $2h\omega_1 + 2k\omega_2$, les choses étant d'ailleurs telles que 4 points coplanaires de la biquadratique aient des arguments de somme nulle.

Si l'on prend, par exemple, la première relation, deux couples, m, n' et $\overline{m}, \overline{n'}$, sont dans un même plan, puisque la somme des 4 arguments est nulle, à une période près, de sorte que les cordes mn' et $\overline{m}\overline{n'}$ se coupent en un point A; une troisième corde du même système doit rencontrer chacune des deux premières, et par suite passer en A. Les cordes mn' sont donc les génératrices du cône de sommet A qui passe par la biquadratique, et l'on a de même les génératrices des 3 autres cônes (sommets B, C, D) qui passent par cette courbe. Si l'on mène alors par DA un plan sécant qui coupe la courbe aux points m, m', n, n' , les cordes mn et $m'n'$ passent en D, les cordes mn' et $m'n$ passent en A, et l'on a

$$\begin{cases} m + n = 0, \\ m' + n' = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} m + n' = \omega_1, \\ m' + n = \omega_1. \end{cases}$$

On a donc

$$m' = m + \omega_1, \quad n = n' + \omega_1,$$

de sorte que, dans le quadrilatère $mn m' n'$, deux sommets opposés m et m' , ou n et n' , se correspondent dans l'involution δ' . Un plan sécant mené par BC donnerait le même résultat. Les cordes telles que mm' rencontrent DA et BC.

En second lieu, si ab est une corde fixe de la biquadratique, prise arbitrairement, il y a involution entre les plans abm et abm' ; car un plan mené par ab donne les points m et μ avec les arguments m et $-a - b - m$, et les points associés m' et μ' ont pour arguments

$$m + \omega_1 \quad \text{et} \quad -a - b - m + \omega_1,$$

de sorte que les plans abm' et $ab\mu'$ sont identiques.

NOTE II.

Si l'on voulait représenter sur une figure les 24 droites dont il est question au n° 3, on pourrait dessiner les 8 droites qui sont en trait plein sur la figure 2, mettre $P_1, P_2, \dots, P'_1, P'_2, \dots$ là où il y a 1, 2, ..., 1', 2', ..., et inversement, puis dessiner les 16 droites qui portent les derniers côtés des quadrangles 1 2 3 4, 1' 2' 3' 4', 4 2 1' 3', 4' 2' 1 3.

**SUR CERTAINS SYSTÈMES LINÉAIRES, PONCTUELS ET TANGENTIELS,
DE QUADRIQUES;**

Par M. R. BRICARD.

1. Soit (S) un système linéaire ponctuel, à trois paramètres, de quadriques, représentées par l'équation

$$(1) \quad S = \lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \lambda_3 S_3 + \lambda_4 S_4 = 0,$$

où S_1, S_2, S_3, S_4 sont les premiers membres des équations de quatre quadriques fixes, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ des coefficients variables. Le système (S) ne comprend évidemment en général qu'un nombre fini de quadriques dégénérées en un système de deux plans; les conditions d'une telle dégénérescence sont, en effet, au nombre de trois, et l'on dispose de trois paramètres.

M. Reye a montré que le nombre de ces quadriques dégénérées est, en général, de dix ⁽¹⁾. *Peut-il arriver qu'un système (S) contienne une infinité de quadriques réduites à deux plans, et, dans le cas de l'affirmative, comment définir un tel système?* Tel est l'objet de ce travail.

Le problème peut être aussi posé sous sa forme corrélatrice : *trouver les systèmes linéaires, tangentiels, à trois paramètres, de quadriques, qui contiennent une infinité de quadriques réduites à deux points.* Il arrive que c'est ce second problème qu'il est le plus avantageux d'aborder : c'est donc ce que je vais faire.

2. Je commencerai par établir un théorème qui semble, au premier abord, étranger à la question qui nous occupe, mais dont la connaissance préalable me permettra tout à l'heure d'éviter une digression; ce théorème est le suivant :

Considérons une cubique gauche C et une involution (I) sur cette cubique. Soient $(a, a'), (b, b'), (c, c')$ trois couples de points de C, conjugués dans (I). Construisons l'octaèdre

(1) *Journal de Crelle*, t. 86, 1879, p. 89.

$(abcd' b'c')$, qui a pour sommets les points a, a', b, b', c, c' , et pour arêtes les droites qui joignent ces points deux à deux, à l'exception des trois droites aa', bb', cc' . Les faces de cet octaèdre se répartissent en deux groupes de quatre faces, deux faces quelconques d'un même groupe ayant en commun un sommet et un seul. Je dis que les quatre faces d'un même groupe (que j'appellerai faces associées) ont un point commun, qui se trouve sur la corde de C dont les extrémités α_1 et β_1 sont les points doubles de (I) .

Remarquons tout d'abord qu'il existe sur C une involution (I) , dont trois couples de points sont (α, β) , (a, b) , (a', b') . On le voit rapidement comme il suit : faisons correspondre homographiquement C à une conique G , et soient $a_1, b_1, a'_1, b'_1, \alpha_1, \beta_1$, les points de G qui correspondent à $a, b, a', b', \alpha, \beta$; α_1 et β_1 sont sur G les points doubles d'une involution dont deux couples sont (a_1, a'_1) et (b_1, b'_1) . Autrement dit $a_1 a'_1$ et $b_1 b'_1$ passent par le pôle de $\alpha_1 \beta_1$ par rapport à G . De là résulte que $a_1 b_1$ et $a'_1 b'_1$ se coupent sur $\alpha_1 \beta_1$. Par conséquent (α_1, β_1) , (a_1, b_1) , (a'_1, b'_1) sont trois couples de points en involution sur G . Donc, etc.

On peut encore dire que $\alpha\beta$, ab et $a'b'$ sont trois génératrices d'un même système d'une quadrique (Q) qui contient la cubique C . Soit alors D la génératrice de (Q) , de l'autre système, qui passe par le point C : D rencontre ab , $a'b'$ et $\alpha\beta$. En d'autres termes, les plans (abc) et $(a'b'c')$ passent par le même point d de $\alpha\beta$. On verrait de même que le point d appartient aux plans $(ab'c')$ et $(a'bc')$. On a donc établi que les quatre plans (abc) , $(ab'c')$, $(a'bc')$ et $(a'b'c')$ passent par un même point d de la corde $\alpha\beta$.

On reconnaît de la même façon que les plans $(a'bc)$, $(ab'c)$, (abc') , $(a'b'c')$ passent par un même point d' de $\alpha\beta$ ⁽¹⁾.

3. Voici encore une remarque qui nous sera utile : soient (a, a') , (b, b') , (c, c') trois couples de points dont quatre ne sont pas dans un même plan, et

$$A = 0, \quad A' = 0, \quad B = 0, \quad B' = 0, \quad C = 0, \quad C' = 0,$$

(¹) On peut encore démontrer que les points d et d' divisent harmoniquement le segment $\alpha\beta$. Mais on n'aura pas besoin de ce résultat.

leurs équations tangentielles respectives. Les quadriques du réseau tangentiel représenté par l'équation

$$\lambda AA' + \mu BB' + \nu CC' = 0$$

sont évidemment inscrites à l'octaèdre $(abca'b'c')$.

Ce réseau peut-il encore contenir une quadrique dégénérée en un système de deux points d, d' ?

S'il en est ainsi, l'un de ces points devra appartenir à quatre faces de l'octaèdre, qui, on le voit tout de suite, sont nécessairement quatre faces associées. Réciproquement, si quatre faces associées sont concourantes en un point d , le réseau tangentiel considéré contient une quadrique dégénérée en deux points dont l'un est d ; les quatre faces associées de l'autre groupe concourent alors nécessairement en un autre point d' , qui complète avec d la quadrique dégénérée dont il s'agit.

Ainsi, dans ce cas, le réseau tangentiel contient quatre quadriques réduites à deux points; il ne peut contenir d'autre quadrique ainsi dégénérée.

4. Abordons maintenant la question posée. Soit (Σ) un système linéaire tangentiel à trois paramètres, de quadriques, que nous supposons satisfaire à la condition énoncée. (Σ) contient une infinité de quadriques dégénérées en deux points m, m' . Ces points décrivent une certaine courbe C irréductible ou non (il pourrait arriver que l'une des parties de C fût décrite par le point m , l'autre par le point m'). *Je suppose expressément que C n'est pas une courbe plane et, plus généralement, que deux couples de points constituant une quadrique dégénérée de (Σ) ne sont pas, en général, dans un même plan.* Les cas ainsi exclus sont plus faciles à traiter et ne paraissent présenter que peu d'intérêt.

L'ordre total de C est, d'après cela, au moins égal à trois. Je vais montrer que C est une *biquadratique gauche*.

Montrons d'abord que C ne peut être une cubique gauche seule. Si, en effet, il en est ainsi, il est bien clair que les points m, m' engendrent une involution sur cette courbe. Soient alors (a, a') , (b, b') , (c, c') trois quadriques dégénérées du système (Σ) . (Σ) comprend toutes les quadriques du réseau défini par ces trois quadriques dégénérées, c'est-à-dire toutes les quadriques inscrites

à l'octaèdre $(abc a' b' c')$. Mais on a reconnu que quatre faces associées de cet octaèdre vont concourir en l'un ou l'autre de deux points (d, d') , situés en dehors de C (n° 2). (Σ) contiendrait donc des quadriques dégénérées en points n'appartenant pas à C, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Il résulte de là que C est une courbe d'ordre au moins égal à quatre. Soient alors (a, a') , (b, b') , (c, c') , (e, e') quatre quadriques dégénérées de (Σ) , les divers points qui les constituent n'étant pas quatre à quatre dans un même plan. C doit rencontrer le plan (abc) au moins en un point d , autre que les points a, b, c . Si l'on désigne par

$$A = 0, \quad A' = 0, \quad \dots, \quad E' = 0,$$

les équations tangentielles des points $a, a', \dots, e'$, on a

$$(1) \quad D = \alpha A + \beta B + \gamma C.$$

Mais, par hypothèse,

$$(2) \quad DD' = \lambda AA' + \mu BB' + \nu CC' + \rho EE'.$$

On en tire, en combinant les identités (1) et (2),

$$D'(\alpha A + \beta B + \gamma C) = \lambda AA' + \mu BB' + \nu CC' + \rho EE',$$

ou

$$\rho EE' = (\alpha D' - \lambda A') A + (\beta D' - \mu B') B + (\gamma D' - \nu C') C.$$

Si ρ n'est pas nul, cette identité montre que la quadrique réduite à deux points e et e' est inscrite dans l'octaèdre dont les sommets ont pour équations respectives

$$\begin{aligned} A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \\ \alpha D' - \lambda A' = 0, \quad \beta D' - \mu B' = 0, \quad \gamma D' - \nu C' = 0. \end{aligned}$$

Chacun de ces points doit donc (n° 3) appartenir à quatre faces de l'octaèdre en question; mais une de ces faces est le plan (abc) , qui devrait, en conséquence, contenir un des points e, e' : or on a supposé expressément le contraire.

Il faut donc que ρ soit nul, et l'identité (2) se réduit à

$$DD' = \lambda AA' + \mu BB' + \nu CC'.$$

Il résulte de tout cela que :

1° Le lieu des points constituant les quadriques dégénérées du système (Σ) est une courbe gauche du quatrième ordre C ;

2° Si $(a, a'), (b, b'), (c, c')$ sont trois couples de points constituant l'une de ces quadriques dégénérées, quatre faces associées de l'octaèdre $(abca'b'c')$ passent par l'un ou l'autre des deux points d, d' , qui appartiennent à C ; les deux points d, d' forment une quadrique dégénérée de (Σ) .

On sait qu'il existe deux espèces de courbes gauches du quatrième ordre : les *biquadratiques gauches*, et les *quartiques gauches de seconde espèce*, qui sont tracées sur une seule quadrique.

C ne peut être une quartique gauche de seconde espèce. En effet, les points $a, a', b, b', c, c', d, d'$ peuvent être répartis de quatre manières dans deux plans, comme l'indiquent les groupements suivants :

$$\begin{aligned} a b c d \text{ et } a' b' c' d', \\ a b' c' d \text{ et } a' b c d', \\ a' b c' d \text{ et } a b' c d', \\ a' b' c d \text{ et } a b c' d'. \end{aligned}$$

Ces points forment donc un *système ponctuel de Lamé* ⁽¹⁾, c'est-à-dire que les quadriques qui les contiennent sont en nombre doublement infini.

Si donc m est un point quelconque de C , il existe une infinité de quadriques contenant les *neuf* points $a, a', b, b', c, c', d, d', m$ et, par suite, la courbe C tout entière. Cette courbe, appartenant à une infinité de quadriques, est donc une *biquadratique gauche*.

Introduisons maintenant la représentation de la biquadratique C , supposée sans point double, au moyen de paramètres elliptiques, cette représentation étant faite de telle manière que quatre points de la courbe, situés dans un même plan, aient des paramètres de somme nulle. Désignons l'argument elliptique d'un point par la lettre même qui désigne ce point, mise entre parenthèses. On a les

(1) Il suffirait pour cela que ces points fussent répartis dans deux plans de *trois* manières différentes.

relations

$$(a) + (b) + (c) + (d) = 0,$$

$$(a') + (b') + (c) + (d) = 0;$$

d'où

$$(a) + (b) = (a') + (b');$$

de même

$$(a) + (c) = (a') + (c'),$$

$$(b) + (c) = (b') + (c').$$

Par suite

$$(a) + (b) + (c) = (a') + (b') + (c') + \text{une demi-période.}$$

Cette demi-période n'est pas nulle, sans quoi les points $a, a', \dots$ coïncideraient deux à deux.

Appelons-la ω_1 . On aura alors, par des combinaisons simples,

$$(a') - (a) = (b') - (b) = (c') - (c) = (d') - (d) = \omega_1.$$

Ainsi, *deux points constituant une quadrique dégénérée de (Σ') ont sur C des arguments différant d'une demi-période.* Ils sont donc conjugués dans l'une des trois involutions fondamentales bien connues, qui transforment cette courbe en elle-même ⁽¹⁾.

5. En résumant l'analyse précédente, nous pouvons dire que :

Si le système (Σ) satisfaisant à la condition imposée existe, il est défini de la manière suivante : Soient C une biquadratique gauche, $(a, a'), (b, b'), (c, c'), (d, d')$ quatre couples quelconques de points conjugués sur cette courbe, deux points étant dits conjugués lorsque leurs arguments elliptiques diffèrent d'une même demi-période ω_1 . Le système (Σ) est le système linéaire,

⁽¹⁾ La configuration formée par les points $a, a', b, b', c, c', d, d'$ est bien connue. On pourra consulter à son sujet une Note de M. Humbert : *Sur les tétraèdres inscrits et circonscrits à des quadriques* (ce Bulletin, 1904, p. 135), et une autre de M. Fontené : *Sur une configuration remarquable dans l'espace*, et qui figure dans ce même Bulletin (t. XXXIV, p. 2), dont l'auteur a bien voulu me communiquer le manuscrit.

La configuration dont il s'agit est désignée dans cette dernière Note sous le nom d'*octuplet gauche complet*. J'adopterai cette expression dans la suite du présent travail.

tangentiel, à trois paramètres, défini par les quatre quadriques réduites à deux points (a, a') , (b, b') , (c, c') , (d, d') (¹).

Je vais maintenant montrer que, réciproquement, tout système ainsi défini (Σ) est satisfaisant, c'est-à-dire qu'il contient une infinité de quadriques réduites à deux points; l'une quelconque de ces quadriques dégénérées est constituée par deux points conjugués sur C.

A cet effet, rappelons tout d'abord que, si a et b sont deux points fixes de C, m et m' deux points conjugués variables sur la même courbe, les plans (abm) et (abm') engendrent un faisceau en involution. [La démonstration de cette propriété connue est immédiate. Un plan (P) quelconque passant par ab rencontre C en deux points m et m_1 , dont les arguments (m) et (m_1) satisfont à la relation

$$(m) + (m_1) + (a) + (b) = 0.$$

Leurs conjugués m' et m'_1 sont donc tels que l'on ait aussi

$$(m') + (m'_1) + (a) + (b) = 0.$$

Donc, au plan (abm) ne correspond qu'un plan (abm') , ce qui suffit à établir la proposition.]

Cela posé, considérons sur C cinq couples de points conjugués (a, a') , (b, b') , (c, c') , (d, d') , (e, e') .

Soit Q la quadrique unique du faisceau tangentiel défini par les quadriques réduites à deux points (d, d') et (e, e') , qui touche le plan (abc) . Les deux plans tangents menés à Q par ab sont conjugués dans l'involution définie par les deux couples de plans (abd) , (abd') et (abe) , (abe') . Mais, l'un de ces plans tangents étant le plan (abc) , l'autre est nécessairement (abc') , en vertu de la propriété rappelée un peu plus haut.

De même, (Q) étant tangente au plan (abc') est tangente au plan $(ab'c')$. En continuant ainsi de proche en proche, on voit que (Q) est inscrite à l'octaèdre $(abca'b'c')$.

(¹) C, dans cet énoncé, est supposée indécomposable et sans point double. Il existe des cas de dégénérescence d'un certain intérêt : par exemple, C peut se réduire à une cubique gauche et une corde de cette cubique.

Désignons alors par

$$A = 0, \quad \dots, \quad E' = 0$$

les équations tangentielles des points $a, \dots, e'$, comme je l'ai fait précédemment. Soit aussi

$$Q = 0,$$

l'équation tangentielle de (Q) .

Puisque (Q) appartient au faisceau tangentiel défini par (d, d') , (e, e') , on a une identité de la forme

$$(3) \quad Q = \delta DD' + \varepsilon EE',$$

δ et ε étant des nombres. Puisque (Q) est inscrite à l'octaèdre $(abca'b'c')$, on a

$$(4) \quad Q = \alpha AA' + \beta BB' + \gamma CC',$$

α, β, γ étant d'autres nombres. En éliminant Q entre (3) et (4) il vient

$$\varepsilon EE' = \alpha AA' + \beta BB' + \gamma CC' - \delta DD',$$

ce qui montre bien que le couple (e, e') constitue une quadrique du système tangentiel (Σ) défini par les couples (a, a') , (b, b') , (c, c') , (d, d') . *La proposition que j'avais en vue est donc démontrée*, puisque les cinq couples de points conjugués considérés sont absolument quelconques.

6. Le système (Σ) contient ∞^3 quadriques et ∞^2 coniques. Pour les définir d'une façon aussi simple que possible, je ferai d'abord la remarque suivante :

Considérons l'identité

$$EE' = \alpha AA' + \beta BB' + \gamma CC' + \delta DD',$$

à laquelle donnent lieu les cinq couples de points conjugués (a, a') , (b, b') , (c, c') , (d, d') , (e, e') .

Si, les quatre premiers couples restant fixes, le cinquième varie, les rapports des coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, pris à deux à deux, ne peuvent être constants.

Supposons, en effet, qu'un autre couple *quelconque* (f, f')

donne lieu à l'identité

$$FF' = K\alpha AA' + K\beta BB' + \gamma' CC' + \delta' DD';$$

on tirera des deux identités précédentes

$$KEE' - FF' = (\gamma - \gamma') CC' + (\delta - \delta') DD',$$

ce qui exigerait que les points f et f' soient les deux points par où vont passer respectivement les deux groupes de faces associées de l'octaèdre ($cdec'd'e'$). Or cela contredit le fait que (f, f') est un couple quelconque.

On en conclut que, si (e, e') varie, tous les rapports tels que $\frac{\alpha}{\beta}$ prennent au moins une fois toutes les valeurs possibles.

Cela posé, soit U une quadrique quelconque de (Σ) . On a

$$U = \alpha AA' + \beta BB' + \gamma CC' + \delta DD',$$

Il résulte de la remarque précédente que je puis trouver un couple (e, e') tel que l'on ait

$$EE' = \alpha AA' + \beta BB' + \gamma' CC' + \delta' DD'.$$

On peut donc écrire

$$U = EE' + (\gamma - \gamma') CC' + (\delta - \delta') DD'.$$

Autrement dit, U est inscrite à l'octaèdre ($dced'c'e'$).

Donc :

Les diverses quadriques du système (Σ) sont les quadriques inscrites dans les divers octaèdres qui ont leurs sommets opposés conjugués sur C .

Mais ces divers octaèdres sont en nombre ∞^3 , et chacun d'eux est circonscrit à ∞^3 quadriques. Comme il n'y a que ∞^3 quadriques dans (Σ) , il faut en conclure que chacune de ces quadriques est inscrite à ∞^3 octaèdres définis comme on vient de le dire. Ainsi :

On peut inscrire à C une double infinité d'octaèdres circonscrits à une quadrique quelconque de (Σ) .

On peut interpréter autrement ce résultat. Soit $(abca'b'c')$ l'un de ces octaèdres; les quatre faces associées (abc) , $(ab'c')$,

$(a'bc')$, $(a'b'c)$ vont concourir en un même point d de C , et le tétraèdre $a'b'c'd$ est inscrit à C et circonscrit à la quadrique considérée. Par conséquent :

On peut inscrire à C une double infinité de tétraèdres circonscrits à une quadrique quelconque de (Σ) (').

Or, M. Humbert a déterminé (*loc. cit.*) les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'on puisse inscrire à une biquadratique gauche ∞^2 tétraèdres circonscrits à une quadrique. En tirant parti de son résultat, on voit que :

Les huit points où C coupe une quadrique quelconque de (Σ) sont les sommets de deux quadrilatères de génératrices tracés sur cette quadrique.

On peut d'ailleurs retrouver ce résultat de la manière suivante : soient (a, a') , (b, b') deux couples variables de points conjugués sur C . Les quadriques représentées par l'équation tangentielle

$$(5) \quad AA' + \lambda BB' = 0,$$

où λ est un paramètre variable, sont en nombre ∞^1 et appartiennent au système (Σ) : elles se confondent donc avec l'ensemble des quadriques de ce système.

Ce raisonnement ne tomberait en défaut que si toute quadrique du système (Σ) pouvait être représentée par une infinité d'équations de la forme précédente. S'il en était ainsi, on trouverait (d'une infinité de manières) de nouveaux couples (a_1, a'_1) , (b_1, b'_1) , (a_2, a'_2) , (b_2, b'_2) donnant lieu aux identités

$$AA' + \lambda BB' = A_1 A'_1 + \lambda_1 B_1 B'_1 = A_2 A'_2 + \lambda_2 B_2 B'_2.$$

Cela exige que les couples (a, a') , (b, b') , (a_1, a'_1) , (b_1, b'_1) soient les sommets d'un octuplet gauche complet. Il en sera de même pour les couples (a_1, a'_1) , (b_1, b'_1) , (a_2, a'_2) , (b_2, b'_2) et (a_2, a'_2) , (b_2, b'_2) , (a, a') , (b, b') .

On aurait donc les relations suivantes entre arguments elliptiques

(') On peut donner une troisième interprétation de ce même résultat, en faisant intervenir des octaèdres tétraédriques de genre un. Je renvoie pour cela à la Note citée de M. Fontené.

liques :

$$(a) + (b) + (a_1) + (b_1) = 0.$$

$$(a_1) + (b_1) + (a_2) + (b_2) = 0,$$

$$(a_2) + (b_2) + (a) + (b) = 0.$$

D'où l'on tire aisément

$$(a) + (b) = \text{demi-période},$$

ce qui contredit le fait que les couples (a, a') et (b, b') varient *indépendamment*.

Cela posé, la quadrique représentée par l'équation (5) contient le quadrilatère $ab a' b'$. Cela est bien d'accord avec le théorème de M. Humbert.

7. Proposons-nous maintenant de trouver les ∞^3 coniques du système (Σ) .

Elles sont représentées, comme toutes les quadriques du système (Σ) , par des équations de la forme

$$AA' + \lambda BB'.$$

Or une telle équation représente une quadrique qui contient les côtés du quadrilatère $ab a' b'$, et qui ne peut se réduire à une conique que si le quadrilatère est plan. Réciproquement, si cette dernière condition est réalisée, l'équation représente bien une conique inscrite dans le quadrilatère $ab a' b'$.

Les coniques du système (Σ) sont donc les coniques inscrites dans les quadrilatères plans ayant leurs sommets opposés conjugués sur (Σ) . Un tel quadrilatère donne lieu à la relation

$$(a) + (a') + (b) + (b') = 0$$

ou $(a) + (b) = \text{demi-période}$. Autrement dit, la droite ab est une génératrice de l'un des quatre cônes contenant C.

Ces quatre cônes correspondent respectivement aux demi-périodes $0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$.

En désignant leurs sommets respectifs par S_0, S_1, S_2, S_3 , on parvient aisément au résultat suivant :

Tout plan passant par la droite $S_0 S_1$ rencontre C en quatre points qui forment deux couples de points conjugués

(a, a') et (b, b') . Une première série de coniques du système (Σ) est constituée par les diverses coniques inscrites dans les quadrilatères tels que $aba'b'$.

On obtient une seconde série de coniques du système (Σ) en remplaçant dans l'énoncé précédent la droite S_0S_1 par la droite S_2S_3 .

On a ainsi toutes les coniques du système (Σ) . On voit que les plans de ces coniques passent par l'une ou l'autre de deux droites fixes.

8. Il est à remarquer que l'étude précédente fait connaître l'extension à l'espace de propriétés bien connues des réseaux tangentiels de coniques, dans le plan.

On sait qu'un tel réseau contient ∞^1 coniques qui se réduisent à deux points, dont le lieu est une courbe du troisième ordre, la *cayleyenne* du réseau. Les deux points qui constituent une conique dégénérée sont conjugués sur la *cayleyenne*.

Des faits analogues ne peuvent se présenter relativement à un système tangentiel à trois paramètres de quadriques, que dans le cas des systèmes (Σ) dont j'ai montré l'existence. On peut dire que la biquadratique C est la *cayleyenne* du système (Σ) .

9. Il y a lieu de signaler une particularisation métrique du système (Σ) , que l'on obtient en supposant qu'une des coniques de ce système se réduit à l'ombilicale. On voit alors aisément que C est la courbe commune à deux cylindres de révolution. Cette courbe possède un axe de symétrie, et deux points conjugués sont symétriques par rapport à cet axe.

Pour ne pas allonger outre mesure cette Note je me contenterai d'énoncer les résultats que l'on obtient dans ce cas remarquable.

Soit $(abca'b'c')$ un octaèdre, tel que ses sommets opposés soient symétriques par rapport à une droite D . Il existe une infinité de quadriques de révolution inscrites dans cet octaèdre ⁽¹⁾. Leurs foyers ont pour lieu une biquadratique C

⁽¹⁾ On peut démontrer que l'on définit ainsi le réseau tangentiel le plus général, à part certains cas de dégénérescence, contenant une infinité de quadriques de révolution.

qui contient les sommets de l'octaèdre, et qui admet D pour axe de symétrie. Les deux foyers d'une quadrique de révolution inscrite dans l'octaèdre sont symétriques par rapport à D.

Les quadriques inscrites dans l'octaèdre sont en nombre doublement infini. L'ensemble des quadriques qui leur sont homofocales constitue un système linéaire tangentiel, à trois paramètres, (Σ) , qui contient une infinité de quadriques réduites à deux points : deux tels points sont sur C et symétriques par rapport à D.

Les diverses coniques du système (Σ) sont les focales des quadriques inscrites à l'octaèdre.

Le système (Σ) , particularisé métriquement comme je viens de le dire, se rattache à certains systèmes articulés. C'est ce que je ferai voir dans un prochain travail.

10. Les résultats de cette Note peuvent s'étendre à l'espace à n dimensions. En répétant, *mutatis mutandis*, le raisonnement du n° 5, le lecteur établira sans peine le théorème suivant, que j'énonce, en me bornant pour plus de simplicité au cas de l'espace à quatre dimensions; l'extension au cas général se fait d'elle-même.

Considérons la courbe C de genre un et d'ordre cinq, représentée, dans l'espace à quatre dimensions, par les équations

$$\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{p'u} = \frac{x_3}{p'u} = \frac{x_4}{p'u} = \frac{x_5}{p'u},$$

où p est la fonction de Weierstrass, de périodes $2\omega_1$ et $2\omega_2$. Deux points m et m' de cette courbe seront dits conjugués quand leurs arguments elliptiques diffèrent de la demi-période ω_1 .

Cinq couples de points conjugués, sur la courbe C, déterminent un système linéaire, tangentiel, à trois paramètres, (Σ) , de quadriques ⁽¹⁾; le système Σ contient une infinité de quadriques réduites à deux points; les deux points constituant une telle quadrique dégénérée sont conjugués sur C.

⁽¹⁾ Il est bien clair que j'entends ici par *quadrique* la variété représentée par l'équation homogène du second degré $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 0$.

On peut encore dire, en employant le langage analytique :

Considérons les six polynômes homogènes, du second degré, à cinq variables y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 ,

$$P_i = (y_1 + p u_i y_2 + p' u_i y_3 + p'' u_i y_4 + p''' u_i y_5) \\ \times [y_1 + p(u_i + \omega_1) y_2 + p'(u_i + \omega_1) y_3 + p''(u_i + \omega_1) y_4 + p'''(u_i + \omega_1) y_5] \\ (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6),$$

où les arguments u_i sont des constantes quelconques : il existe entre ces six polynômes une relation linéaire et homogène.

PROPRIÉTÉS D'UNE FONCTION HOLOMORPHE DANS UN CERCLE OÙ ELLE NE PREND PAS LES VALEURS ZÉRO ET UN ⁽¹⁾;

Par M. PIERRE BOUTROUX.

1. M. Landau a démontré le théorème suivant ⁽²⁾ qui se présente comme une généralisation du théorème de M. Picard sur les fonctions entières :

Soit une fonction entière

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

et soit $a_0 \neq 0$, $a_0 \neq 1$, $a_1 \neq 0$. Il existe un nombre R indépendant des coefficients $a_2, a_3, \dots$, c'est-à-dire fonction de a_0 et de a_1 seulement, tel que $F(x)$ prenne sûrement l'une des valeurs 0 ou 1 dans le cercle de rayon R ayant son centre à l'origine.

⁽¹⁾ Les résultats que je vais exposer ont été résumés dans une Note présentée à l'Académie des Sciences le 31 juillet 1905. A cette époque j'ignorais absolument l'existence du Mémoire très important que M. le Professeur Schottky avait publié quelques mois plus tôt sur le théorème de M. Picard (*Sitzungsberichte d. k. preussischen Ak. d. W.*, 27 octobre 1904), Mémoire qui contenait une série d'énoncés semblables à celui que j'ai obtenu. M. Landau vient d'être assez obligeant pour me signaler cette inadvertance. Je me décide néanmoins à publier ce travail tel qu'il est, quitte à revenir ultérieurement sur la même question en m'inspirant des beaux résultats de M. Schottky. J'ajoute qu'une démonstration, extrêmement élégante et précise du principal théorème exposé ci-dessous a été récemment obtenue par M. C. Carathéodory (voir *Comptes rendus*, 26 décembre 1905.)

⁽²⁾ LANDAU, *Ueber eine Verallgemeinerung des Picardschen Satzes* (*Sitzungsberichte d. k. preussischen Ak. d. W.*, juillet 1904).

J'ai été conduit depuis lors à quelques résultats d'un caractère analogue que je vais brièvement exposer.

Ces résultats se résument comme il suit :

Considérons la fonction $F(x)$ dans un cercle C , ayant son centre à l'origine, où elle est holomorphe et dans lequel elle est supposée ne pas prendre les valeurs 0 et 1. Soit M le module maximum que prend $F(x)$ dans un cercle concentrique à C et de rayon λR , ($\lambda < 1$), par exemple dans un cercle C' de rayon $\frac{3R}{4}$.

LE MODULE MAXIMUM M EST INFÉRIEUR A UN NOMBRE FIXE $\mathfrak{A}$ QUI NE DÉPEND QUE DU COEFFICIENT a_0 .

2. Soit la fonction

$$(1) \quad F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

holomorphe dans un cercle C de rayon R , ayant son centre à l'origine, et ne prenant dans ce cercle ni la valeur 0, ni la valeur 1. Dans le cercle C , $\log F(x)$ est une fonction holomorphe qui ne prend pas les valeurs 0, $2i\pi$, $4i\pi$, ... De même $\log \frac{\log F(x)}{2i\pi} = F_1(x)$ est une fonction holomorphe qui ne prend dans C aucune des valeurs suivantes :

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{lllll} \dots, & k_{0,-1} = -2i\pi, & k_{0,0} = 0, & k_{0,2} = 2i\pi, & \dots, \\ \dots, & k_{2,-1} = \log 2 - 2i\pi, & k_{2,0} = \log 2, & k_{2,2} = \log 2 + 2i\pi, & \dots, \\ \dots, & k_{3,-1} = \log 3 - 2i\pi, & k_{3,0} = \log 3, & k_{3,2} = \log 3 + 2i\pi, & \dots, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right.$$

De $F_1(x)$ on pourrait passer à la fonction $\log \frac{\log F_1(x)}{2i\pi}$ et ainsi de suite. Je m'arrêterai pour l'instant à la fonction $F_1(x)$ que j'étudierai en place de $F(x)$.

3. LEMME I. — Soit une fonction entière

$$\varphi(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Posons

$$|x| = r, \quad \mathfrak{N}(r) = 1 + |a_1| r + |a_2| r^2 + \dots$$

et appelons $A(r)$ la plus grande valeur positive de la partie réelle de $\varphi(x)$ pour $|x| = r$, $A(r)$ étant assujetti à être, par exemple, supérieur ⁽¹⁾ à 10. QUEL QUE SOIT r , ON A

$$(2) \quad \Re(\theta r) < 10 A(r) \log A(r) \quad \text{pour} \quad \theta \leq 1 - \frac{1}{\log A(r)}.$$

La démonstration de ce lemme résulte d'une remarque due à M. Borel ⁽²⁾. Soit $x = re^{i\omega}$ et soit $P(r, \omega)$ la partie réelle de $\varphi(x)$. On vérifie que

$$\pi r^m |a_m| + 2\pi < \int_0^{2\pi} (|P| + P) d\omega < 4\pi A(r),$$

et, par suite, que

$$\Re(\theta r) < 1 + [4A(r) + 2] \frac{\theta}{1-\theta} < [4A(r) + 3] \log A(r).$$

On en déduit l'inégalité (2). Nous pouvons ajouter que *l'inégalité subsiste si $\varphi(0)$ au lieu d'être égal à 1 est assujetti seulement à avoir un module inférieur à 4 π .*

4. LEMME II. — *Supposons que pour $|x| < R$ le module de $\varphi(x)$ reste inférieur à un nombre donné $\mathfrak{A}$. Dans ces conditions, je dis que L'ON A POUR*

$$|x| < \lambda R \left(1 - \frac{1}{\log \mathfrak{A}}\right), \quad \lambda < 1,$$

L'INÉGALITÉ

$$(3) \quad |a_m x^m| + |a_{m+1} x^{m+1}| + \dots < \lambda^{\frac{m}{2}} \mathfrak{A},$$

POURVU QUE m DÉPASSE UNE CERTAINE VALEUR CHOISIE DE TELLE MANIÈRE QUE

$$(4) \quad \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{m}{2}} > 10 \log \mathfrak{A}.$$

En effet, supposons que l'inégalité (3) ne soit pas vérifiée. Alors

⁽¹⁾ Je n'ai point cherché à donner aux constantes numériques leur valeur minimum. Elles ne figurent ici que pour fixer les idées.

⁽²⁾ Voir BOREL, *Sur les zéros des fonctions entières* (Acta math., t. XX). M. Landau a fait usage d'un lemme voisin.

on aura pour $R' = R \left(1 - \frac{1}{\log \epsilon_0}\right)$ l'inégalité

$$|\alpha_m| R'^m + |\alpha_{m+1}| R'^{m+1} + \dots > \frac{1}{\lambda^2} \epsilon_0,$$

et l'on en conclura, d'après le lemme I et l'inégalité (4), que l'on a en certains points du cercle de rayon R

$$|\varphi(x)| > \epsilon_0,$$

ce qui est contraire à nos hypothèses.

5. LEMME III. — Soit $f(x)$ une fonction holomorphe dans un cercle C de rayon R, et soit $M(r)$ le module maximum de cette fonction pour $|x| \leq r$. Je suppose (1) que l'on ait par exemple (1)

$$1 < R < 2, \quad M\left(\frac{3R}{4}\right) > 10;$$

ON AURA, POUR UNE INFINITÉ DE VALEURS r_0 DE r , COMPRISES ENTRE $\frac{3R}{4}$ ET $\frac{7R}{8}$, L'INÉGALITÉ

$$M(r) < M^2(r_0) \quad \text{POUR} \quad r < r_0 + \frac{r_0}{\sqrt{M(r_0)}}.$$

On voit en effet immédiatement que, s'il n'en était pas ainsi, la fonction $f(x)$ deviendrait infinie dans le cercle C.

D'ailleurs il existera pour $|x| \leq r_0$ des points $\bar{x}$ où l'on aura

$$|f'(\bar{x})| \geq \frac{M(r_0) - |f(0)|}{|\bar{x}|}.$$

En ces points $\bar{x}$ on aura donc simultanément :

$$(5) \quad \begin{cases} |f'(\bar{x})| \geq \frac{M(r_0) - |f(0)|}{|\bar{x}|} \\ M(|x|) < M^2(r_0) \quad \text{pour} \quad |x - \bar{x}| \leq \frac{r_0}{\sqrt{M(r_0)}} \end{cases}$$

(1) Les nombres $\frac{3}{4}, \frac{7}{8}$ peuvent naturellement être remplacés par des nombres quelconques inférieurs à 1.

avec

$$\frac{3R}{4} < r_0 < \frac{7R}{8}, \quad M(r_0) \geq M\left(\frac{3R}{4}\right).$$

6. Revenons maintenant à la fonction $F_1(x)$ du n° 2, et appelons $M_1(r)$ son module maximum dans le cercle C de rayon R . Je vais montrer que $M\left(\frac{3R}{4}\right)$ est inférieur à un nombre fixe qui ne dépend que de a_0 , c'est-à-dire de $F_1(0)$. (On obtiendrait le même résultat si l'on remplaçait le coefficient numérique $\frac{3}{4}$ par un nombre quelconque inférieur à 1.)

L'unité de longueur restant arbitraire, nous avons le droit de supposer [après avoir fait au besoin un changement de variable de la forme $x' = \lambda x$, lequel n'affecte pas $F_1(0)$] que

$$1 < R < 2.$$

Nous admettrons, d'autre part, que

$$M_1\left(\frac{3R}{4}\right) > 2 |F_1(0)|,$$

et nous chercherons à étudier $F_1(x)$ dans ces conditions.

Soit $\overline{x_0}$ un point de C où l'on ait les inégalités (5) du lemme III. $F_1(x)$ est holomorphe dans un cercle Γ , de centre $\overline{x_0}$ et de rayon supérieur à

$$\rho_1 = \frac{r_0}{\sqrt{M_1(r_0)}}, \quad \frac{3R}{4} < r_0 < \frac{7R}{8}.$$

On a, dans ce cercle,

$$F_1(x) = b_0 + b_1(x - \overline{x_0}) + \dots$$

avec

$$(6) \quad |b_1| > \frac{M_1(r_0) - |F_1(0)|}{|x_0|}.$$

Considérons dans le cercle Γ , la fonction

$$G_1(x) = F_1(x) + \bar{k} = b + b_1(x - \overline{x_0}) + \dots,$$

la constante $\bar{k}$ étant l'un des éléments du Tableau I (n° 1) que l'on choisira de telle manière que

$$2\pi < |b| < 4\pi.$$

Par hypothèse $G_1(x)$ ne s'annule pas dans le cercle Γ_1 et n'y prend pas un ensemble de valeurs $k'_{i,j}$ qui (comme les éléments du Tableau I) sont deux à deux à une distance au plus égale à 2π . D'autre part, le module maximum de $G_1(x)$ pour $|x - \bar{x}_0| \leq \rho_1$ est, d'après le lemme III, inférieur ou égal à $M_1^2(r_0)$. Nous le désignerons par μ_1 , et le supposerons plus grand que 10.

7. Considérons maintenant la fonction

$$G_2(x) = \log \frac{G_1(x)}{2i\pi} + \bar{K} = c + \frac{b_1}{b}(x - \bar{x}_0) + \dots = c + c_1(x - \bar{x}_0) + \dots,$$

la constante $\bar{K}'$ étant encore choisie de telle sorte que $2\pi < |c| < 4\pi$. Comme on a

$$c = \log \frac{b}{2i\pi} + \bar{K}', \quad 2\pi < |b| < 4\pi,$$

on aura ⁽¹⁾ évidemment

$$|\bar{K}'| \leq 2\pi.$$

La fonction $G_2(x)$ est holomorphe dans le cercle Γ_1 , ne s'y annule pas et n'y prend pas un ensemble de valeurs $k''_{i,j}$ dont la distance deux à deux est au plus égale à 2π . D'autre part, dans le cercle Γ_1 , la plus grande valeur positive de la partie réelle de G_2 est comprise entre $\log \left(\frac{\mu_1}{2\pi} - 2\pi \right)$ et $\log \left(\frac{\mu_1}{2\pi} + 2\pi \right)$; elle est *a fortiori* inférieure à $\log \mu_1$ (puisque nous supposons $\mu_1 > 10$). Il en résulte, d'après le lemme I, que, dans un cercle Γ_2 concentrique à Γ_1 et de rayon

$$\rho_2 = \theta_1 \rho_1, \quad \theta_1 = 1 - \frac{1}{\log \log \mu_1},$$

la somme des modules des termes de G_2

$$\Re_2(|x|) = |c| + |c_1(x - \bar{x}_0)| + |c_2(x - \bar{x}_0)^2| + \dots$$

est inférieure ⁽²⁾ à $10 \log \mu_1 \log \log \mu_1$.

⁽¹⁾ Nous supposerons toujours que l'on considère la plus petite détermination du logarithme.

⁽²⁾ De la fonction $G_2(x)$ on passerait par le même procédé à une fonction $G_3(x)$, et ainsi de suite. La fonction $G_i(x)$ aurait un module maximum μ_i comparable à $\log \mu_{i-1}$, et la somme des modules de ses termes serait inférieure à $10 \log \mu_{i-1} \log \log \mu_{i-1}$ dans un cercle Γ_i de rayon

$$\rho_i = \theta_1 \theta_2 \dots \theta_{i-1} \rho_1, \quad \theta_j = 1 - \frac{1}{\log \log \mu_j}.$$

Cela posé, il va nous être facile de montrer que l'on aboutirait à une contradiction si l'on supposait que μ_1 satisfasse à l'inégalité

$$(7) \quad \mu_1 > \mathfrak{A},$$

où $\mathfrak{A}$ est un nombre fixe [fonction de $F_1(0)$] que nous allons déterminer.

8. Nous supposons que l'on ait déterminé le nombre positif $\mathfrak{A}$ de manière à satisfaire aux conditions suivantes :

1° L'inégalité (7) entraîne

$$\left(1 - \frac{1}{\log \log \mu_1}\right) > \frac{7}{8}.$$

2° Si l'on a l'inégalité (7), on a, *a fortiori*,

$$M_1(r_0) > \sqrt{\mathfrak{A}}.$$

Nous supposons que $\mathfrak{A}$ soit assez grand pour que l'on ait

$$(8) \quad \frac{7\sqrt{M_1(r_0)}}{16 \times 4\pi} > \frac{7\mu_1^{\frac{1}{2}}}{16 \times 4\pi} > 20 \log \mu_1 \log \log \mu_1.$$

3° Enfin, nous assujettirons $\mathfrak{A}$ à être supérieur à 10 et à satisfaire à la condition

$$(9) \quad \sqrt{\mathfrak{A}} > 2 |F_1(0)|.$$

9. Cela posé, considérons la fonction $G_2(x)$. Nous savons que, dans un cercle Γ_2 de centre $\overline{x_0}$ et de rayon supérieur à $\frac{7}{8} \rho_1$, la somme $\mathfrak{N}_2(|x|)$ des modules des termes de cette fonction est inférieure à $10 \log \mu_1 \log \log \mu_1$. Je vais montrer que *nous serions en présence d'une contradiction si nous admettions que μ_1 est supérieur au nombre positif $\mathfrak{A}$ déterminé au n° 8.*

En effet, nous avons vu que $G_2(x)$ se développe, à l'intérieur de Γ_2 , sous la forme

$$c + a_1(x - \overline{x_0}) + \dots,$$

$|c_1|$ étant supérieur à $\frac{|b_1|}{4\pi}$, c'est-à-dire, d'après (6) et (9), à

$$\frac{\overline{M_1}}{2|\overline{x_0}|4\pi} \quad [\overline{M_1} = M_1(r_0)].$$

On en conclura que l'on a, pour les points x' de Γ_2 voisins du contour de ce cercle,

$$\Re_2(|x'|) > \frac{7\rho_1}{8} \frac{\overline{M_1}}{2|\overline{x_0}|4\pi}.$$

Or, on a

$$\rho_1 = \frac{r_0}{\sqrt{M_1(r_0)}} > |\overline{x_0}| \overline{M_1}^{-\frac{1}{2}}.$$

On aura, dès lors, en vertu de l'inégalité (8) :

$$\Re_2(|x'|) > \frac{7\sqrt{\overline{M_1}}}{16 \times 4\pi} > 20 \log \mu_1 \log \log \mu_1.$$

Or, par hypothèse, $\Re_2$ reste inférieur à $10 \log \mu_1 \log \log \mu_1$ dans le cercle Γ_2 ; donc l'inégalité (7) conduit à une contradiction.

C. Q. F. D.

10. Ainsi se trouve démontré le théorème que j'ai annoncé. Résumons, en effet, pour plus de clarté, les résultats acquis aux nos 6-9. Nous avons considéré la fonction $F_1(x)$ dans un cercle C de rayon R dans lequel, par hypothèse, elle ne prend aucune des valeurs k_{ij} du Tableau I, et nous avons appelé $M_1(r)$ le module maximum (pour $|x| = r$) de $F_1(x)$ dans ce cercle. Nous avons ensuite supposé que l'on ait l'inégalité (7), laquelle résulte par *a fortiori* de l'inégalité

$$(10) \quad M_1\left(\frac{3R}{4}\right) > \mathfrak{A}^2,$$

où $\mathfrak{A}$ est un nombre fixe qui ne dépend que de $F_1(0)$, et cette hypothèse nous a conduits à une contradiction. Nous en concluons que l'inégalité (10) ne saurait avoir lieu.

Revenant maintenant à la fonction $F(x)$ qui ne prend dans C ni la valeur 0, ni la valeur 1, et appelant $M(r)$ son module maxi-

mum pour $|x| \leq r$, nous pouvons affirmer que l'on a

$$M\left(\frac{3R}{4}\right) < \mathfrak{A}_1,$$

$\mathfrak{A}_1$ étant un nombre qui ne dépend que de $F(0)$, c'est-à-dire du coefficient a_0 .

11. De cette proposition on déduit immédiatement le théorème de M. Landau. Considérons en effet la fonction

$$(1) \quad F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots,$$

les deux premiers coefficients étant fixes et les coefficients suivants variables. D'après le lemme I, si R' est un nombre positif quelconque, on aura en certains points de la circonférence de rayon $R' \left(1 + \frac{1}{\log M(R')}\right)$:

$$10 |F(x)| \log |F(x)| > |a_0| + |a_1| R'.$$

On peut donc évidemment déterminer un nombre R , fonction des seuls coefficients a_0 et a_1 , tel que le module $M\left(\frac{3R}{4}\right)$ soit supérieur à $\mathfrak{A}_1$, par suite tel que $F(x)$ prenne sûrement l'une des valeurs 0 ou 1 dans le cercle de rayon R .

Nous sommes d'ailleurs en mesure de varier l'énoncé du théorème en prenant pour coefficients fixes, outre a_0 , un ou plusieurs coefficients de (1) autres que a_1 . Quels que soient les invariants choisis, il existera toujours un cercle ne dépendant que de ces invariants dans lequel $F(x)$ prendra sûrement l'une des valeurs 0, 1.

12. Une autre conséquence du résultat que nous avons établi sera la suivante, relative à la convergence du développement de $F(x)$ dans le cercle C .

D'après le lemme II, si λ est un nombre inférieur à 1, on peut déterminer un entier m tel que l'on ait pour

$$|x| < \frac{3\lambda}{4} R \left(1 - \frac{1}{\log \mathfrak{A}_1}\right)$$

l'inégalité

$$(12) \quad |a_{m+1}x^{m+1}| + |a_{m+2}x^{m+2}| + \dots < \varepsilon \mathfrak{A}_1,$$

ε étant un nombre arbitrairement petit assigné à l'avance. D'ailleurs, ici comme plus haut, on peut remplacer le coefficient numérique $\frac{3}{4}$ par un nombre quelconque inférieur à 1.

En d'autres termes, soit un cercle C de rayon R dans lequel la fonction holomorphe $F(x)$ ne prend pas les valeurs 0 et 1, et soit C' un cercle concentrique à C ayant pour rayon

$$\lambda' R \left(1 - \frac{1}{\log \mathfrak{A}_1}\right) \quad (\lambda' < 1, \mathfrak{A}_1 \text{ fonction de } a_0 \text{ exclusivement}).$$

Il existe un entier m , dépendant exclusivement du coefficient a_0 , tel que l'on ait dans le cercle C' l'inégalité (12). — Quels que soient les coefficients $a_1, a_2, \dots$ la partie principale de la valeur de $F(x)$ en un point quelconque de C' est déterminée par un nombre de termes du développement (1) qui est au plus égal à m , m étant fonction de a_0 seulement.

13. J'observe, en terminant, que le mode de démonstration employé plus haut conduit à une généralisation du théorème qui fait l'objet de cette Note.

Imaginons que, dans un cercle C , une fonction holomorphe $F(x)$ ne prenne qu'un nombre fini p de fois les valeurs 0 et 1. On pourra déterminer à l'intérieur de C un cercle Γ de centre $\overline{x}_0$, où $F(x)$ ne prendra aucune des valeurs du Tableau I et où l'on aura l'inégalité (6) : la limite inférieure du rayon de Γ sera d'ailleurs d'autant plus grande que p sera plus petit. On en conclura que $M \left(\frac{3R}{4}\right)$ est nécessairement inférieur à un certain nombre $\mathfrak{A}_p$, fonction de a_0 et de p exclusivement.

SUR L'HERPOLHODIE;

PAR M. L. LECORNU.

L'absence de points d'inflexion dans l'herpolhodie s'établit aisément de la manière suivante :

Soient A, B, C les moments d'inertie principaux du solide relativement à son point fixe O ($A > B > C$); h , la constante des forces vives; k , l'axe résultant des moments des quantités de mouvement. L'équation, par rapport aux directions principales, du cône décrit par l'axe instantané est

$$A(k^2 - Ah)x^2 + B(k^2 - Bh)y^2 + C(k^2 - Ch)z^2 = 0.$$

Le vecteur OE ayant pour composantes

$$\lambda = A(k^2 - Ah)p, \quad \mu = B(k^2 - Bh)q, \quad \nu = C(k^2 - Ch)r$$

est normal au cône, pour la génératrice $\frac{x}{p}, \frac{y}{q}, \frac{z}{r}$ coïncidant avec l'axe instantané. Cherchons la vitesse absolue de l'extrémité E de ce vecteur. La vitesse relative aux axes mobiles a pour projection sur Ox

$$A(k^2 - Ah)\frac{dp}{dt} = (k^2 - Ah)(B - C)qr.$$

La vitesse d'entraînement a pour projection sur la même direction

$$qv - r\mu = [C(k^2 - Ch) - B(k^2 - Bh)]qr.$$

La vitesse absolue a pour projection la somme des deux précédentes, c'est-à-dire

$$(B - C)(B + C - A)hqr.$$

Le vecteur OE est également normal au cône de sommet O contenant l'herpolhodie. Si celle-ci présentait une inflexion, la direction de OE serait momentanément stationnaire et, par suite, la vitesse absolue de E aurait la direction de OE; d'où les rela-

tions :

$$\frac{Ap^2(k^2 - Ah)}{(B - C)(B + C - A)} = \frac{Bq^2(k^2 - Bh)}{(C - A)(C + A - B)} = \frac{Cr^2(k^2 - Ch)}{(A - B)(A + B - C)}.$$

Or on sait que $B + C - A$, $A + B - C$, $k^2 - Ch$ sont positifs, tandis que $k^2 - Ah$ est négatif. On arrive donc à une impossibilité, qui démontre la proposition.

L'absence de rebroussements s'établit plus facilement encore. Pour qu'il y ait rebroussement il faut que la vitesse angulaire de OE soit infinie : car, en excluant le cas particulier où la rotation s'effectue autour d'un axe principal et où l'herpolhodie se réduit, comme l'on sait, à un point, le chemin élémentaire parcouru par le pôle sur cette courbe est toujours du même ordre que dt . Comme la vitesse de E est finie, il faut que OE soit nul; d'où

$$(k^2 - Ah)p = 0, \quad (k^2 - Bh)q = 0, \quad (k^2 - Ch)r = 0.$$

Deux au moins des binômes $k^2 - Ah$, $k^2 - Bh$, $k^2 - Ch$ étant différents de zéro, il faut que deux des composantes p , q , r de la rotation soient nulles, c'est-à-dire que, contrairement à l'hypothèse, la rotation s'effectue autour de l'une des directions principales. La conclusion est que, pour une herpolhodie non réduite à un point, il ne peut y avoir de rebroussements.

NOTE AU SUJET DU VALET DE MENUISIER;

Par M. le Comte DE SPARRE.

M. Painlevé avait signalé un certain nombre de problèmes où les lois du frottement de glissement semblent à première vue conduire à une impossibilité ou à une indétermination.

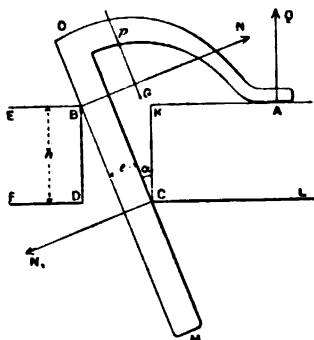
Toutefois, M. Lecornu a montré dans deux communications des 6 et 27 mars 1905, à l'Académie des Sciences, que cette impossibilité disparaît si l'on admet que, lorsque deux corps en mouvement sont mis en contact, le coefficient de frottement

prend la valeur limite relative au mouvement, à moins qu'il n'existe une valeur plus petite de ce coefficient de frottement qui rende certaines des réactions infinies, auquel cas il se produit des percussions entraînant un arc-boutement dynamique, entièrement semblable aux arc-boutements statiques depuis longtemps connus.

J'ai eu également occasion de revenir sur cette question dans une communication du 31 juillet 1965 et de montrer que l'indétermination disparaît, aussi bien que l'impossibilité, si l'on tient compte du mouvement antérieur qui a produit les conditions initiales.

Je me propose dans cette petite Note de revenir, en quelques mots, sur la théorie d'un appareil bien connu, le valet de menuisier, qui présente ce phénomène remarquable de pouvoir présenter soit l'arcboutement statique seul, soit en même temps l'arcboutement statique et l'arcboutement dynamique; de plus, cet appareil se prêterait facilement à des expériences sur la question, si l'on jugeait utile d'en organiser.

Fig. 1.



Soient $EBKALCDF$ l'établi, MOA le valet et G son centre de gravité. Désignons de plus par :

l' son poids ;

***m* sa masse ;**

α l'inclinaison de la partie rectiligne sur la verticale:

et le diamètre de cette partie rectiligne :

Q la force verticale et dirigée de bas en haut, appliquée en A à la pince;

N et N_1 les composantes normales au valet des réactions qui s'exercent en B et C ;

α , δ , δ_1 et l les distances du centre de gravité du valet à sa partie rectiligne ainsi qu'à N , N_1 et Q ;

h l'épaisseur de l'établi;

f le coefficient de frottement.

Supposons d'abord que le valet puisse prendre un déplacement rectiligne parallèle à sa partie rectiligne dans le sens ascendant.

Si l'on considère un axe Gx parallèle à cette direction, on aura, pour les équations du mouvement,

$$(1) \quad \begin{cases} mx'' = Q \cos \alpha - (N + N_1)f - P \cos \alpha, \\ N + Q \sin \alpha - N_1 - P \sin \alpha = 0, \\ N\delta + N_1\delta_1 - Ql - Nf(\alpha + e) - N_1fa = 0; \end{cases}$$

d'ailleurs

$$(2) \quad \delta + \delta_1 = \frac{h}{\cos \alpha} + e \tan \alpha.$$

On tire des deux dernières équations (1) :

$$(3) \quad \begin{cases} N[\delta + \delta_1 - (2\alpha + e)f] = Ql - (Q - P)(\delta_1 - \alpha f) \sin \alpha, \\ N_1[\delta + \delta_1 - (2\alpha + e)f] = Ql + (Q - P)[\delta - (\alpha + e)f] \sin \alpha, \\ (N + N_1)[\delta + \delta_1 - (2\alpha + e)f] = 2Ql - (Q - P)(\delta_1 - \delta + ef) \sin \alpha. \end{cases}$$

De plus, pour que ces équations soient applicables, il faut que les valeurs de N et de N_1 soient positives, puisque les réactions en B et C ne peuvent s'exercer que dans un sens.

On doit supposer la force Q très considérable, par rapport au poids P du valet ⁽¹⁾. Nous supposons donc cette force assez grande pour que l'on puisse négliger P devant elle et, de plus, ainsi que cela a lieu en réalité, l'angle α assez petit pour que l'on puisse négliger les termes qui le contiennent en facteur, devant ceux qui en sont indépendants.

(1) On réalise cette condition dans la pratique en assujettissant le valet au moyen d'un coup de maillet appliqué sur sa tête.

Dans ces conditions les équations (1), (2) et (3) donnent

$$\begin{aligned} \delta + \delta_1 &= h, \\ (4) \quad N &= N_1 = \frac{Ql}{h - (2a + e)f}, \\ (5) \quad mx'' &= Q - \frac{2Qlf}{h - (2a + e)f} = Q \frac{h - (2l + 2a + e)f}{h - (2a + e)f}. \end{aligned}$$

Cherchons d'abord la condition d'arcboutement statique; pour cela, il faut que l'on puisse satisfaire à l'équation obtenue en faisant $x'' = 0$ dans (5) par une valeur f' de f plus petite que celle qui correspond au mouvement, c'est-à-dire qu'il faut que l'on ait

$$f' = \frac{h}{2l + 2a + e} < f;$$

la condition de l'arcboutement statique est donc

$$(6) \quad f > \frac{h}{2l + 2a + e},$$

condition à laquelle on pourra toujours facilement satisfaire en prenant l assez grand.

Toutefois cette condition (6), nécessaire et suffisante pour qu'il y ait arcboutement statique, n'est pas suffisante pour qu'il y ait arcboutement dynamique. Si, en effet, on a

$$(7) \quad \frac{h}{2a + e} > f > \frac{h}{2l + 2a + e},$$

le mouvement ne pourra pas se produire à partir du repos, quelque grande que soit la force Q , puisqu'il y a arcboutement statique; mais imprimons au valet une vitesse parallèle à Gx ⁽¹⁾: le mouvement se continuera. Ce mouvement sera un mouvement uniformément retardé, si nous supposons Q constant, puisque la valeur de x'' est constante et négative; une fois la vitesse du valet devenue nulle, il restera indéfiniment au repos, quelque grande

(¹) Condition toujours facile à réaliser, car il suffit pour cela de ne pas appliquer au début la force Q et de faire glisser le valet parallèlement à MO , en l'appuyant en B , mais sans qu'il touche le point C , tout en en étant très voisin, et d'appliquer ensuite la force Q en A , lorsque le valet a pris la vitesse voulue, parallèle à Gx .

que soit la force Q , puisque nous sommes alors dans le cas de l'arcboutement statique.

On remarquera d'ailleurs que les valeurs de N et de N_1 données par (4) sont positives, condition indispensable pour que les formules soient applicables.

Supposons maintenant (1)

$$(8) \quad f > \frac{h}{2a + e}.$$

Si, dans ce cas, on appliquait telles quelles les formules (4) et (5) on aurait un résultat évidemment absurde et même doublement absurde, à savoir que, quelque grande que soit la force Q qui tend à faire tourner le valet de droite à gauche, autour de son centre de gravité, les réactions N et N_1 tendraient à le faire tourner dans le même sens, et ensuite que le mouvement, qui était retardé, pour une valeur de f satisfaisant aux conditions (7), deviendrait accéléré dans le cas actuel où f est plus grand, x'' étant alors positif.

Mais, ainsi que l'a fait remarquer M. Lecornu, cette impossibilité apparente tient simplement à ce qu'il y a alors arcboutement dynamique; en effet, lorsque après avoir fait prendre au valet une vitesse déterminée parallèlement à Gx on fait intervenir la force Q , les réactions N et N_1 croissent au delà de toute limite puisque la valeur du coefficient de frottement

$$f' = \frac{h}{2a + e},$$

qui les rend l'une et l'autre infinies, est plus petite que celle de ce coefficient qui correspond au mouvement.

On peut d'ailleurs facilement vérifier que, dans le cas actuel, le frottement peut produire une percussion capable d'arrêter le valet.

Soient en effet H et H_1 les composantes normales au valet des percussions qui se produisent en B et C au moment de l'introduction de la force Q ; les composantes tangentielles seront Hf'

(1) Nous nous supposons toujours dans le cas où l'on peut négliger P devant Q , et aussi les termes qui contiennent a en facteur devant ceux qui en sont indépendants.

et H, f', f'' étant assujetti à la seule condition

$$f' \leq f.$$

Si l'on applique alors le théorème de d'Alembert pour les forces de percussion, v désignant la vitesse de translation du valet au moment où la percussion se produit (la vitesse finale étant par hypothèse nulle), on aura

$$(9) \quad \begin{cases} mv - Hf'' - H_1f' = 0, \\ H - H_1 = 0, \\ H\delta + H_1\delta_1 - Hf'(a + e) - H_1f'a = 0, \end{cases}$$

d'où l'on déduit

$$(10) \quad \begin{cases} H = H_1 = \frac{mv}{2f'}, \\ H[\delta + \delta_1 - (2a + e)f'] = 0, \end{cases}$$

où, comme $H > 0$,

$$f' = \frac{\delta + \delta_1}{2a + e},$$

c'est-à-dire, si l'on prend $\cos \alpha = 1$,

$$f' = \frac{h}{2a + e}.$$

Donc la condition pour qu'il y ait arc-boutement dynamique est

$$f \geq \frac{h}{2a + e}.$$

On voit donc que, suivant ses dimensions et sa construction, le valet de menuisier peut présenter ou simplement l'arc-boutement statique ou à la fois l'arc-boutement statique et l'arc-boutement dynamique.

On pourrait toutefois faire à ce qui précède l'objection suivante :

Nous pouvons supposer que l'on ait fait prendre au valet une vitesse initiale déterminée parallèle à Gx en lui appliquant pendant un temps voulu une force de direction et d'intensité convenables, le valet pendant cette période touchant l'établi *seulement en B* mais étant infiniment voisin du point C, sans toutefois toucher ce point. Pendant cette période, la réaction en C est nulle, et

la réaction en B a pour composante, suivant la normale au valet,

$$N = F \cos \gamma - P \sin \alpha,$$

F étant la force qui sollicite le valet pendant cette période et γ son angle avec N, et pour composante tangentielle Nf , f étant la valeur du coefficient de frottement pour le mouvement.

Au moment où la force Q intervient il faut, pour que la percussion se produise, que le coefficient de frottement prenne une valeur

$$f' = \frac{h}{2a + e} < f,$$

si nous nous supposons dans le cas de l'archoutement dynamique; or il peut paraître anormal de supposer que l'intervention de la force Q fasse diminuer la valeur du coefficient de frottement en B. Toutefois, bien que cette objection soit spécieuse, il est facile d'y répondre.

En effet, le coefficient de frottement est le rapport entre la composante tangentielle et la composante normale de la réaction; ce rapport est sensiblement constant, en vertu des lois de Coulomb, une fois que le mouvement est établi. Mais il n'en est pas de même pendant la période d'établissement du mouvement, ou au moment d'une variation brusque des forces qui entrent en jeu.

Le frottement en effet est dû, pour la majeure partie au moins, à la déformation des surfaces en contact, déformation qui est le résultat de l'action de forces en présence.

Si, par suite, la réaction normale éprouve une augmentation brusque, la déformation correspondante sera sans doute très rapide, mais elle exigera cependant un temps fini et, par suite, l'augmentation de la réaction tangentielle sera un peu en retard sur celle de la composante normale. Le coefficient de frottement qui est, comme nous l'avons rappelé, le rapport de la composante tangentielle à la composante normale, commencera donc par décroître, pendant un temps très court, pour reprendre ensuite sa valeur f relative au mouvement, *à moins qu'il n'existe une valeur plus petite f' rendant la réaction infinie*, et c'est précisément ce qui a lieu dans le cas actuel.

SUR LES CARACTÉRISTIQUES DES SYSTÈMES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES;

Par M. HADAMARD.

Beudon ⁽¹⁾ est parvenu à étendre au cas d'une équation aux dérivées partielles, à un nombre quelconque de variables indépendantes, la notion de *caractéristique*.

J'ai pu obtenir le même résultat ⁽²⁾ relativement aux systèmes de p équations à p fonctions inconnues qui satisfont à la condition postulée par Cauchy et M^{me} Kowalewski dans la démonstration de leur célèbre théorème fondamental, c'est-à-dire qui sont résolubles par rapport aux dérivées d'ordre le plus élevé des inconnues relativement à une même variable indépendante.

Mais on sait aujourd'hui que le cas où la condition précédente peut être réalisée est loin d'être entièrement général. M. Bourslet ⁽³⁾ a indiqué des systèmes qui, *par aucun changement de variables indépendantes*, ne peuvent être ramenés à la forme de M^{me} Kowalewski.

Il est à remarquer qu'on n'a point besoin de recourir à des systèmes formés *ad hoc* pour rencontrer cette circonstance singulière : elle se présente dans l'un des plus connus et des plus importants que la Géométrie moderne ait eu à considérer : je veux parler des équations de la *déformation des surfaces*

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 = E(u, v), \\ \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} = F(u, v), \\ \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 = G(u, v). \end{array} \right.$$

Il est visible que de telles équations ne sont pas résolubles par

⁽¹⁾ Ce *Bulletin*, année 1897, p. 108-120.

⁽²⁾ *Leçons sur la propagation des ondes*, Chap. VII.

⁽³⁾ Thèse (*Annales de l'École normale supérieure*, suppl., 1891).

rapport à $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}$; et il est non moins évident qu'elles ne sauraient le devenir par un changement de variables indépendantes, puisque ce changement n'altère que la forme des seconds membres et non celle des premiers.

MM. Méray et Riquier d'une part, M. Delassus de l'autre, ont appris à trouver les conditions d'existence des intégrales, non seulement pour les systèmes dont je viens de parler, mais aussi pour ceux où le nombre des inconnues n'est pas égal à celui des équations. En reprenant leurs travaux pour y étudier de plus près l'influence des changements de variables, on parviendrait évidemment à une théorie entièrement générale des caractéristiques.

Beudon a fait un premier pas dans cette voie ⁽¹⁾, en ce qui regarde les systèmes de plusieurs équations à *une seule* fonction inconnue.

Nous resterons, au contraire, dans l'hypothèse où le nombre des équations et celui des inconnues sont égaux entre eux, et donnerons quelques indications sur la manière dont interviennent les caractéristiques dans cette hypothèse.

Soit, par exemple, avec les notations de l'Ouvrage cité ⁽²⁾, le système de trois équations de second ordre

$$(2) \quad \begin{cases} \sum_{i,k} a_{ik} p_{ik} + \sum b_{ik} q_{ik} + \sum c_{ik} r_{ik} + l = 0, \\ \sum a'_{ik} p_{ik} + \sum b'_{ik} q_{ik} + \sum c'_{ik} r_{ik} + l' = 0, \\ \sum a''_{ik} p_{ik} + \sum b''_{ik} q_{ik} + \sum c''_{ik} r_{ik} + l'' = 0, \end{cases}$$

aux trois fonctions inconnues u, v, w et linéaires par rapport aux dérivées secondes ⁽³⁾. Les variables indépendantes sont $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Si l'on se donne les valeurs de u, v, w et de leurs dérivées premières sur la multiplicité

$$(3) \quad x_n = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}),$$

⁽¹⁾ *Annales de l'École normale supérieure*, 1896.

⁽²⁾ *Leçons sur la propagation des ondes*, Chap. VII, § I.

⁽³⁾ On sait que cette hypothèse ne restreint pas la généralité.

les dérivées secondes p_{nn} , q_{nn} , r_{nn} sont fournies par les équations (1)

$$(4) \quad \begin{cases} Ap_{nn} + Bq_{nn} + Cr_{nn} + K = 0, \\ A'p_{nn} + B'q_{nn} + C'r_{nn} + K' = 0, \\ A''p_{nn} + B''q_{nn} + C''r_{nn} + K'' = 0, \end{cases}$$

avec

$$A = \sum a_{ik} P_i P_k, \quad P_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad P_n = -1$$

et des expressions analogues pour B, ...

Lorsque le système donné est susceptible d'être mis sous la forme de M^{nn} Kowalewski, la condition pour que la multiplicité (3) soit caractéristique est donnée par l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$(5) \quad H = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = 0.$$

Si elle est vérifiée, sans que tous les mineurs de H soient nuls, les équations (4) (si elles sont compatibles) ne déterminent plus entièrement p_{nn} , q_{nn} , r_{nn} : ces quantités dépendent encore d'un paramètre inconnu ρ . Mais la considération des dérivées troisièmes montre que ce paramètre doit vérifier, sur la multiplicité (3), l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$(6) \quad \sum_{i=1}^{n-1} \frac{d\rho}{dx_i} \frac{\partial H}{\partial P_i} - N = 0,$$

qui lie entre elles les valeurs de ρ sur chacune des lignes (*bicaractéristiques*) définies par les équations différentielles

$$\frac{dx_1}{\left(\frac{\partial H}{\partial P_1}\right)} = \frac{dx_2}{\left(\frac{\partial H}{\partial P_2}\right)} = \dots = \frac{dx_{n-1}}{\left(\frac{\partial H}{\partial P_{n-1}}\right)}.$$

Moyennant cette équation (6), les dérivées troisièmes deviennent à leur tour indéterminées et dépendent, à leur tour, d'un para-

(1) *Loc. cit.*, p. 277.

mètre arbitraire ρ_1 , assujetti à l'équation différentielle

$$(6') \quad \sum_{i=1}^{n+1} \frac{d\rho_i}{dx_i} \frac{\partial H}{\partial \rho_i} + N_1 = 0$$

et ainsi de suite.

N est (en général) quadratique en ρ . Mais N_1 est linéaire en ρ , et, de même, les équations analogues servant à calculer les dérivées suivantes sont linéaires par rapport aux inconnues qu'elles doivent déterminer. De plus, le coefficient de ces inconnues est chaque fois le même, savoir

$$\frac{\partial N}{\partial \rho}.$$

Cela posé, passons aux systèmes qui *ne peuvent pas* être mis sous la forme de M^{me} Kowalewski.

Ces systèmes sont caractérisés par cette circonstance que l'équation $H = 0$ est une identité.

S'il en est ainsi, sur chaque multiplicité (3), les équations (4) forment un système indéterminé : leur solution dépend (en général) d'un paramètre ρ , qui satisfait encore à l'équation (6). Mais ici cette équation est une équation *en termes finis*, savoir une équation quadratique $N = 0$.

Cette équation, une fois résolue, l'équation en ρ_1 , savoir l'équation (6'), ainsi que toutes les équations analogues suivantes, sont également en termes finis et même du premier degré.

En un mot, ici, comme dans le cas où H n'était pas identiquement nul, les dérivées successives des inconnues sont déterminées d'une manière parfaitement univoque.

La condition pour qu'il n'en soit plus ainsi est

$$\frac{\partial N}{\partial \rho} = 0,$$

autrement dit que l'équation $N = 0$ ait une racine double.

C'est cette condition qui définit les caractéristiques.

Il resterait, bien entendu, à rechercher (en la supposant vérifiée) ce qu'on doit entendre par *bicaractéristiques*.

Si, par exemple, on applique ceci aux systèmes (1), on trouve que les caractéristiques de ce système ne sont autres que les lignes asymptotiques des surfaces correspondantes.

C'est bien le résultat que l'on obtient dans l'étude du problème de la déformation, mais cet énoncé n'avait jusqu'ici de sens que grâce à la réduction du système à une équation unique.

SUR UNE FORMULE GÉNÉRALE D'INTERPOLATION ;

Par M. POTRON.

1. M. Borel a démontré ⁽¹⁾ le théorème suivant :

Soit $\varphi_{p,q}(x)$ (p et q étant deux nombres entiers et $p \leq q$) une fonction égale à 0 pour $0 \leq x \leq \frac{p-1}{q}$ et pour $\frac{p+1}{q} \leq x \leq 1$, à $qx - p + 1$ pour $\frac{p-1}{q} \leq x \leq \frac{p}{q}$, à $-qx + p + 1$ pour $\frac{p}{q} \leq x \leq \frac{p+1}{q}$; soit $P_{p,q}(x)$ un polynôme tel que l'on ait, entre 0 et 1, $|\varphi_{p,q}(x) - P_{p,q}(x)| < \frac{1}{q^2}$; si $f(x)$ désigne une fonction définie et continue entre 0 et 1; si ε_q est un nombre tel que l'inégalité $|x_1 - x_2| < \frac{1}{q}$ entraîne partout, entre 0 et 1, $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon_q$; on a toujours, entre 0 et 1,

$$\left| f(x) - \sum_{p=0}^{p=q} f\left(\frac{p}{q}\right) P_{p,q}(x) \right| < \varepsilon_q + M \frac{q+1}{q^2},$$

M étant la limite supérieure de $f(x)$ entre 0 et 1. Je me propose de donner une expression générale des polynômes $P_{p,q}(x)$.

2. L'équation de la ligne brisée $y = \varphi_{p,q}(x)$ peut, d'après une

⁽¹⁾ *Leçons sur les fonctions de variables réelles*, Chap. IV, p. 82.

formule de M. S. Bernstein ⁽¹⁾, s'écrire

$$y = \sum_{h=0}^{h=q} \Lambda_h \left| x - \frac{h}{q} \right|,$$

$$\Lambda_0 = \frac{1}{2} \left[\varphi_{p,q}(1) + q \varphi_{p,q} \left(\frac{1}{q} \right) - (q-1) \varphi_{p,q}(0) \right],$$

$$\Lambda_h = \frac{q}{2} \left[\varphi_{p,q} \left(\frac{h+1}{q} \right) + \varphi_{p,q} \left(\frac{h-1}{q} \right) - 2 \varphi_{p,q} \left(\frac{h}{q} \right) \right], \quad h = 1, 2, \dots, q-1,$$

$$\Lambda_q = \frac{1}{2} \left[\varphi_{p,q}(0) + q \varphi_{p,q} \left(\frac{q-1}{q} \right) - (q-1) \varphi_{p,q}(1) \right].$$

En appliquant ces formules et remarquant que

$$\varphi_{p,q} \left(\frac{h}{q} \right) = \begin{cases} 0, & \text{si } h \neq p, \\ 1, & \text{si } h = p, \end{cases}$$

on trouve

$$\varphi_{0,q}(x) = -\frac{q-1}{2} |x| + \frac{q}{2} \left| x - \frac{1}{q} \right| + \frac{1}{2} |x-1|,$$

$$\varphi_{p,q}(x) = \frac{q}{2} \left| x - \frac{p-1}{q} \right| - q \left| x - \frac{p}{q} \right| + \frac{q}{2} \left| x - \frac{p+1}{q} \right|, \quad p = 1, 2, \dots, q-1,$$

$$\varphi_{q,q}(x) = \frac{1}{2} |x| + \frac{q}{2} \left| x - \frac{q-1}{q} \right| - \frac{q-1}{2} |x-1|.$$

Si je remplace chacune des expressions $\left| x - \frac{k}{q} \right|$ par un polynome $\Pi_k(x)$ tel que l'on ait, entre 0 et 1,

$$\left| \Pi_k(x) - \left| x - \frac{k}{q} \right| \right| < \frac{1}{2q^2},$$

les expressions obtenues seront les polynomes $P_{p,q}(x)$ cherchés, car l'erreur commise sur chaque second membre sera toujours en valeur absolue $< \frac{1}{q^2}$. On aura donc

$$(1) \quad \begin{cases} P_{0,q} = -\frac{q-1}{2} \Pi_0 + \frac{q}{2} \Pi_1 + \frac{1}{2} \Pi_q, \\ P_{p,q} = \frac{q}{2} (\Pi_{p-1} + \Pi_{p+1}) - q \Pi_p, & p = 1, 2, \dots, q-1, \\ P_{q,q} = \frac{1}{2} \Pi_0 + \frac{q}{2} \Pi_{q-1} - \frac{q-1}{2} \Pi_q. \end{cases}$$

(1) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXXIII, 1905, p. 33.

3. Pour déterminer $\Pi_k(x)$ je pose, suivant une remarque de M. Lebesgue (1),

$$\left(x - \frac{k}{q}\right)^2 = 1 + z, \quad \left|x - \frac{k}{q}\right| = \sqrt{\left(x - \frac{k}{q}\right)^2} = \sqrt{1 + z}.$$

Comme x et $\frac{k}{q}$ sont compris entre 0 et 1, il en est de même de $1 + z$, et par suite z est compris entre 0 et -1 . J'ai donc pour $\sqrt{1 + z}$ le développement en série

$$1 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2 \cdot 4}z^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}z^3 - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \dots 2n} z^n + R_n(z)$$

convergente pour $z = -1$ et, par suite, absolument et uniformément convergente pour $-1 \leq z \leq 1$. Il est aisé de trouver une limite supérieure de $|R_n(z)|$. J'ai, en effet,

$$|R_n(z)| \leq \sum_{h=n+1}^{h=\infty} u_h,$$

en posant

$$u_h = \frac{1 \cdot 3 \dots (2h-3)}{2 \cdot 4 \dots 2h} \quad \left(h \geq 2, u_0 = 1, u_1 = \frac{1}{2}\right).$$

Je vais chercher deux entiers α et $\beta > \alpha$ tels que, à partir d'un certain rang, on ait

$$\left(\frac{u_{h+1}}{u_h}\right)^\alpha < \left(\frac{h}{h+1}\right)^\beta \quad \text{ou} \quad h^\beta - (h+1)^{\beta-\alpha} \left(h - \frac{1}{2}\right)^\alpha > 0.$$

Le terme de plus haut degré en h est $\frac{1}{2}(3\alpha - 2\beta)h^{\beta-1}$. Si donc $\frac{\beta}{\alpha} > \frac{3}{2}$, l'inégalité cesse d'avoir lieu à partir d'un certain rang. Si $\alpha = 2$, $\beta = 3$, le premier membre devient $\frac{1}{4}(3h-1)$; l'inégalité est donc vérifiée pour $h \geq 1$. Or, $u_2 = \frac{1}{2^3}$, donc, pour $h > 2$, on a

$$u_h < \frac{1}{(2h)^{\frac{3}{2}}} \quad (2).$$

(1) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1898, p. 278.

(2) Ce résultat peut encore s'établir au moyen de la formule de Stirling

$$n! = \sqrt{2\pi} e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{\frac{\theta}{12n}}, \quad 0 < \theta < 1;$$

Je dis maintenant que

$$\sum_{h=n+1}^{h=\infty} u_h = R_n = (2n-1)u_n = \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots 2n}.$$

Ce théorème est d'abord vrai pour $n=1$. En effet, si je fais

on a, en effet,

$$u_h = \frac{1}{2h} \frac{(2h-2)!}{2^{2h-2} [(h-1)!]^2}.$$

Remplaçant le numérateur et le dénominateur par leurs limites supérieure et inférieure données par la formule de Stirling, on trouve, après simplification,

$$u_h < \frac{\frac{1}{e^{2h}(h-1)}}{2\sqrt{\pi} h \sqrt{h-1}} = v_h.$$

Posons

$$\frac{1}{h} = t,$$

il vient

$$h^{\frac{1}{2}} v_h = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{e^{2h(1-t)}}{\sqrt{1-t}} = \frac{T}{2\sqrt{\pi}}.$$

Lorsque t tend vers 0 par valeurs constamment décroissantes à partir de 1, T tend vers 1 par valeurs constamment décroissantes, donc $h^{\frac{1}{2}} v_h$ tend vers $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$ par valeurs constamment décroissantes. Ainsi, T_n désignant la valeur de T pour $h=n$, on a, pour $h > n$,

$$h^{\frac{1}{2}} u_h < h^{\frac{1}{2}} v_h < \frac{T_n}{2\sqrt{\pi}}.$$

On a, par exemple,

$$T_2 = 2^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}}.$$

En intervertissant les limites, on trouve de même

$$u_h > \frac{1}{2\sqrt{\pi} h \sqrt{h-1}} \frac{t}{e^{2h(1-t)}} = v'_h$$

et, en posant $h = \frac{1}{t}$,

$$h^{\frac{1}{2}} v'_h = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{1-t}} \frac{1}{e^{2(1-t)}} = \frac{T'}{2\sqrt{\pi}}.$$

La dérivée de $\frac{1}{T'}$ a le signe de $t - \frac{5}{6}$. Donc, lorsque t tend vers 0 par valeurs constamment décroissantes à partir de $\frac{1}{2}$, T' tend vers 1 par valeurs constamment

tendre z vers -1 dans le développement (absolument et uniformément convergent pour $-1 \leq z \leq 1$) de la fonction continue $\sqrt{1+z}$, j'obtiens, à la limite,

$$0 = 1 - \sum_{k=1}^{k=\infty} u_k,$$

d'où, comme $u_0 = 1$, je conclus

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} u_k = 2;$$

alors

$$R_1 = 2 - (u_0 + u_1) = \frac{1}{2}.$$

Si maintenant la formule est vraie pour R_n , on a

$$u_{n+1} = \frac{(2n-1)u_n}{2n+2} = \frac{R_n}{2n+2};$$

or

$$R_{n+1} = R_n - u_{n+1} = \frac{(2n+1)R_n}{2n+2} = (2n+1)u_{n+1} \quad (1).$$

décroissantes. On a donc, pour $h \geq 2$,

$$h^{\frac{1}{2}} u_h > h^{\frac{1}{2}} u'_h > \frac{1}{2\sqrt{\pi}},$$

et, par suite, pour $h > n \geq 2$,

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} < h^{\frac{1}{2}} u_h < \frac{T_n}{2\sqrt{\pi}}.$$

(¹) On peut encore écrire

$$R_n = \frac{(2n)!}{(2.4 \dots 2n)^2} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Or $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$, nombre des combinaisons de $2n$ objets n à n , est entier, donc la fraction irréductible égale à R_n a pour dénominateur une puissance de 2. Comme $u_n = R_{n-1} - R_n$, il en est de même pour u_n . En procédant de proche en proche, on voit qu'en général, si l'on pose

$$u_{n,p} = \frac{1.3 \dots (2p-1).1.3 \dots (2n-2p-1)}{2.4 \dots 2n} \quad \left(p < \frac{n+1}{2}, u_{n,0} = R_n, u_{n,1} = u_n \right),$$

on a

$$u_{n,p} = u_{n-1,p-1} - u_{n,p-1},$$

et que la fraction irréductible égale à $u_{n,p}$ a pour dénominateur une puis-

Je conclus de là

$$R_n < \frac{2n-1}{(2n)^{\frac{3}{2}}}.$$

Pour avoir $R_n < \frac{1}{2q^3}$, il suffit donc de prendre $\frac{(2n-1)^2}{2n^3} \leq \frac{1}{q^6}$.
Soit $n = 2q^\beta$ (α et β entiers, $\beta \neq 0$), il faut

$$2\alpha^2 q^2 \beta - q^6 (2\alpha q^\beta - 1)^2 \geq 0.$$

Pour que cette inégalité ait lieu pour toute valeur de q , il faut que le terme de plus haut degré en q ait son coefficient positif, ce qui exige d'abord

$$3\beta \geq 2\beta + 6 \quad \text{ou} \quad \beta \geq 6,$$

puis, en supposant $\beta = 6$,

$$2\alpha^2 - 4\alpha^2 \geq 0 \quad \text{ou} \quad \alpha \geq 2.$$

Comme d'ailleurs $\frac{2h-1}{(2h)^{\frac{3}{2}}}$ peut s'écrire $\frac{1}{(2h)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(2h)^{\frac{3}{2}}}$, en faisant $h = 2q^6$, cette expression devient

$$\frac{1}{2q^3} - \frac{1}{8q^9}.$$

On a donc bien une solution de l'inégalité en prenant $n = 2q^6$.

Ainsi, on peut toujours prendre pour $\Pi_k(x)$ l'expression

$$1 + \sum_{h=1}^{h=2q^6} (-1)^{h+1} u_h \left[\left(x - \frac{k}{q} \right)^2 - 1 \right]^h,$$

de degré $4q^6$ en x . Ordonnons-la par rapport à x .

sance de 2. On voit aussi que

$$\sum_{h=n+1}^{h=\infty} u_{n,p} = u_{n,p-1} = u_{n,p} \frac{2n-3p+1}{2p-1}.$$

Pour les grandes valeurs de n , $u_{n,p}$ est donc de l'ordre de $\frac{1}{n^{p+\frac{1}{2}}}$.

4. On a, en supposant d'abord $k(k-q) \neq 0$,

$$\left[\left(x - \frac{k}{q} \right)^2 - 1 \right]^h = \left[x^2 - 2 \frac{k}{q} x + \left(\frac{k^2}{q^2} - 1 \right) \right]^h = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \frac{h!}{\alpha! \beta! \gamma!} x^{2\alpha} \left(-2 \frac{k}{q} x \right)^\beta \left(\frac{k^2}{q^2} - 1 \right)^\gamma, \\ (\alpha + \beta + \gamma = h);$$

ce que l'on peut écrire

$$\sum_{\alpha, \beta} \frac{h! (-1)^{h-\alpha}}{\alpha! \beta! (h-\alpha-\beta)!} \left(\frac{2k}{q} \right)^\beta \left(1 - \frac{k^2}{q^2} \right)^{h-\alpha-\beta} x^{2\alpha+\beta}, \quad (\alpha + \beta \leq h).$$

Le coefficient de x^μ dans cette expression s'obtient en réunissant les termes correspondants aux systèmes (α, β) de solutions entières et positives de

$$2\alpha + \beta = \mu, \quad \alpha + \beta \leq h.$$

On voit aisément que ces solutions n'existent que pour

$$\mu \leq \begin{cases} 2h & \text{si } \mu \text{ est pair,} \\ 2h-1 & \text{si } \mu \text{ est impair,} \end{cases} \quad \text{ou} \quad h \geq \frac{\mu}{2} + \frac{1}{4} [1 - (-1)^\mu] = l_\mu.$$

Je les désignerai par $(\alpha_{h,\mu}, \beta_{h,\mu})$. Le coefficient de x^μ dans $\Pi_h(x)$ est donc, si $\mu > 0$,

$$C_{\mu,k} = \sum_{h=l_\mu}^{h=2q^s} h! u_h \sum_{\alpha_{h,\mu}, \beta_{h,\mu}} (-1)^{\alpha+1} \frac{1}{\alpha_{h,\mu}! \beta_{h,\mu}! (h-\alpha_{h,\mu}-\beta_{h,\mu})!} \left(\frac{2k}{q} \right)^{\beta_{h,\mu}} \left(1 - \frac{k^2}{q^2} \right)^{h-\alpha_{h,\mu}-\beta_{h,\mu}},$$

ou bien en désignant simplement par α_μ, β_μ deux entiers positifs, solutions de $2\alpha + \beta = \mu$ ($0 \leq \mu \leq 4q^s$)

$$C_{\mu,k} = \sum_{\alpha_\mu, \beta_\mu} \frac{(-1)^{\alpha_\mu+1} \left(\frac{2k}{q} \right)^{\beta_\mu}}{\alpha_\mu! \beta_\mu!} \sum_{h=\alpha_\mu+\beta_\mu}^{h=2q^s} u_h \frac{h!}{(h-\alpha_\mu-\beta_\mu)!} \left(1 - \frac{k^2}{q^2} \right)^{h-\alpha_\mu-\beta_\mu}.$$

On peut encore écrire

$$(2) \quad C_{\mu,k} = \sum_{\alpha_\mu, \beta_\mu} \frac{\left(-\frac{2k}{q} \right)^{\beta_\mu}}{\alpha_\mu! \beta_\mu!} \sum_{h=\alpha_\mu+\beta_\mu}^{h=2q^s} (-1)^{h+1} u_h \frac{h!}{(h-\alpha_\mu-\beta_\mu)!} \left(\frac{k^2}{q^2} - 1 \right)^{h-\alpha_\mu-\beta_\mu}.$$

On a d'ailleurs directement

$$(3) \quad C_{0,k} = 1 + \sum_{h=1}^{h=2q^s} (-1)^{h-1} u_h \left(\frac{k^2}{q^2} - 1 \right)^h.$$

On peut alors écrire, quel que soit μ ,

$$C_{\mu,k} = \sum_{\alpha_{\mu}, \beta_{\mu}} \frac{\left(-\frac{2k}{q}\right)^{\beta_{\mu}}}{\alpha_{\mu}! \beta_{\mu}!} \frac{d^{2\mu+\beta_{\mu}} C_{0,k}}{d^{2\mu+\beta_{\mu}} \left(\frac{k^2}{q^2} - 1\right)},$$

et remarquer que $C_{0,k}$ se compose des $2q^2 + 1$ premiers termes du développement de $\frac{k}{q}$ par rapport aux puissances croissantes de $\left(\frac{k^2}{q^2} - 1\right)$.

Si $k = 0$, on a

$$(x^2 - 1)^h = \sum_{\alpha} \frac{h! (-1)^{h-\alpha}}{\alpha! (h-\alpha)!} x^{2\alpha}.$$

Le coefficient de x^{μ} dans $\Pi_0(x)$ est donc 0 si μ est impair, et, si μ est pair et $\neq 0$,

$$C_{\mu,0} = \sum_{h=\frac{\mu}{2}}^{h=2q^2} (-1)^{h+1} h! u_h \frac{(-1)^{h-\frac{\mu}{2}}}{\left(\frac{\mu}{2}\right)! \left(h - \frac{\mu}{2}\right)!}$$

ou bien

$$(4) \quad C_{\mu,0} = \frac{1}{\left(\frac{\mu}{2}\right)!} \sum_{h=\frac{\mu}{2}}^{h=2q^2} (-1)^{h+1} u_h \frac{h!}{\left(h - \frac{\mu}{2}\right)!} (-1)^{h-\frac{\mu}{2}}.$$

On a d'ailleurs directement

$$(5) \quad C_{0,0} = 1 - \sum_{h=1}^{h=2q^2} u_h \quad (1).$$

On voit que $C_{0,0}$ se compose des $2q^2 + 1$ premiers termes du développement de $(1+z)^{\frac{1}{2}}$ où l'on fait $z = -1$ et que $C_{\mu,0}$ est

(1) On a déjà vu que

$$\sum_{h=1}^{h=\infty} u_h = 1.$$

Donc

$$\sum_{h=1}^{h=2q^2} = 1 - R_{2q^2}, \quad C_{0,0} = R_{2q^2} = (2q^2 + 1) u_{2q^2}.$$

le quotient par $\frac{\mu}{2}!$ de la $\left(\frac{\mu}{2}\right)^{\text{ième}}$ dérivée de cette expression, pour $z = -1$. On peut faire rentrer ce résultat dans les formules (2) et (3) en y faisant $\beta_\mu = 0$ et remplaçant $\frac{(-2k)\beta_\mu}{\mu!}$ par $\frac{1 - (-1)^\mu}{2}$.

Si $k = q$, on a

$$[(x-1)^2 - 1]^h = x^h (x-2)^h = \sum_{a=0}^{a=h} \frac{h!}{a!(h-a)!} x^{h+a} (-2)^{h-a}.$$

Pour avoir le coefficient de x^μ dans $\Pi_q(x)$, remarquons qu'un terme de rang h de $\Pi_q(x)$ fournit un terme en x^μ toujours et seulement si

$$h \leq \mu \leq \begin{cases} 2h, & \text{si } \mu \text{ est pair,} \\ 2h-1, & \text{si } \mu \text{ est impair,} \end{cases}$$

en sorte que, si $\mu \neq 0$,

$$(6) \quad C_{\mu,q} = \sum_{h=\ell_\mu}^{h=\mu} (-1)^{h-1} u_h h! \frac{(-2)^{2h-\mu}}{(\mu-h)!(2h-\mu)!}$$

(si $\mu > 2q^s$, la limite supérieure de h sera $2q^s$). On a d'ailleurs directement

$$(7) \quad C_{0,q} = 1.$$

5. Désignons maintenant par $D_{\mu,p,q}$ le coefficient de x^μ dans $P_{p,q}(x)$; les formules (1) donnent

$$(8) \quad \begin{cases} D_{\mu,0,q} = -\frac{q-1}{2} C_{\mu,0} + \frac{q}{2} C_{\mu,1} + \frac{1}{2} C_{\mu,q}, \\ D_{\mu,p,q} = \frac{q}{2} (C_{\mu,p-1} + C_{\mu,p+1}) - q C_{\mu,p}, & p = 1, 2, \dots, q-1. \\ D_{\mu,q,q} = \frac{1}{2} C_{\mu,0} + \frac{q}{2} C_{\mu,q-1} - \frac{q-1}{2} C_{\mu,q}. \end{cases}$$

Ces formules (8), jointes aux formules (2)-(7), déterminent

$$\text{complètement les polynômes } P_{p,q}(x) = \sum_{\mu=0}^{h=2q^s} D_{\mu,p,q} x^\mu.$$

EXTRAIT DES STATUTS ET DU RÈGLEMENT.

La Société mathématique de France a pour objet l'avancement et la propagation des études de Mathématiques pures et appliquées. Elle y concourt par ses travaux et ses publications. Elle a son siège à Paris.

La Société se compose de sociétaires perpétuels, de membres résidents et de membres non résidents, en nombre illimité.

Sont considérés comme résidents les membres qui ont à Paris leur domicile ou leurs occupations professionnelles.

Les Étrangers peuvent faire partie de la Société.

Les conditions à remplir, pour être membre de la Société, sont les suivantes : 1° avoir été présenté par deux de ses membres et agréé par le Conseil d'administration ou par le Bureau agissant en vertu d'un mandat du Conseil; 2° avoir obtenu, à l'une des séances qui ont suivi la présentation, les suffrages de la majorité des membres présents; 3° avoir versé un droit d'admission de *dix francs*; 4° payer une cotisation annuelle dont le montant est de *vingt francs* pour les membres résidents, et de *quinze francs* pour les membres non résidents.

La cotisation annuelle peut toujours être rachetée par une somme de *trois cents francs*, versée dans les conditions fixées par le règlement administratif de la Société.

Ce versement confère le titre de *sociétaire perpétuel*.

La cotisation annuelle est payée au commencement de chaque exercice dont l'origine est fixée au 1^{er} novembre de chaque année.

Les nouveaux membres doivent payer la totalité de la cotisation de l'exercice en cours, quelle que soit l'époque de leur admission.

La Société tient des séances ordinaires deux fois par mois; elle prend trois mois de vacances, en août, septembre et octobre.

Pour assister aux séances, les personnes étrangères à la Société doivent être présentées par l'un de ses membres.

La Société publie par livraisons un Recueil annuel qui a pour titre : *Bulletin de la Société mathématique de France*, et qui contient, avec un extrait des procès-verbaux des séances, des Notes et Mémoires sur les Mathématiques pures ou appliquées, ayant pour auteurs des membres de la Société, et présentant quelque originalité au point de vue de la méthode ou des résultats.

Les livraisons du *Bulletin* sont adressées à tous les membres de la Société, au fur et à mesure de leur publication. Toutefois, dans le cas où un sociétaire se met en retard dans le paiement de sa cotisation, l'envoi du *Bulletin* est suspendu pour lui, jusqu'à ce qu'il ait acquitté l'arriéré.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS.

HALPHEN (G.-H.), Membre de l'Institut. — **Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications.** 3 volumes grand in-8, se vendant séparément.

I^{re} PARTIE : *Théorie des fonctions elliptiques et de leurs développements en série*; 1886..... 15 fr.

II^e PARTIE : *Application de la Mécanique à la Physique, à la Géométrie, à la Géométrie et au Calcul intégral*; 1888..... 20 fr.

III^e PARTIE : *Fragments. (Quelques applications à l'Algèbre et en particulier à l'équation du 5^e degré. Quelques applications à la théorie des nombres. Questions diverses.)* Publiée par les soins de la Section de Géométrie de l'Académie des Sciences; 1891. 8 fr. 50 c.

TABLE DES MATIÈRES

(FASCICULE I).

	Pages.
État de la Société au commencement de 1906.....	V
Liste des présidents de la Société depuis la fondation.....	XIV
Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels la Société échange son Bulletin.....	XV
Comptes rendus des séances.....	I
[M ² 6 b] FONTENÉ (G.). — Sur une configuration remarquable dans l'espace.....	3
[L ² 19 a] BRICARD (R.). — Sur certains systèmes linéaires, ponctuels et tangentiels, de quadriques.....	17
[D 4 a] BOUTROUX (P.). — Propriétés d'une fonction holomorphe dans un cercle où elle ne prend pas les valeurs zéro et un.....	30
[R 8 a z] LECORNU (L.). — Sur l'herpolhodie.....	40
[R 9 a] DE SPARRE (Comte). — Note au sujet du valet de menuisier.	41
[H 7] HADAMARD. — Sur les caractéristiques des systèmes aux déri- vées partielles.....	48
[A 5 b] POTRON. — Sur une formule générale d'interpolation.....	52

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6°).

PICARD (Émile), Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences. — **Traité d'Analyse** (Cours de la Faculté des Sciences). Quatre volumes grand in-8 avec figures, se vendant séparément.

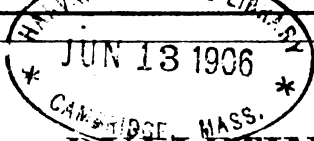
TOME I : *Intégrales simples et multiples. — L'équation de Laplace et ses applications. Développement en séries. — Applications géométriques du Calcul infinitésimal.* 2^e édition, revue et corrigée, avec 24 figures ; 1901..... 16 fr.

TOME II : *Fonctions harmoniques et fonctions analytiques. — Introduction à la théorie des équations différentielles. Intégrales abéliennes et surfaces de Riemann.* 2^e édition, revue et augmentée, avec 58 figures ; 1905..... 18 fr.

TOME III : *Des singularités des intégrales et des équations différentielles. Etude du cas où la variable reste réelle et des courbes définies par des équations différentielles. Equations linéaires ; analogie entre les équations algébriques et les équations linéaires.* Avec 25 figures ; 1896.... 18 fr.

TOME IV : *Équations aux dérivées partielles .. (En préparation.)*

Publication trimestrielle.



BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE

PUBLIÉ

PAR LES SECRÉTAIRES.

S'adresser, pour la rédaction, à M. RAFFY, rue Pierre-Nicole, 7, Paris, 5^e ;
pour la distribution, à M. GRÉVY, rue Saint-Placide, 62, Paris, 6^e.

TOME XXXIV. — FASCICULE II.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
A LA SORBONNE.

1906

MM. les Membres de la Société sont priés d'adresser leur cotisation à M. *Claude-Lafontain* banquier, rue de Trévise, n° 32, à Paris, Trésorier de la Société.

On s'abonne et l'on trouve les Volumes déjà publiés au siège de la Société et à la Librairie Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, Paris.

Les séances de la Société mathématique ont lieu les premier et troisième jeudis de chaque mois à 9 heures du soir.

Depuis le 1^{er} mars 1900 les séances de la Société ont lieu dans une salle de la Faculté des Sciences (entrée place de la Sorbonne, escalier tout au bout de la galerie, deuxième étage à droite).

Les Membres de la Société ont dû recevoir une carte, portant le timbre du Secrétariat, leur donnant accès à la Bibliothèque de l'Université, et fournissant à ce sujet les renseignements nécessaires: ceux qui ne l'auraient pas reçue sont priés d'en informer le Secrétariat.

La correspondance peut être adressée, soit à la Faculté des Sciences, place de la Sorbonne, soit au domicile de l'un des secrétaires, de préférence à M. Grévy, sauf ce qui concerne la rédaction du Bulletin, qui doit être adressé de préférence à M. Raffy.

AVIS.

Dans sa séance du 2 février 1883, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé qu'à l'avenir tout Membre de la Société qui voudra compléter sa collection du *Bulletin* aura le droit personnel de le faire, une seule fois pour chacun des volumes publiés avant son admission, aux prix suivants :

	Le volume.
	fr
Dix volumes au moins.....	4,60
De cinq à neuf volumes.....	5,00
Moins de cinq volumes.....	6,00

Dans sa séance du 28 février 1900, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé qu'à l'avenir tout Membre de la Société, auteur d'un travail *quelconque* inséré dans le Bulletin et désirant en obtenir des tirages à part, **devra en faire la demande en retournant l'épreuve corrigée.**

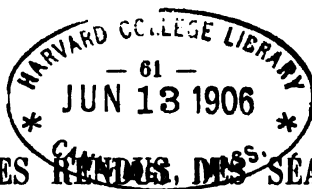
Si le nombre demandé ne dépasse pas *cinquante*, les frais du tirage à part seront faits par la Société.

Conformément à des décisions prises par le Conseil et par la Commission d'impression :

1^o Le *Bulletin*, depuis le Tome XXVII, paraît tous les trois mois;

2^o Les auteurs de tous les travaux destinés au *Bulletin* sont **instamment priés** d'inscrire en tête de leurs manuscrits la classification que leur assigne, d'après le sujet traité, l'*Index du Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*;

3^o Ils sont également invités à ne pas dépasser, autant que possible, la proportion de *une figure* pour quatre pages de texte imprimé.



COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 25 JANVIER 1906.

PRÉSIDENTE DE M. HADAMARD.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : M. Rémy, présenté par MM. Humbert et d'Ocagne; M. Marcus, présenté par MM. Painlevé et Borel; M. Gérardin, présenté par MM. Laisant et Brocard; M. Philippe, présenté par MM. Laisant et Lemoine.

Communications :

M. Andoyer : *Sur l'équilibre relatif de n corps et sur les solutions périodiques infiniment voisines.*

M. Hadamard : *Sur un théorème de M. Osgood relatif au calcul des variations.*

SÉANCE DU 1^{er} FÉVRIER 1906.

PRÉSIDENTE DE M. HADAMARD.

Communications :

M. Raffy : *Sur certains systèmes simultanés d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur.*

M. Hadamard : *Sur les sommes de Gauss.*

M. GOURSAT adresse un Mémoire intitulé : *Remarques sur quelques théorèmes d'existence.*

SÉANCE DU 15 FÉVRIER 1906.

PRÉSIDENTE DE M. BLUTEL.

Communications :

M. Félix Lucas : *Sur la génération anharmonique des courbes algébriques.*

M. Fréchet : *Sur une question proposée par M. Hadamard relativement à la théorie des ensembles de fonctions.*

M. Lecornu : *Sur les liaisons non holonomes.*

M. Blutel : *Sur un problème d'optique géométrique.*

SÉANCE DU 1^{er} MARS 1906.

PRÉSIDENCE DE M. HADAMARD.

Communications :

M. Touche : *Historique du problème de la résistance des fluides.*

M. Raffy : *Sur l'équation $s^2 = 4pq \lambda(x, y)$.*

M. HADAMARD attire l'attention sur un travail de M. Le Roux (*Journal de Math.*, 5^e série, t. IX, 1903), dans lequel la notion de caractéristique est définie pour le système d'équations aux dérivées partielles le plus général, et sur les relations que l'on pourrait établir entre cette définition et celle qu'il avait envisagée dans une précédente Communication [*Sur les caractéristiques des systèmes aux dérivées partielles* (*Bulletin de la Société Mathématique*, t. XXXIV, 1906)].

SÉANCE DU 13 MARS 1906.

PRÉSIDENCE DE M. HADAMARD.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : M. Faraggi, présenté par MM. Raffy et Estanave; M. Popovici et M. Wilson, présentés par MM. Hadamard et Borel.

Communications :

M. Bricard : *Sur la Géométrie de direction.*

MM. Borel et Hadamard présentent quelques observations à ce sujet.

M. Raffy : *Classification et détermination des surfaces dont les coordonnées s'expriment explicitement au moyen de fonctions arbitraires des paramètres des lignes de longueur nulle; application aux surfaces isothermiques.*

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR L'APPLICATION DES ÉQUATIONS DE LAGRANGE A LA DÉTERMINATION DES ACTIONS EXERCÉES PAR UN FLUIDE PARFAIT INCOMPRESSIBLE ANIMÉ D'UN MOUVEMENT IRROTATIONNEL;

Par M. COMBEBIAC.

C'est dans l'Ouvrage de Thomson et Tait : *Natural Philosophy* qu'il a été fait, pour la première fois, application des équations de Lagrange à la détermination des actions exercées sur ses parois par un fluide parfait incompressible animé d'un mouvement irrotationnel et acyclique. Si $q_1, q_2, \dots, q_r$ désignent les paramètres qui déterminent la position des parois, la force vive T_1 du fluide s'exprime, dans le cas spécifié, par une fonction quadratique des dérivées $q'_1, q'_2, \dots, q'_r$ des paramètres, et les forces extérieures Q relatives aux paramètres q et faisant équilibre aux forces dues à l'inertie du fluide ont pour expression

$$Q = \frac{d}{dt} \frac{\partial T_1}{\partial q'} - \frac{\partial T_1}{\partial q},$$

exactement comme si les paramètres q étaient ceux du système formé par le fluide.

Dans le cas où le mouvement du fluide n'est pas acyclique, la force vive du fluide peut, comme sa vitesse, être décomposée en deux parties qui se déterminent indépendamment l'une de l'autre et dont l'une T_1 correspond à un mouvement acyclique dépendant uniquement du mouvement des parois, tandis que l'autre T_0 ne dépend que de la position de ces parois et des modules de circulation, c'est-à-dire des valeurs de la circulation le long de certaines lignes fermées convenablement choisies. Les équations de Lagrange ne sont plus applicables et Carl Neumann ⁽¹⁾ a établi la formule générale donnant, dans ce cas, l'expression des actions exercées par le fluide sur ses parois (y compris celles des corps qui pour-

(1) C. NEUMANN, *Beiträge zu einzelnen Teilen der mathematischen Physik*, p. 205-238. Teubner, Leipzig, 1893.

raient être baignés dans le fluide). Lorsque la partie T_1 de l'énergie hydrocinétique qui correspond à la partie acyclique du mouvement s'annule (parois au repos) ou est négligeable par rapport à l'autre (parois limitant des corps filiformes), la formule de Neumann se réduit à

$$Q = \frac{\partial T_0}{\partial q},$$

où Q désigne la force extérieure relative au paramètre q ; T_0 est exprimée en fonction des paramètres q et des modules de circulation, qui d'ailleurs doivent être considérés comme constants si le fluide est parfait (dépourvu de viscosité).

Cette formule diffère par le signe de son second membre de celle qui résulterait de l'application pure et simple des équations de Lagrange, et l'on sait que cette différence de signes se retrouve lorsqu'on compare les forces d'origine hydrodynamique aux forces électromagnétiques dues aux courants électriques.

On se propose de montrer que les équations de Lagrange sont encore applicables dans le cas étudié moyennant un changement de variables dans l'expression de l'énergie hydrocinétique, de sorte que la masse fluide s'assimile alors à un système cyclique dont les coordonnées contrôlables seraient les paramètres q déterminant la position des parois.

I.

Considérons un fluide parfait incompressible animé d'un mouvement irrotationnel et occupant un volume V à connexion multiple, soit, pour fixer les idées, l'espace extérieur à des surfaces annulaires ne s'entrelaçant pas. La partie du mouvement correspondant à l'immobilité des parois donne lieu à une vitesse v_0 , dont les composantes u, v, w , suivant les axes de coordonnées, sont des fonctions linéaires homogènes des modules de circulation μ , et la force vive T_0 correspondant à cette vitesse est une fonction quadratique de ces modules, les coefficients étant des fonctions des paramètres q . Cette force vive peut aussi s'écrire

$$T_0 = \frac{1}{2} \rho \int_V (u^2 + v^2 + w^2) \delta\tau,$$

où $\delta\tau$ désigne un élément quelconque du volume V et ρ la densité du fluide.

Le vecteur v_0 admet une fonction potentielle multiforme, de sorte que l'on peut appliquer la formule de Green à l'expression précédente en rendant, au préalable, le volume V simplement connexe au moyen de coupures constituées par des surfaces convenablement disposées. On obtient ainsi, en désignant par λ le flux afférent à la coupure qui correspond au module de circulation μ :

$$(1) \quad 2T_0 = \rho \sum \mu \lambda.$$

Lorsque les modules varient et que les parois se déplacent, l'accroissement de T_0 a pour expression

$$dT_0 = \rho \int_V (u du + v dv + w dw) \delta\tau + \frac{1}{2} \rho \int_S (u^2 + v^2 + w^2) \delta\sigma dn,$$

en désignant par $\delta\sigma$ un élément de la surface des parois, par S la surface totale de ces parois, par dn la composante normale du déplacement de l'élément superficiel $\delta\sigma$, enfin par du , dv , dw les expressions différentielles

$$\begin{aligned} du &= \sum \frac{\partial u}{\partial \mu} d\mu + \sum \frac{\partial u}{\partial q} dq, \\ dv &= \sum \frac{\partial v}{\partial \mu} d\mu + \sum \frac{\partial v}{\partial q} dq, \\ dw &= \sum \frac{\partial w}{\partial \mu} d\mu + \sum \frac{\partial w}{\partial q} dq. \end{aligned}$$

On peut appliquer la formule de Green à la première intégrale moyennant les précautions déjà spécifiées, et l'on obtient

$$\int_V (u du + v dv + w dw) \delta\tau = \sum \lambda d\mu.$$

D'autre part, dn s'exprime linéairement en fonction des accroissements des paramètres q , c'est-à-dire que l'on a

$$dn = \sum a_n dq.$$

Il vient donc

$$dT_0 = \rho \sum \lambda d\mu + \sum \frac{1}{2} \rho \int_S (u^2 + v^2 + w^2) a_n \delta\sigma dq.$$

Cette expression de dT_0 montre que $\rho\lambda$ est la dérivée de T_0 par rapport à μ . Chaque flux λ est évidemment, de même que chaque composante de la vitesse, une fonction linéaire homogène des modules μ ; réciproquement, les modules μ sont des fonctions linéaires homogènes des flux λ et, par suite, T_0 peut s'exprimer par une fonction quadratique homogène des flux λ . On désignera par T_μ l'expression de T_0 en fonction des modules de circulation et par T_λ l'expression de T_0 en fonction des flux. En dérivant la formule (1) par rapport à λ et tenant compte de la propriété de $\rho\lambda$, on a

$$2 \frac{\partial T_\lambda}{\partial \lambda} = \rho\mu + \rho \sum \lambda_i \frac{\partial \mu_i}{\partial \lambda} = \rho\mu + \sum \frac{\partial T_\mu}{\partial \mu_i} \frac{\partial \mu_i}{\partial \lambda} = \rho\mu + \frac{\partial T_\lambda}{\partial \lambda},$$

et, par conséquent, on peut écrire la double formule

$$(2) \quad \rho\lambda = \frac{\partial T_\mu}{\partial \mu}, \quad \rho\mu = \frac{\partial T_\lambda}{\partial \lambda}.$$

On a également

$$dT_0 = \sum \frac{\partial T_\mu}{\partial \mu} d\mu + \sum \frac{\partial T_\mu}{\partial q} dq = \sum \frac{\partial T_\lambda}{\partial \lambda} d\lambda + \sum \frac{\partial T_\lambda}{\partial q} dq$$

et, par suite, eu égard aux relations (2) :

$$2 dT_0 = \sum \lambda d\mu + \sum \mu d\lambda + \sum \left(\frac{\partial T_\mu}{\partial q} + \frac{\partial T_\lambda}{\partial q} \right) dq;$$

d'où, par comparaison avec la formule (1) différenciée,

$$(3) \quad \frac{\partial T_\mu}{\partial q} + \frac{\partial T_\lambda}{\partial q} = 0.$$

Les formules (1), (2) et (3) sont symétriques par rapport aux quantités μ et λ ; mais cette symétrie ne se maintient pas dans le domaine dynamique. La formule de Carl Neumann déjà mentionnée devient, en effet, en vertu de (3),

$$(4) \quad Q = \frac{\partial T_\mu}{\partial q} = - \frac{\partial T_\lambda}{\partial q}.$$

La seconde des expressions de Q est conforme à celle qui résul-

terait de l'application des équations de Lagrange à la masse fluide ; celle-ci est donc assimilable, dans le cas qui nous occupe, à un système cyclique dont les coordonnées contrôlables seraient les paramètres q et dont les vitesses cycliques seraient les flux λ . Il est superflu d'observer que la légitimité de cette assimilation ne pouvait pas être admise *a priori*.

II.

On peut pousser plus loin l'assimilation en montrant que l'application des équations de Lagrange fournit encore des résultats concordants avec une détermination directe de l'expression des forces F relatives aux coordonnées cycliques, c'est-à-dire aux variables φ définies par la relation

$$\lambda = \frac{d\varphi}{dt};$$

φ est le volume du fluide qui a traversé la coupure correspondant au flux λ à partir d'un instant pris pour origine du temps.

Si F est la force extérieure relative à la coordonnée φ , l'expression $F \delta\varphi$ doit représenter le travail changé de signe des forces d'inertie du fluide dans un déplacement virtuel pour lequel les accroissements de toutes les variables autres que φ sont nuls. On reconnaît que l'on a, dans ces conditions,

$$(5) \quad F = \rho \frac{d\mu}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T_\lambda}{\partial \lambda}.$$

(Démonstration en quaternions :

Si l'on pose

$$v_0 = \sum A \lambda,$$

le déplacement d'une particule fluide dans le déplacement $\delta\varphi$ a pour expression $A \delta\varphi$ et, par suite, le travail virtuel des forces fictives élémentaires $\rho \frac{dv_0}{dt} \delta\tau$ a lui-même pour expression

$$F \delta\varphi = \rho \int_V - S \left(A \frac{dv}{dt} \right) \delta\tau \delta\varphi;$$

d'où

$$\begin{aligned} F &= \rho \int_V -S \left(\Lambda \frac{d\nu_0}{dt} \right) \delta\tau \\ &= \rho \frac{d}{dt} \int_V -S(\nu_0 \Lambda) \delta\tau - \rho \int_V -S \left(\nu_0 \frac{d\Lambda}{dt} \right) \delta\tau. \end{aligned}$$

Comme nous supposons négligeables les forces d'inertie dues aux dérivées premières et secondes des paramètres q , le vecteur $\frac{d\Lambda}{dt}$ provient uniquement du déplacement subi par la particule fluide en raison de la vitesse ν_0 et, dans ces conditions, en tenant compte, en outre, du fait que les vecteurs Λ et ν_0 ont des distributions à la fois solénoïdales et irrotationnelles, on reconnaît que l'on a

$$2 \frac{d\Lambda}{dt} = \nabla(S\Lambda\nu_0) + \mathbf{V}[\nabla(\mathbf{V}\Lambda\nu_0)],$$

et, en appliquant certaines formules de différentiation géométrique :

$$\begin{aligned} 2S\nu_0 \frac{d\Lambda}{dt} &= S[\nabla(\nu_0 S\Lambda\nu_0)] - S[\nabla(\mathbf{V}\cdot\nu_0 \mathbf{V}\Lambda\nu_0)] \\ &= S[\nabla(\nu_0 S\Lambda\nu_0)] - S[\nabla(\nu_0 S\Lambda\nu_0 - \Lambda\nu_0^2)] \\ &= S[\nabla(\Lambda\nu_0^2)]; \end{aligned}$$

enfin, en appliquant la formule de Gauss, on a

$$2 \int_V S\nu_0 \frac{d\Lambda}{dt} \delta\tau = \int_S \nu_0^2 \Lambda_n \delta\sigma,$$

en désignant par Λ_n la composante normale du vecteur Λ en un point de la surface des parois, composante qui est nulle en raison des conditions qui définissent Λ . La deuxième intégrale de l'expression de F est donc nulle et cette expression, réduite à son premier terme, devient

$$\begin{aligned} F &= \rho \frac{d}{dt} \int_V -S\nu_0 \Lambda \delta\tau = \rho \frac{d}{dt} \int_V -S\nu_0 \frac{\partial\nu_0}{\partial\lambda} \delta\tau \\ &= \rho \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial\lambda} \int_V -\frac{1}{2} S\nu_0^2 \delta\tau = \rho \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial\lambda} \int_V \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) \delta\tau \\ &= \rho \frac{d\mu}{dt}, \end{aligned} \quad \text{q. c. d.)}$$

Les expressions (4) et (5) des forces qui peuvent agir sur le fluide satisfont d'ailleurs au théorème des forces vives, car on a

$$dT_0 = \sum \frac{\partial T_\mu}{\partial \mu} d\mu + \sum \frac{\partial T_\lambda}{\partial q} dq = \sum \rho_\lambda d\mu + \sum - \frac{\partial T_\lambda}{\partial q} dq$$

ou enfin

$$(6) \quad dT_0 = \sum \rho \frac{d\mu}{dt} d\varphi + \sum - \frac{\partial T_\lambda}{\partial q} dq = \sum F d\varphi + \sum Q dq.$$

Les résultats exposés ci-dessus peuvent être résumés de la manière suivante :

Une masse fluide limitée par des parois au repos et susceptible d'être animée de mouvements cycliques mais irrotationnels est assimilable, en ce qui concerne les réactions de toutes sortes dues à son inertie, à un système cyclique qui admettrait pour coordonnées contrôlables les paramètres de la position des parois et pour vitesses cycliques les flux afférents aux mouvements possibles du fluide.

III.

Maxwell a montré que les forces électromagnétiques et les forces électromotrices d'induction peuvent être déterminées par l'application des équations de Lagrange en assimilant un système de courants électriques à un système mécanique cyclique dont les coordonnées contrôlables seraient les paramètres déterminant la position des corps conducteurs et dont les vitesses cycliques seraient les intensités des courants et en prenant pour l'énergie cinétique du système le potentiel électrodynamique changé de signe, expression appelée pour ces motifs *énergie électrocinétique* du système de courants.

En désignant par T_i l'expression de l'énergie électrocinétique en fonction des intensités des courants, par Q' la force extérieure relative à l'un quelconque q des paramètres qui déterminent la position des conducteurs, par E la force électromotrice qui ferait équilibre à la force électromotrice d'induction relative au courant i ,

on a

$$(4') \quad Q' = - \frac{\partial T_i}{\partial q},$$

$$(5') \quad E = \frac{d}{dt} \frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}}.$$

On connaît, d'autre part, les frappantes analogies qui existent entre les éléments du champ déterminé par des courants électriques et ceux du mouvement d'un fluide parfait incompressible qui occuperait l'espace extérieur aux corps conducteurs (supposés filiformes) et qui serait animé d'un mouvement irrotationnel admettant pour modules de circulation les intensités des courants : identité, à un facteur numérique près, du champ magnétique dû aux courants et du champ des vitesses du fluide ; identité, à un facteur numérique près, des expressions de l'énergie électrocinétique et de l'énergie hydrocinétique ; égalité, *au signe près*, des forces électromagnétiques et des forces exercées par le fluide sur les corps qui y sont baignés.

L'étude qui vient d'être faite du cas hydrodynamique met nettement en lumière la raison de cette différence de signes ; elle tient à ce que, dans l'assimilation du système hydrodynamique à un système cyclique, ce sont les flux qui jouent le rôle des vitesses cycliques, tandis que, d'après les analogies hydro-électriques, ils doivent correspondre aux flux magnétiques, éléments qui, dans la théorie dynamique de Maxwell, jouent le rôle de quantités de mouvement.

La divergence s'accroît encore si l'on compare les expressions des forces F et E données respectivement par les formules (5) et (5'). Dans le système hydrodynamique, les forces F sont nulles lorsque les modules de circulation restent constants et, dans le système électrodynamique, les forces correspondantes E sont nulles lorsque les flux magnétiques $\frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}}$ demeurent constants.

image, on peut, autour de ce dernier point, décrire une sphère assez petite pour qu'un point quelconque pris à son intérieur soit l'image d'un point et d'un seul voisin de a .

2. On a quelquefois admis que la condition précédente était suffisante d'une manière générale, c'est-à-dire que, si elle était vérifiée quels que soient $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, elle entraînait, quels que soient $X_1, X_2, \dots, X_n$, une réponse affirmative aux questions I et II.

Il est pourtant clair, dès le cas d'une variable ($n = 1$), que l'on n'est pas ainsi assuré de remplir la condition I. Si la fonction $X = f(x)$ admet une dérivée première f' toujours positive, l'équation

$$X = f(x)$$

considérée comme équation en x , n'admet jamais plus d'une solution, mais on peut choisir X de manière qu'elle n'en admette aucune, à moins que les deux intégrales

$$(3) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) dx$$

ne soient infinies.

Pour n supérieur à 1, il est visible qu'il ne suffit pas de remplacer la dérivée f' par le déterminant fonctionnel (2). Par exemple, pour la transformation

$$X = f(x), \quad Y = \psi(x) \varphi(y),$$

le déterminant fonctionnel est $f'(x) \psi(x) \varphi'(y)$; on peut, en le supposant supérieur à un nombre positif fixe et même indéfiniment croissant (et cela d'une manière aussi rapide qu'on le veut) avec x ou y , admettre néanmoins que les intégrales (3) sont finies et que, par conséquent, X n'est pas susceptible de prendre toutes les valeurs réelles. Une aire, indéfiniment étendue dans tous les sens, du plan des xy , a alors pour image une aire qui s'allonge indéfiniment dans le sens parallèle à l'axe des Y , mais qui reste comprise entre deux ordonnées fixes.

3. La quantité qu'il convient d'introduire ici, à la place du déterminant fonctionnel, est évidemment l'axe mineur μ de l'ellipse ou de l'ellipsoïde de déformation, c'est-à-dire la plus

petite valeur du rapport

$$\sqrt{\frac{dX_1^2 + dX_2^2 + \dots + dX_n^2}{dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2}},$$

et la condition qu'il y a lieu de se donner à cet égard est :

[Condition (C)], que, μ_ρ désignant le *minimum* de μ sur la sphère

$$(4) \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \rho^2$$

de l'espace e_n , l'intégrale

$$(5) \quad \int_0^\infty \mu_\rho d\rho$$

soit infinie.

Si cette condition est remplie, une ligne de longueur infinie tracée dans e_n ne pourra pas avoir pour image une ligne de longueur finie.

4. Mais la question est loin d'être ainsi résolue. Car, contrairement à ce qui arrive dans le cas d'une variable, on sait que le non-évanouissement du déterminant fonctionnel, dans une région finie quelconque de e_n , n'assure même plus l'unicité. Les fonctions

$$(1') \quad \begin{cases} X_1 = f_1(x_1, x_2), \\ X_2 = f_2(x_1, x_2), \end{cases}$$

étant définies dans une région déterminée (σ) du plan des x_1, x_2 et ayant, dans toute cette région, leur déterminant fonctionnel positif et non nul, une aire s intérieure à σ , limitée par une courbe fermée unique (sans point double) γ peut avoir pour image une aire se recouvrant partiellement elle-même, γ ayant pour image une courbe Γ à points doubles, analogue à celle qui est représentée figure 1 (1). Un même point de cette aire peut alors être l'image commune de plusieurs points de s .

En un mot, les données précédentes ne fournissent aucun renseignement sur la résolubilité des équations (1'), sauf à l'intérieur

(1) Voir, par exemple, GOURSAT, *Cours d'analyse*, t. I, p. 299. — Plusieurs auteurs (LIPSCHITZ, *Lehrbuch der Analysis*, t. II; KNESER, *Math. Ann.*, t. XLV; ANZELÀ, *Rendic. Ac. Bologna*, 24 mai 1903) se sont efforcés de remédier à cette défectuosité, moyennant l'introduction d'autres hypothèses.

de cercles suffisamment petits — dont les méthodes classiques ne font même pas connaître explicitement le rayon (1).

3. Le fait que je me propose d'établir, et qui peut être de quelque utilité dans la discussion d'équations telles que (1), est que les propriétés infinitésimales des fonctions f suffisent au contraire à étudier leur inversion, si elles sont connues dans tout l'espace e_n . L'énoncé est le suivant :

Si μ est différent de zéro (2) en tout point de e_n et si, en outre, la condition (C) (n° 3) est remplie, les propriétés I et II ont lieu : autrement dit, l'inversion des équations (1) est possible et univoque.

Ainsi, une transformation définie à l'intérieur d'une aire peut présenter à l'intérieur de cette aire la singularité décrite au n° 4. Mais, dans ce cas, la transformation ne saurait être, de quelque manière que ce soit, prolongée indéfiniment en dehors de σ , si l'on impose (3) (outre $\mu \neq 0$) la condition (C).

J'ai indiqué, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (séance du 8 janvier 1906), une méthode pour démontrer la propriété précédente, méthode dont je donnerai le principe

(1) Ce rayon est calculé pour $n = 1$ par M. Goursat, *loc. cit.*, p. 41.

(2) La quantité μ est nulle ou différente de zéro en même temps que le déterminant fonctionnel.

(3) Il est à peu près évident que cette dernière restriction (ou une autre analogue) est nécessaire, et que la condition $\mu \neq 0$, même vérifiée dans tout le plan, ne suffit pas à assurer l'unicité.

Soit, par exemple,

$$X_1 = R \cos \theta, \quad X_2 = R \sin \theta,$$

avec

$$R = e^{x_1}, \quad \theta = k\pi \frac{e^{x_2} - e^{-x_2}}{e^{x_2} + e^{-x_2}} = k\pi \tanh x_2,$$

où k est un nombre plus grand que 1. L'image du cercle $x_1^2 + x_2^2 = \rho^2$ aura la forme représentée figure 1 dès que $\tanh \rho$ dépassera la valeur $\frac{1}{k}$.

Il en sera encore de même si, avec la même valeur de R , on fait

$$\theta = e^{x_2} \varphi(x_1) - e^{-x_2} \varphi(x_1) = \text{Sh} [x_2 \varphi(x_1)]$$

[la fonction $\varphi(x_1)$ étant toujours plus grande que 1 et croissant, pour x_1 très grand et négatif, plus vite que e^{-2x_1} , par exemple $\varphi = \text{Ch}(\beta x_1)$]; et dans ce cas le déterminant fonctionnel sera indéfiniment croissant. Il serait constamment égal à 1 si l'on faisait $\theta = x_2 e^{-2x_1}$ (toujours avec $R = e^{x_1}$).

un peu plus loin. J'ai reconnu depuis que la démonstration pouvait se faire d'une manière tout élémentaire : qu'il suffisait de reprendre, avec d'insignifiantes modifications, un raisonnement classique de théorie des fonctions (le raisonnement non modifié est celui qui servirait à démontrer le théorème dans le cas de multiplicités fermées telles que la sphère).

6. Supposons toujours que les n quantités $X_1, X_2, \dots, X_n$ soient des fonctions de $x_1, x_2, \dots, x_n$, fonctions dont le déterminant fonctionnel n'est jamais nul. Tout point a ($a_1, a_2, \dots, a_n$) de l'espace e_n est le centre d'une sphère

$$(6) \quad (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 \leq d^2,$$

telle que deux points distincts pris à l'intérieur de cette sphère ne puissent avoir la même image dans l'espace E_n ; et l'image ($A_1, A_2, \dots, A_n$) de a est le centre d'une sphère

$$(7) \quad (X_1 - A_1)^2 + \dots + (X_n - A_n)^2 \leq D^2,$$

telle que tout point X intérieur à cette sphère soit l'image d'un point et d'un seul intérieur à (6), point qui varie continûment avec X .

Si, en quelque point de l'espace, d était infini, le théorème serait démontré. Nous supposons donc qu'il n'en est pas ainsi.

D'après des raisonnements connus, d et, par suite, D sont des fonctions continues de $a_1, a_2, \dots, a_n$. Lorsque le point a prend toutes les positions possibles à l'intérieur de la sphère de rayon ρ qui a pour centre l'origine des coordonnées, d et D ont chacun un certain minimum (différent de zéro), fonction de ρ .

De même, d et D ont un minimum différent de zéro sur une ligne finie quelconque l décrite par a dans l'espace e_n .

7. Supposons que l soit une ligne continue allant d'un point a à un point b de e_n , et que, d'autre part, son image L dans E_n soit fermée, c'est-à-dire qu'un même point A serve d'image à a et à b . Alors on pourra affirmer que cette ligne est également fermée dans e_n , c'est-à-dire que le point a coïncide avec b , si l'on sait que la valeur de D correspondant à un point c de l et à son image C est supérieure à la plus grande distance de C à un point de L .

8. Cela posé, admettons qu'à deux points distincts a et b de e_n

corresponde la même image A. Joignons ab par une ligne l (continue et sans point double), celle-ci aura pour image une ligne L , partant du point A et y revenant. On peut supposer (ce qui n'est d'ailleurs pas indispensable) que L n'a aucun point double, autrement dit, qu'elle ne contient aucun point A' qui serve d'image commune à deux points a', b' de l , sans quoi il suffirait de substituer A' à A en ayant soin, s'il y a plusieurs points A' , d'en choisir un pour lequel l'arc compris, sur l , entre a' et b' soit le plus petit possible (*); ou encore, on pourrait évidemment faire disparaître le point double A' en modifiant l .

Soit D_0 le minimum de D sur l .

Prenons un point fixe arbitraire O (par exemple l'origine des coordonnées) dans E_n et désignons par L_t (où t est un nombre compris entre zéro et un) l'homothétique de L relativement à O avec le rapport d'homothétie t ; et, de même, par C_t l'homothétique, dans les mêmes conditions, d'un point quelconque C de L (image d'un point c de l). Soit encore λ le maximum de la distance OC. Deux points quelconques de L seront alors à une distance inférieure à 2λ et, par conséquent, d'après le n° 7, on devra avoir, la ligne l étant ouverte,

$$(8) \quad 2\lambda \geq D_0.$$

Donnons à t une valeur quelconque comprise entre l'unité et le nombre t_1 (positif, d'après l'inégalité précédente) qui vérifie la relation

$$\lambda(1 - t_1) = \frac{D_0}{3}.$$

Tout point C_t de L_t sera à une distance de son homothétique C moindre que $\frac{D_0}{3}$ et, par conséquent, sera l'image d'un point parfaitement déterminé de e_n , intérieur à la sphère σ analogue à (6) qui a pour centre c .

Seront également à une distance du point C moindre que D_0 , les points de L_t homothétiques des points situés sur un certain arc de L , à savoir l'arc continu qui comprend le point C et dont tous les points sont à une distance de C moindre que $\frac{2D_0}{3}$. Tout l'arc

(*) Ceci aurait un sens, même si les points A' étaient en nombre infini, l'ensemble qu'ils forment étant manifestement fermé.

ainsi obtenu de L_t correspondra donc à un certain arc de courbe de e_n intérieur à σ .

Chaque point C_t de L_t peut ainsi être déduit, non seulement du point homothétique C , mais d'une infinité d'autres points de L (points suffisamment voisins du premier) et l'on a, par conséquent, une infinité de moyens de trouver le point correspondant de e_n ; mais, en vertu du n° 7 et des hypothèses faites sur t , toutes ces déterminations conduiront au même résultat.

En un mot, à chaque ligne L_t , pour $t \geq t_1$, correspondra une ligne continue l_t de e_n , laquelle variera d'une manière continue avec t . Comme l_t ne sort pas d'une région finie de l'espace e_n , D , sur ces différentes lignes l_t , ne sera jamais inférieur à un certain minimum D' .

Il en résulte que la ligne l_t ne se ferme à aucun moment, car ses deux extrémités, autrement dit les deux points qui ont pour image A_t , varient continûment et, par conséquent, ne sauraient coïncider sans que leur distance soit au préalable devenue inférieure à D' , ce qui est impossible.

9. Soit D_1 le minimum de D sur L_{t_1} : on aura, puisque L_{t_1} ne se ferme pas, l'inégalité analogue à (8)

$$2\lambda t_1 \geq D_1.$$

Déterminons un nombre t_2 par la relation

$$\lambda(t_1 - t_2) = \frac{D_1}{3};$$

t_2 sera positif et nous trouverons par des raisonnements tout semblables aux précédents, pour toute ligne L_t telle que $t_1 \geq t \geq t_2$, une ligne correspondante l_t continue et ouverte de l'espace e_n , ligne qui variera continûment avec t . Il résultera de là, en particulier, l'inégalité

$$2\lambda t_2 \geq D_2,$$

D_2 étant le minimum de D sur l_{t_2} .

On déterminera alors t_3 par la relation

$$\lambda(t_2 - t_3) = \frac{D_2}{3},$$

et ainsi de suite. D'une manière générale, t_p sera déterminé par la

relation

$$(9) \quad \lambda(t_{p-1} - t_p) = \frac{D_{p-1}}{3}$$

(D_{p-1} étant le minimum de D sur l_{p-1}) et sera positif en vertu de l'inégalité

$$2\lambda t_{p-1} \geq D_{p-1}.$$

Pour toute valeur de t comprise entre 1 et t_p , la ligne l_t , ayant pour image L_t , sera définie : ce sera une ligne continue, variant continûment avec t et qui restera toujours ouverte.

10. Cela posé, il va être aisé de faire apparaître une contradiction. On ne pourrait, en effet, imaginer que deux hypothèses :

1° Toutes les lignes l_p resteront, quel que soit p , à distance finie, c'est-à-dire intérieures à une sphère fixe ayant pour centre l'origine des coordonnées dans l'espace e_n .

Il y a contradiction, car, dans ces conditions, D_p resterait supérieur à un nombre fixe et les quantités t_p définies par les relations successives (9) ne pourraient pas être toutes positives.

2° La quantité $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ prend, sur la ligne l_p , des valeurs très grandes pour des valeurs très grandes de p .

Mais cela aussi est impossible. En effet, un point quelconque de L_p est relié à son homothétique pris sur L par une ligne continue (une portion de rayon vecteur) de longueur inférieure à λ . Donc le point correspondant de l'espace e_n est intérieur à la sphère qui a pour centre l'origine et dont le rayon R est donné par la relation

$$\int_{\rho_0}^R \mu_p d\rho = \lambda,$$

μ_p étant, comme nous l'avons dit, le minimum de μ sur la sphère (4).

Donc il est inadmissible que les points a et b , qui ont une même image A , soient distincts. C'est ce que nous voulions établir.

11. Le mode de démonstration que j'avais adopté dans la Note citée, et qui était relatif au seul cas de $n = 2$, était plus compliqué, mais il avait l'avantage de montrer comment se comporte le prolongement d'une transformation telle que (1'), à partir du moment où elle a cessé d'être biunivoque; comment ce prolongement, possible tout d'abord, doit fatalement

se heurter à une impossibilité à mesure qu'on voudra l'étendre indéfiniment.

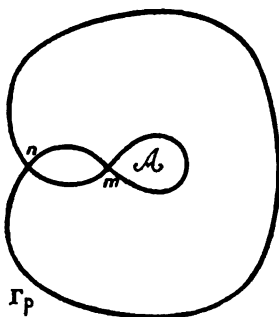
Soit $n = 2$, de sorte que e_n et E_n sont des plans. Supposons toujours que le déterminant fonctionnel des seconds membres des équations

$$(1') \quad \begin{cases} X_1 = f_1(x_1, x_2) \\ X_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

soit positif et non nul, et considérons la courbe Γ_ρ , image du cercle $\gamma_\rho(x_1^2 + x_2^2 = \rho^2)$, cercle dont le rayon sera, pour la commodité du langage, considéré comme représentant le temps. C'est une courbe fermée dont la tangente varie continûment et à la courbure de laquelle on peut assigner une limite supérieure dès qu'on connaîtra une limite supérieure de ρ . X_1 et X_2 étant donnés, le nombre des solutions des équations (1') à l'intérieur de γ_ρ est égal à l'indice (au sens de Gauss) du point (X_1, X_2) par rapport à Γ_ρ . L'indice d'un même point va toujours en croissant lorsque ρ croît.

Si, à partir d'une certaine valeur ρ_0 de ρ , cet indice peut devenir supérieur à 1, la ligne Γ_ρ devra présenter des points doubles. C'est la forme représentée figure 1 et (au moins pour ρ peu supérieur à ρ_0) Γ_ρ délimitera au moins une aire intérieure telle que $\mathcal{A}$ (fig. 1).

Fig. 1.



Appelons *boucle* le contour fermé partiel formé par la partie de Γ_ρ qui part d'un point double (*sommet* de la boucle) et y revient. Tout point double partage Γ_ρ en deux boucles. Une boucle sera dite *simple* si, considérée en elle-même, elle n'admet aucun point double. L'aire $\mathcal{A}$ est limitée par une boucle simple de sommet m (fig. 1).

Les tangentes en un point double déterminent quatre angles (qui peuvent être égaux à 0 ou à π) et les arcs de courbes correspondants, au voisinage de ce point, déterminent quatre angles curvilignes. Nous appellerons *extérieur* celui de ces quatre angles où l'indice (relatif au contour complet) est le plus petit; *intérieur*, celui où il est le plus grand (ces deux indices extrêmes différant de deux unités); *latéraux*, ceux où il a la valeur intermédiaire, l'un de ces latéraux étant à *droite* et l'autre à *gauche*, par rapport à une flèche allant de l'angle extérieur à l'angle intérieur.

Les deux boucles que détermine le point double ont pour angles aux sommets, l'une l'angle extérieur, l'autre l'angle intérieur, à l'exclusion des latéraux (comme on le reconnaît en remarquant que l'indice relatif au contour total est égal à la somme des indices relatifs aux deux boucles). Nous les appellerons l'une *extérieure*, l'autre *intérieure*, suivant la nature de leurs angles aux sommets.

La boucle qui délimite l'aire $\mathcal{A}$ (*fig. 1*) est, dans cette terminologie, une boucle simple extérieure. L'indice γ est plus petit que dans les régions voisines.

Nous allons prouver que, sur notre contour mobile, une telle boucle extérieure est indestructible. Tous les contours Γ_ρ , pour $\rho > \rho_0$, admettront de telles boucles extérieures, et ces boucles successives seront intérieures les unes aux autres.

Pour le démontrer, supposons d'abord que les f soient des fonctions analytiques, n'ayant pas à distance finie de points singuliers. Dans ces conditions, Γ_ρ ne pourra présenter qu'un nombre fini de points doubles, et le nombre ou la disposition de ceux-ci ne changeront qu'un nombre fini de fois dans un temps fini (c'est-à-dire dans un intervalle fini de variations de ρ).

D'une manière générale, les points doubles d'un contour fermé régulier qui se déforme ne peuvent apparaître ou disparaître que de deux façons :

1° Par une boucle infiniment petite : tel est le cas d'un limaçon de Pascal, considéré comme podaire d'un cercle par rapport à un point, lorsque ce dernier passe de l'intérieur à l'extérieur du cercle ou inversement.

Cette hypothèse est à rejeter ici, car la boucle infiniment petite aurait sa courbure infinie, ce que nous avons remarqué être impossible.

2° Par un biangle infiniment petit, un biangle étant un contour fermé partiel de Γ_ρ qui présente deux points anguleux (sommets du biangle), points doubles de Γ_ρ : par exemple, le contour de la figure 1 présente un biangle de sommets m, n .

Un biangle peut être extérieur, ou intérieur, ou latéral, suivant la nature de ses angles aux sommets, nature qui est la même pour les deux sommets si le biangle est infiniment petit, et qui ne change pas par une déformation continue.

Il est impossible que les deux sommets d'un biangle *latéral* soient les deux seuls points doubles du contour (puisqu'on aurait ainsi des boucles latérales). Si l'on enlève du contour un biangle extérieur, il reste deux boucles intérieures, et inversement.

Enfin, dans le cas qui nous occupe, où le contour va toujours en s'étendant et les indices toujours en augmentant, un biangle qui naît ne peut pas être extérieur, et un biangle qui disparaît ne peut pas être intérieur. Cela tient à ce que, dans le premier cas, la région qui prend naissance doit avoir un indice plus grand, et, dans le second, la région qui disparaît, un indice plus petit que l'une au moins des régions avoisinantes.

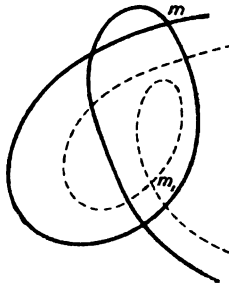
12. Cela posé, reprenons la boucle simple extérieure dont nous avons noté l'existence pour ρ très peu supérieur à ρ_0 :

1° Si le point double m , sommet de la boucle, ne disparaît pas, et si aucun autre point double ne naît sur le contour de la boucle, celle-ci ne cessera pas d'être simple et extérieure. De plus, toutes les boucles successives ainsi obtenues seront intérieures les unes aux autres, puisque le contour se déplace toujours vers le côté où l'indice diminue.

2° Si, à partir d'une certaine valeur $\rho_1 > \rho_0$, la boucle, jusque-là simple, présente deux points doubles ⁽¹⁾, ceux-ci ne peuvent naître par biangle latéral (puisque'ils ne pourraient alors être les premiers), ni par biangle extérieur (lequel ne peut que disparaître et non pas naître). Ils forment donc un biangle intérieur et donnent, par conséquent, lieu à deux boucles extérieures. Celle de ces boucles qui ne contient pas le point m (sommet de la boucle primitive) est simple : ce sera elle que l'on considérera pour $\rho > \rho_1$ au lieu et place de la première.

3° Si, pour une valeur $\rho_2 > \rho_0$, le point double m disparaît, cela ne peut être que par biangle latéral (puisque l'angle *extérieur* en m correspond à une boucle simple). Si ce biangle devient infiniment petit, c'est que l'une des branches qui se croisent en m , après être sortie de la boucle, y pénètre

Fig. 2.



à nouveau immédiatement (*fig. 2*) ⁽²⁾. Mais il est clair qu'elle doit en sortir ultérieurement et son point de sortie le plus rapproché (m_1 , *fig. 2*) est le sommet d'une nouvelle boucle simple extérieure ⁽³⁾.

⁽¹⁾ Nous supposons, pour plus de commodité, que deux apparitions ou disparitions de points doubles ne peuvent se produire à la fois pour une même valeur de ρ . Il est clair qu'il n'y a là qu'une simplification de langage, dont le raisonnement est indépendant en réalité.

⁽²⁾ La ligne pleine représente la forme du contour pour $\rho < \rho_2$, et la ligne ponctuée cette même forme pour $\rho > \rho_2$.

⁽³⁾ On peut constater directement que Γ_ρ ne peut avoir de boucle simple intérieure. Car, comme précédemment, une telle boucle ne pourrait commencer à exister que : 1° si elle naît, son sommet apparaissant par un biangle, mais alors ce biangle serait intérieur et la boucle extérieure; 2° si, une fois formée, elle devenait simple par disparition de points doubles sur son contour, mais cette disparition ne se ferait que par biangle extérieur, et supposerait, contrairement à l'hypothèse, une boucle simple intérieure préexistante.

Donc, l'indestructibilité de la boucle simple extérieure est assurée dans tous les cas.

13. Jusqu'à ce point, d'après ce qui précède, notre raisonnement n'est nullement un raisonnement par l'absurde. Il existe des transformations planes, à déterminant fonctionnel constamment positif, et pour lesquelles la déformation du contour Γ_ρ présente les phénomènes que nous venons d'étudier.

Supposons maintenant que ρ augmente indéfiniment. Nous aurons une série de boucles simples, intérieures les unes aux autres. Il existera, dès lors, au moins un point P du plan des X_1, X_2 qui sera intérieur à tous ces contours.

Or, dans ces conditions, les points d'intersection de ceux-ci avec une droite issue de P décriraient sur cette droite un segment (ou une série de segments) de longueur finie, correspondant à une augmentation indéfinie de ρ , contrairement à l'hypothèse.

La contradiction est donc mise en évidence, et la boucle primitive ne peut prendre naissance.

14. Le raisonnement précédent serait mis en défaut pour des transformations non analytiques, parce que les points doubles pourraient être en nombre infini ou se modifier une infinité de fois dans un temps fini.

Mais on peut le rétablir par des conventions convenables.

Soit, comme tout à l'heure, ρ le rayon vecteur, et soit θ l'angle polaire du plan des x_1, x_2 . Soient α un angle du premier quadrant pris une fois pour toutes (par exemple $\alpha = 10^\circ$), ϵ un nombre positif. Si ce dernier est suffisamment petit [la limite supérieure de ce nombre pouvant être assignée lorsqu'on connaît une limite supérieure (ρ) de ρ]:

a. Tout point double de Γ_ρ , correspondant à deux valeurs θ_1, θ_2 de θ , et pour lequel les deux branches se coupent sous un angle compris entre α et $\pi - \alpha$, est isolé, en ce sens qu'il ne peut, ni sur le même contour Γ_ρ , ni sur $\Gamma_{\rho'}$, pour $|\rho - \rho'| > \epsilon$, exister plus d'un point double correspondant à deux valeurs θ'_1, θ'_2 de θ telles que $|\theta_1 - \theta'_1| < \delta, |\theta_2 - \theta'_2| < \delta$, où δ est une quantité que l'on peut assigner en fonction de (ρ).

Le point double en question de $\Gamma_{\rho'}$ correspond à un point double parfaitement déterminé de Γ_ρ .

b. Si, au contraire, l'angle au point double est compris entre 0 et α , ou entre π et $\pi - \alpha$, il pourra arriver que, dans un certain cas intervalle de variation de θ autour de l'une des deux valeurs de l'angle polaire correspondant à ce point (*dépendance* du point double), les deux branches restent à une distance moindre que ϵ .

Le point double en question pourra alors appartenir à une *série* de points doubles, en appelant *série* un ensemble de points doubles qui sont dans la dépendance les uns des autres.

Toute série (même d'une infinité) de points doubles a d'ailleurs deux

points doubles extrêmes déterminés. Elle sera, au point de vue du raisonnement, entièrement assimilable à un seul point double ou à deux, suivant que les deux portions de contours qui se croisent changeront ou non de côté l'une par rapport à l'autre au passage de cette série. Dans le second cas, on pourra toujours dire si cette série est assimilable à un biangle *extérieur, intérieur ou latéral*.

Enfin, on pourra définir les conditions dans lesquelles un point double P' (ou une série de point doubles) de $\Gamma_{\rho'}$ ($0 < \rho' - \rho < \varepsilon$) sera dit *dérivé* d'un point double P de Γ_{ρ} (ou d'une série de points doubles).

Moyennant ces conventions, rien n'empêchera de raisonner comme nous l'avons fait pour les transformations analytiques.

15. Notre conclusion est, comme on le voit, liée de la manière la plus absolue à ce fait que la transformation est considérée dans le plan *complet* ⁽¹⁾. Elle ne subsisterait plus nécessairement dans une région limitée par une ligne quelconque Λ , à moins que l'on ne possède d'autres données; que l'on ne connaisse, par exemple, la propriété d'unicité pour les points qui correspondent à des points de Λ .

La conclusion est évidente sur la sphère (notre démonstration se confondant alors, comme nous l'avons dit, avec une démonstration classique).

Par contre, elle ne subsiste pas sur les variétés multiplement connexes, telles qu'un tore, ou un cylindre de révolution indéfini. Sur ce dernier, par exemple, si z et θ sont (avec le rayon α du cylindre) les coordonnées semi-polaires, la transformation

$$\begin{cases} z; & \frac{z}{p}, \\ 0; & p\theta \end{cases}$$

(p étant un entier quelconque) n'est pas biunivoque, quoique μ soit constant.

⁽¹⁾ Ajoutons que l'unicité peut cesser dès que $\int_0^{\infty} \mu_r d\rho$ est fini, si lentement que μ décroisse, à cette condition près. Il suffira, par exemple, de prendre (en employant la même notation que dans la note de la page 74) $\theta = x_1$, en choisissant pour R une fonction constamment croissante de x_1 , coïncidant, pour les valeurs négatives de x_1 , avec

$$R(x_1) = \alpha + \int_{-x_1}^{\infty} \mu_r d\rho \quad (\alpha > 0).$$

16. Quant à la *possibilité* de l'inversion, elle résulte de considérations toutes semblables à celles qui ont été précédemment développées, mais plus simples encore et presque évidentes.

Soient O l'origine des coordonnées de E_n , correspondant, pour simplifier, à l'origine des coordonnées o de e_n ; A un point quelconque de E_n . Joignons OA . Le cercle (γ) de centre O intercepte sur OA un segment OO_1 , qui est l'image d'un arc de courbe oo_1 de e_n . Le cercle (γ) de centre O_1 intercepte un segment de $O_1 O_2$, image d'un arc $o_1 o_2$ de e_n , et ainsi de suite.

Si les points successifs o_n restent à distance finie, les segments $O_n O_{n+1}$ sont tous plus grands qu'une longueur fixe. Mais, dans le cas contraire, nous savons que la ligne $O O_1 O_2 \dots O_n \dots$ doit également avoir une longueur infinie.

Donc, en toute hypothèse, l'un des segments $O_n O_{n+1}$ comprend le point A , et celui-ci est l'image d'un point de e_n .

17. Remarquons, pour finir, que les hypothèses de dérivabilité faites en commençant sur nos fonctions f_i ne sont nullement nécessaires. Il suffit de supposer ces fonctions *continues*, et d'imposer les conditions suivantes :

A. Tout point a de e_n est le centre d'une sphère σ_a telle que deux points distincts intérieurs à cette sphère ne puissent avoir la même image.

B. L'image de tout point a de e_n est (dans E_n) le centre d'une sphère telle que tout point intérieur à cette sphère soit l'image d'un point intérieur à σ_a .

C. Une ligne joignant l'origine à un point indéfiniment éloigné dans e_n ne peut avoir pour image une ligne rectifiable et de longueur finie de E_n .

Les deux premières reviennent à dire que le résultat que l'on se propose de démontrer est supposé vrai *localement*, c'est-à-dire au voisinage d'un point quelconque.

REMARQUES SUR QUELQUES THÉORÈMES D'EXISTENCE;

Par M. E. GOURSAT.

1. En démontrant, d'après Cauchy, l'existence d'une intégrale de l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \quad p = f(x, y, z, q),$$

se réduisant, pour $x = x_0$, à une fonction donnée $\varphi(y)$ de y , sous les conditions habituelles que je ne rappelle pas, on s'attache uniquement à prouver que l'on peut obtenir un développement en série entière qui satisfait formellement à l'équation (1), et qui est convergent tant que les modules des différences $x - x_0, y - y_0$ restent inférieurs à certaines limites. Il semble, d'après cela, que l'existence de la fonction intégrale n'est établie que dans un domaine de valeurs des variables complexes défini par les conditions

$$|x - x_0| \leq r, \quad |y - y_0| \leq r',$$

r et r' étant deux nombres positifs. Mais il peut se faire que la fonction donnée $\varphi(y)$ soit holomorphe en dehors du cercle de rayon r' décrit du point y_0 pour centre dans le plan de la variable y . Il est bien facile, comme nous allons le voir, de compléter la démonstration de façon à montrer que l'existence de la fonction intégrale est assurée dans un domaine plus étendu que le précédent.

2. Nous présenterons d'abord quelques remarques bien simples qui nous seront utiles. Soit $F(x, y)$ une fonction analytique des deux variables complexes x et y , holomorphe lorsque les variables x et y sont assujetties respectivement à rester dans deux domaines Ω_x et Ω_y , limités par une ou plusieurs courbes fermées, et comprenant leurs frontières; toutes les dérivées partielles de $F(x, y)$ sont alors holomorphes dans les mêmes domaines. Lorsque les deux domaines Ω_x, Ω_y se composent de deux cercles,

la formule de Taylor fournit pour $F(x, y)$ un développement en série entière valable dans tout cet ensemble.

Considérons encore le cas où un seul domaine, $\mathcal{D}_x$ par exemple, est un cercle de centre x_0 et de rayon R , tandis que le domaine $\mathcal{D}_y$ est limité par une ou plusieurs courbes fermées de forme quelconque. Si l'on donne à la variable y une valeur déterminée $\bar{y}$ dans le domaine $\mathcal{D}_y$, la fonction $F(x, \bar{y})$ de la variable x est holomorphe dans le cercle de rayon R et de centre x_0 ; il s'ensuit que la fonction $F(x, y)$ peut être représentée par un développement en série entière ordonnée suivant les puissances de $x - x_0$:

$$(2) \quad F(x, y) = P_0(y) + P_1(y)(x - x_0) + \dots + P_n(y)(x - x_0)^n + \dots$$

dont les coefficients sont des fonctions holomorphes de y dans le domaine $\mathcal{D}_y$. Le coefficient $P_n(y)$ est égal en effet au quotient

$$\frac{1}{1.2.3 \dots n} \left(\frac{\partial^n F}{\partial x^n} \right)_{x=x_0}.$$

Le développement (2) est convergent tant que les variables x et y restent respectivement dans leurs domaines, et la formation de cette série exige seulement que l'on connaisse les expressions des dérivées successives par rapport à x de la fonction $F(x, y)$, pour $x = x_0$, lorsque y décrit le domaine $\mathcal{D}_y$.

Soient y_0 un point intérieur au domaine $\mathcal{D}_y$, et ρ un nombre positif tel que le cercle de rayon ρ et de centre y_0 soit tout entier dans $\mathcal{D}_y$. A l'intérieur de ce cercle, les fonctions $P_0(y)$, $P_1(y)$, $\dots$, $P_n(y)$, $\dots$ peuvent être développées en séries entières ordonnées suivant les puissances de $y - y_0$ et le développement (2) peut être remplacé par un développement en série entière ordonné suivant les puissances de $x - x_0$ et de $y - y_0$:

$$(3) \quad F(x, y) = \sum_i \sum_k A_{ik} (x - x_0)^i (y - y_0)^k;$$

mais ce nouveau développement n'est valable que dans une partie du domaine $\mathcal{D}_y$, tandis que le précédent (2) est valable dans tout ce domaine.

Inversement, supposons que l'on ait obtenu, pour une fonction des deux variables x, y , un développement en série de la forme (2),

dans lequel les coefficients $P_0(y), P_1(y), \dots, P_n(y), \dots$ sont des fonctions holomorphes de y dans le domaine $\mathcal{D}_y$. Supposons de plus qu'en remplaçant chacune de ces fonctions $P_n(y)$ par son développement en série entière suivant les puissances de $y - y_0$ (y_0 étant un point quelconque intérieur à $\mathcal{D}_y$), la série entière (3) obtenue soit convergente pourvu que l'on ait

$$|x - x_0| \leq R, \quad |y - y_0| \leq \rho,$$

R et ρ étant deux nombres positifs, dont le premier R est indépendant de y_0 . Il suit de là que la série (2) est convergente lorsque la variable x est dans le cercle de rayon R décrit du point x_0 pour centre, la variable y restant dans le domaine $\mathcal{D}_y$, et que la somme de cette série est une fonction holomorphe dans ce domaine. Il en est ainsi en effet lorsque y est dans le voisinage du point y_0 , et ce point y_0 est un point quelconque de y .

3. Tout ceci s'étend immédiatement aux fonctions analytiques d'un nombre quelconque de variables. Soit

$$u = F(x_1, x_2, \dots, x_p; y_1, \dots, y_q)$$

une fonction de $p + q$ variables x_i, y_k

$$(i = 1, 2, \dots, p; k = 1, 2, \dots, q).$$

que nous partagerons en deux groupes jouant un rôle dissymétrique. Chacune des variables x_i décrit un cercle de centre fixe x_i^0 et de rayon r_i , tandis que chacune des variables y_k décrit un domaine $\mathcal{D}_k$, limité par une ou plusieurs courbes de forme arbitraire; nous supposons tous ces domaines fermés, c'est-à-dire comprenant leurs limites. Si la fonction u est holomorphe lorsque les variables x_i, y_k décrivent leurs domaines respectifs, elle peut être représentée dans tout cet ensemble de domaines par une série entière ordonnée suivant les puissances de $x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, \dots, x_p - x_p^0$,

$$(4) \quad u = \sum A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p} (x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} (x_2 - x_2^0)^{\alpha_2} \dots (x_p - x_p^0)^{\alpha_p},$$

les coefficients $A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p}$ étant des fonctions holomorphes des variables y_k , quand elles restent respectivement dans les domaines $\mathcal{D}_k$,

$\mathbb{D}_2, \dots, \mathbb{D}_q$. Ces coefficients s'expriment encore au moyen des dérivées partielles de la fonction u par rapport aux seules variables x_i , où l'on aurait remplacé après la différentiation x_i par x_i^0 . La réciproque s'énonce comme plus haut et s'établit de la même façon.

Pour appliquer ces considérations au domaine réel, il suffit de supposer que les membres $x_1^0, \dots, x_p^0$ sont tous réels, et que les différents domaines $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, \dots, \mathbb{D}_q$ se réduisent à des bandes rectangulaires infiniment minces comprenant un segment de l'axe réel dans le plan de la variable correspondante. Reprenons, par exemple, une fonction $z = F(x, y)$ des deux variables x, y , que nous supposons holomorphe lorsque x reste dans un cercle de rayon R et de centre a (a étant réel), et que la variable y reste dans le rectangle obtenu en faisant varier la partie réelle de y de b à c (b et c étant deux nombres réels), et la partie réelle de $\frac{y}{i}$ de $-\epsilon$ à $+\epsilon$. Admettons de plus que cette fonction prend une valeur réelle quand on donne à x une valeur réelle, comprise entre $a - R$ et $a + R$, et à y une valeur réelle, comprise entre b et c . Alors l'équation

$$z = F(x, y)$$

représente, par rapport à un système de trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz , une bande de surface se projetant à l'intérieur du rectangle limité par les quatre droites

$$x = a - R, \quad x = a + R, \quad y = b, \quad y = c.$$

Pour tout point pris dans ce rectangle, z est égal à la somme d'une série convergente de la forme (2), $P_0, P_1, \dots, P_n, \dots$ étant des fonctions continues de y entre b et c . La série de Taylor ne représenterait la surface que dans un domaine bien moins étendu, si la fonction $F(x, y)$, considérée comme fonction de y , avait des points singuliers voisins de l'axe réel dans le plan de la variable y .

Considérons par exemple la fonction $z = \text{Log}(1 + x + y)$; si on la développe en série entière ordonnée suivant les puissances de x et de y , la série obtenue ne sera convergente que si l'on a

$$|x| + |y| < 1.$$

Mais on a aussi

$$\begin{aligned} \text{Log}(1+x+y) &= \text{Log}(1+y) \\ &+ \frac{x}{1+y} - \frac{x^2}{2(1+y)^2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{x^n}{(1+y)^n} \pm \dots \end{aligned}$$

et la nouvelle série est convergente si y est positif, et $|x|$ inférieur à l'unité.

4. Reprenons maintenant l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \quad p = f(x, y, z, q),$$

et supposons que l'on veuille obtenir une intégrale de cette équation se réduisant, pour $x = x_0$, à une fonction donnée $\varphi(y)$. En posant $z = \varphi(y) + u$, l'équation proposée devient

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f\left[x, y, \varphi(y) + u, \varphi'(y) + \frac{\partial u}{\partial y}\right],$$

et l'on est ramené à trouver une intégrale de la nouvelle équation, s'annulant, quel que soit y , pour $x = x_0$. Pour ne pas multiplier les notations, nous partirons de l'équation (1) en supposant que la fonction initiale $\varphi(y)$ est $\varphi(y) = 0$, et nous supposerons que la fonction $f(x, y, z, q)$ des quatre variables x, y, z, q est holomorphe lorsque les modules de $x - x_0, z, q$ ne dépassent pas certaines valeurs positives a, b, c , tandis que la variable y reste dans un domaine fermé Ω_y , limité par une ou plusieurs courbes. Le second membre $f(x, y, z, q)$ peut alors être développé en série entière ordonnée suivant les puissances de $x - x_0$, de z et de q , dont les coefficients sont des fonctions holomorphes de y dans le domaine Ω_y

$$f = \sum P_{\alpha\beta\gamma}(x - x_0)^\alpha z^\beta q^\gamma.$$

Imaginons de même que l'on développe l'intégrale cherchée, qui s'annule pour $x = x_0$, suivant les puissances de $x - x_0$,

$$(5) \quad z = \varphi_1(y)(x - x_0) + \varphi_2(y)(x - x_0)^2 + \dots + \varphi_n(y)(x - x_0)^n + \dots$$

En substituant cette série à la place de z dans l'équation (1), et en remplaçant de même q par

$$\varphi'_1(y)(x - x_0) + \varphi'_2(y)(x - x_0)^2 + \dots + \varphi'_n(y)(x - x_0)^n + \dots,$$

on obtient deux séries entières en $x - x_0$; en écrivant qu'elles sont identiques, on détermine de proche en proche les coefficients $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, au moyen des coefficients $P_{\alpha\beta\gamma}$ par les seules opérations d'addition, de multiplication, et de *différentiation*. Tous les coefficients de la série obtenue (5), qui satisfait formellement à l'équation (1), sont donc des fonctions holomorphes de y dans le domaine $\mathfrak{D}_y$.

THÉOREME. — Soit $\mathfrak{D}'_y$ un domaine quelconque intérieur à $\mathfrak{D}_y$, limité par une ou plusieurs courbes n'ayant aucun point commun avec la frontière de $\mathfrak{D}_y$. A ce domaine $\mathfrak{D}'_y$ on peut associer un nombre positif R tel que la série (5) soit convergente pour toute valeur de y dans $\mathfrak{D}'_y$, pourvu que l'on ait $|x - x_0| \leq R$, et représente une fonction holomorphe des deux variables x et y dans ces domaines.

Nous rappellerons d'abord le théorème d'existence de Cauchy, sous sa forme habituelle. Soit $\varphi(x, y, z, q)$ une fonction holomorphe des variables x, y, z, q , dans le domaine défini par les inégalités

$$(6) \quad |x - x_0| \leq a, \quad |y - y_0| \leq \rho, \quad |z| \leq b, \quad |q| \leq c;$$

l'équation

$$(7) \quad p = \varphi(x, y, z, q)$$

admet une intégrale holomorphe dans le domaine du point (x_0, y_0) , se réduisant à zéro pour $x = x_0$, quel que soit y .

On a une limite supérieure des modules des coefficients de la série qui représente cette intégrale en considérant l'équation auxiliaire

$$(8) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{M}{\left(1 - \frac{x - x_0}{a}\right) \left(1 - \frac{y - y_0}{\rho}\right) \left(1 - \frac{z}{b}\right) \left(1 - \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial y}\right)},$$

où M est une limite supérieure du module de $\varphi(x, y, z, q)$ dans le domaine défini par les inégalités (6). Cette équation auxiliaire admet elle-même une intégrale s'annulant pour $x = x_0$, et cette intégrale est holomorphe dans un certain domaine

$$|x - x_0| \leq R, \quad |y - y_0| \leq r,$$

R et r étant des nombres positifs qui ne dépendent que de M , a , b , c , ρ . L'intégrale de l'équation (7) est *a fortiori* holomorphe dans le même domaine.

Cela posé, soit M un nombre supérieur à $|f(x, y, z, q)|$ lorsque la variable y décrit le domaine $\mathcal{D}_y$, tandis que les modules de $x - x_0$, z , q ne dépassent pas les limites a , b , c ,

$$|x - x_0| \leq a, \quad |z| \leq b, \quad |q| \leq c.$$

Prenons en même temps un nombre positif ρ tel que le cercle de rayon ρ décrit d'un point quelconque de $\mathcal{D}'_y$ pour centre soit tout entier à l'intérieur de $\mathcal{D}_y$. Les nombres a , b , c , ρ , M étant ainsi définis, soit y_0 un point quelconque de $\mathcal{D}'_y$; d'après le théorème que nous venons de rappeler, l'équation (1) admet une intégrale holomorphe dans le domaine du point (x_0, y_0) , se réduisant à zéro pour $x = x_0$. Cette intégrale est représentée par un développement en série entière

$$(9) \quad z = \sum C_{\alpha\beta} (x - x_0)^\alpha (y - y_0)^\beta$$

convergente pour

$$|x - x_0| \leq R, \quad |y - y_0| \leq r.$$

Si l'on ordonne cette série suivant les puissances de $x - x_0$, la nouvelle série obtenue est forcément identique à la série (5), puisqu'elle doit aussi satisfaire formellement à l'équation (1). Le nombre R étant indépendant de y_0 , il suit de là qu'inversement la série (5) est convergente pourvu que l'on ait

$$|x - x_0| \leq R,$$

lorsque y décrit la région $\mathcal{D}'_y$, et représente une fonction holomorphe dans ce domaine. C'est la proposition que l'on voulait établir.

5. Il n'est nullement évident qu'une fonction analytique des deux variables x, y qui, pour $x = x_0$, se réduit à la fonction $\varphi(y)$ de la seule variable y holomorphe dans un domaine $\mathcal{D}_y$, soit aussi une fonction holomorphe par rapport aux deux variables x et y lorsque x décrit un cercle de rayon $r > 0$ et de centre x_0 , et que y

décrit un domaine $\mathcal{O}'_y$ intérieur à $\mathcal{O}_y$, aussi petit que soit le rayon r . Par exemple, la fonction

$$z = y^2 + x \operatorname{Log} y$$

se réduit, pour $x = 0$, à une fonction holomorphe dans tout le plan, et cependant ce n'est pas une fonction holomorphe des variables x et y dans le domaine défini par les inégalités $|x| \leq r$, $|y| \leq \rho$, aussi petits que soient les nombres positifs r et ρ .

La propriété qui vient d'être démontrée a son origine dans cette circonstance que les coefficients des diverses puissances de $x - x_0$ dans le développement cherché s'obtiennent par des additions, multiplications et différentiations. On ne peut introduire ainsi de singularités n'appartenant pas aux fonctions dont on est parti. Il n'en serait plus de même si ces coefficients se déterminaient par l'intégration d'équations différentielles. Ce cas peut se présenter effectivement quand on veut déterminer une intégrale d'une équation aux dérivées partielles passant par une caractéristique donnée (1). Considérons par exemple l'équation linéaire.

$$p z + q + Y z + Y_1 x = 0,$$

Y et Y_1 étant des fonctions holomorphes de la variable y dans un domaine comprenant un segment ab de l'axe réel ($a < b$), et prenant des valeurs réelles tout le long de cet axe. La droite $x = 0$, $z = 0$ est une caractéristique; il existe donc une infinité d'intégrales réelles $z = F(x, y)$ se réduisant à zéro pour $x = 0$, mais il peut se faire qu'il n'en existe aucune qui soit holomorphe lorsque l'on a $|x| < r$, quelque petit que soit le nombre positif r , et que la variable y reste dans un domaine comprenant le segment ab de l'axe réel dans le plan de la variable y . En effet, si l'on cherche à développer une intégrale s'annulant pour $x = 0$ suivant les puissances de x ,

$$(10) \quad z = x \varphi_1(y) + x^2 \varphi_2(y) + \dots,$$

on a, pour déterminer le premier coefficient $\varphi_1(y)$, l'équation différentielle de Riccati

$$\varphi'_1(y) + \varphi_1^2 + Y \varphi_1 + Y_1 = 0,$$

(1) L'étude de ce cas fera l'objet d'un prochain Mémoire.

que l'on ramène à une équation différentielle linéaire

$$u' + Yu' + Y_1 = 0,$$

en posant $\varphi_1 = \frac{u'}{u}$. Si toutes les intégrales réelles de l'équation linéaire en u ont au moins une racine entre a et b , toute intégrale réelle de l'équation en φ_1 aura au moins un pôle dans le même intervalle. Le développement (10) ne pourra donc s'appliquer à tout l'intervalle (a, b) , aussi petit que soit $|x|$.

6. Nous allons vérifier le théorème général qui précède dans un cas particulier, au moyen des méthodes habituelles du calcul des limites. Considérons l'équation aux dérivées partielles

$$(11) \quad P = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{z}{c}\right)\left(1 - \frac{q}{\rho}\right)} - M,$$

où M, a, b, c, ρ sont des nombres positifs. D'après le théorème d'existence de Cauchy, tel qu'on l'énonce habituellement, on peut affirmer que cette équation admet une intégrale $Z(x, y)$ holomorphe dans le domaine du point $x = 0, y = 0$, et se réduisant identiquement à zéro pour $x = 0$. Nous pouvons énoncer une proposition plus précise en observant que le domaine $\mathcal{D}_y$ est ici un cercle ayant pour centre l'origine :

A tout nombre positif $\theta < 1$ on peut associer un autre nombre positif η tel que l'intégrale $Z(x, y)$ soit sûrement holomorphe lorsque les modules des variables x et y ne dépassent pas les nombres θb et η respectivement.

Pour démontrer directement cette proposition, il suffit de compléter sur certains points la démonstration que j'ai donnée (1) antérieurement des théorèmes généraux d'existence. On peut supposer, pour simplifier un peu les calculs, $b = a$, car il suffit d'une transformation telle que $y = \frac{b}{a} y'$, y' étant la nouvelle variable, pour être ramené à ce cas. Nous pouvons aussi remplacer l'équa-

(1) *Bulletin de la Société mathématique. — Cours d'Analyse mathématique, t. II, p. 360 et suivantes.*

tion (11) par une équation auxiliaire

$$(12) \quad p = \frac{M}{\left(1 - \frac{\frac{x}{\alpha} + y}{a}\right) \left(1 - \frac{z}{c}\right) \left(1 - \frac{q}{\rho}\right)} - M,$$

α étant un nombre positif inférieur à l'unité, car le second membre de la nouvelle équation est une fonction majorante pour le second membre de l'équation (11). Le développement en série entière de l'intégrale $Z(x, y)$ de l'équation (11) qui se réduit à zéro pour $x=0$ est certainement convergent dans le même domaine que le développement en série entière de l'intégrale $Z_1(x, y)$ de l'équation (12) qui est identiquement nulle pour $x=0$, et celle-ci à son tour est certainement convergente dans le même domaine que toute autre intégrale de la même équation (12) représentée par un développement en série entière dont tous les coefficients sont des nombres réels et positifs.

Cela étant, cherchons une intégrale de l'équation (12) qui soit fonction de la seule variable $X = \frac{x}{\alpha} + y$. Si l'on a

$$z = f\left(\frac{x}{\alpha} + y\right) = Z(X),$$

on en déduit

$$p = \frac{1}{\alpha} \frac{dZ}{dX}, \quad q = \frac{dZ}{dX},$$

et l'équation (12) devient

$$\frac{1}{\alpha} \frac{dZ}{dX} = \frac{M}{\left(1 - \frac{X}{a}\right) \left(1 - \frac{Z}{c}\right) \left(1 - \frac{1}{\rho} \frac{dZ}{dX}\right)} - M,$$

ce qu'on peut encore écrire

$$(13) \quad \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{M}{\rho}\right) \frac{dZ}{dX} = \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{dZ}{dX}\right)^2 + \frac{M}{\left(1 - \frac{X}{a}\right) \left(1 - \frac{Z}{c}\right)} - M.$$

Si le nombre positif α est inférieur à $\frac{\rho}{M}$, l'équation (13) admet une intégrale holomorphe dans le domaine de l'origine, se réduisant à zéro, ainsi que sa dérivée première, pour $X=0$, et repré-

sentée par une série entière dont tous les autres coefficients sont réels et positifs. Cela suffit pour prouver que l'intégrale $Z(x, y)$ est holomorphe dans le voisinage des valeurs $x = 0, y = 0$. Pour compléter la démonstration, nous allons étudier le domaine de convergence de l'intégrale de l'équation (13), que nous venons de définir, considérée comme fonction de X et de α .

Cette équation (13) peut s'écrire

$$(13 \text{ bis}) \quad \left(\frac{dZ}{dX}\right)^2 - (\rho - \alpha M) \frac{dZ}{dX} + \alpha \rho \varphi(X, Z) = 0,$$

en posant pour abréger

$$\varphi(X, Z) = \frac{M}{\left(1 - \frac{X}{a}\right)\left(1 - \frac{Z}{c}\right)} - M;$$

la racine de l'équation (13 bis) qui est nulle pour $X = Z = 0$ a pour expression

$$(14) \quad \frac{dZ}{dX} = \frac{\rho - \alpha M}{2} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4\alpha\rho\varphi(X, Z)}{(\rho - \alpha M)^2}} \right],$$

en prenant la détermination du radical qui se réduit à l'unité pour $\alpha = 0$. Soit θ' un nombre positif inférieur à l'unité; la fonction $\varphi(X, Z)$ est holomorphe lorsque l'on a

$$|X| \leq \theta'a, \quad |Z| \leq \theta'c,$$

et son module reste inférieur à un nombre positif A . Prenons un nombre positif $\alpha_1 < \frac{\rho}{M}$, tel que l'on ait

$$A \left| \frac{4\alpha\rho}{(\rho - \alpha M)^2} \right| < 1,$$

lorsque $|\alpha|$ est inférieur à α_1 . Le second membre de l'équation (14) considérée comme fonction des variables X, Z, α , est alors une fonction holomorphe de ces variables dans le domaine défini par les inégalités

$$|X| \leq \theta'a, \quad |Z| \leq \theta'c, \quad |\alpha| < \alpha_1,$$

et, si l'on développe ce second membre suivant les puissances de X, Z, α , tous les termes du développement contiennent α en

facteur. Pour $\alpha = 0$, l'équation (14) admet l'intégrale particulière $Z = 0$; d'après un théorème général de M. Poincaré (1), l'intégrale de cette équation qui est nulle pour $X = 0$ est une fonction holomorphe de X dans le cercle de rayon $\theta'\theta''\alpha$ (θ'' étant un nombre positif inférieur à 1), pourvu que $|\alpha|$ soit inférieur à un nombre positif convenable. Mais θ' et θ'' étant deux nombres positifs quelconques inférieurs à un, le produit $\theta'\theta''\alpha$ est un nombre positif quelconque inférieur à α , et le résultat obtenu peut s'énoncer ainsi : α' étant un nombre positif quelconque inférieur à α , on peut prendre pour α un nombre positif assez petit pour que l'intégrale de l'équation (13) qui se réduit à zéro pour $X = 0$ soit une fonction holomorphe de X dans le cercle de rayon α' décrit de l'origine pour centre.

Si l'on développe cette intégrale suivant les puissances positives des deux variables x et y , la série obtenue sera convergente pourvu que l'on ait

$$\left| \frac{x}{\alpha} \right| + |y| \leq \alpha'.$$

Etant donné un nombre positif θ inférieur à un, prenons pour α' un nombre compris entre $\theta\alpha$ et α , et soit ϵ un autre nombre positif inférieur à $\alpha' - \theta\alpha$. La série précédente sera convergente si l'on a

$$|y| < \theta\alpha, \quad \left| \frac{x}{\alpha} \right| < \epsilon;$$

il en sera donc de même *a fortiori* de la série entière qui représente l'intégrale $Z(x, y)$ de l'équation (11), qui est nulle pour $x = 0$, ce qui démontre la proposition énoncée.

Remarque. — Il est à remarquer que le théorème général du n° 4 pourrait se déduire du cas particulier précédent. En effet, si le domaine $\mathcal{D}_y$ est simplement connexe, on peut le remplacer par un cercle en effectuant sur la variable y une transformation conforme, et, au moyen de quelques transformations faciles, on peut aussi ramener l'équation (1) à la forme (11).

Lorsque le domaine $\mathcal{D}_y$ est à connexion multiple, on démontrera

(1) *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. I, chap. II.

de la même façon que l'intégrale déterminée par les conditions initiales est holomorphe lorsque la variable y décrit un domaine *simplement connexe* $\mathcal{O}'_y$ intérieur à $\mathcal{O}_y$, pourvu que $|x - x_0|$ reste plus petit qu'un nombre positif convenable. Comme tout domaine intérieur à $\mathcal{O}_y$ peut se décomposer en un nombre fini de domaines simplement connexes, on en déduit encore aisément le théorème général du n° 4.

7. La méthode précédente s'étend, sans d'autres difficultés que quelques complications d'écriture, à un système d'équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque, ramené à la forme normale.

Soit

$$(15) \quad \frac{\partial^{n_1} z_1}{\partial x_1^{n_1}} = F_1, \quad \frac{\partial^{n_2} z_2}{\partial x_1^{n_2}} = F_2, \quad \dots, \quad \frac{\partial^{n_p} z_p}{\partial x_1^{n_p}} = F_p$$

un système de p équations aux dérivées partielles entre les p fonctions $z_1, z_2, \dots, z_p$, et m variables indépendantes $x_1, x_2, \dots, x_m$; les seconds membres $F_1, F_2, \dots, F_p$ ne renferment, outre les variables et les fonctions inconnues, que les dérivées partielles de z_1 dont l'ordre ne dépasse pas n_1 , les dérivées partielles de z_2 dont l'ordre ne dépasse pas n_2 , etc.; enfin, les dérivées partielles $\frac{\partial^{n_i} z_i}{\partial x_1^{n_i}}$ ne figurent pas dans ces seconds membres.

D'après le théorème général de Cauchy, un système d'intégrales est complètement déterminé si l'on se donne les fonctions des $(m-1)$ variables $x_2, x_3, \dots, x_m$, auxquelles se réduisent pour $x_1 = x_1^0$ les fonctions

$$\begin{array}{cccc} z_1, & \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, & \dots, & \frac{\partial^{n_1-1} z_1}{\partial x_1^{n_1-1}}, \\ z_2, & \frac{\partial z_2}{\partial x_1}, & \dots, & \frac{\partial^{n_2-1} z_2}{\partial x_1^{n_2-1}}, \\ \dots & \dots, & \dots, & \dots, \\ z_p, & \frac{\partial z_p}{\partial x_1}, & \dots, & \frac{\partial^{n_p-1} z_p}{\partial x_1^{n_p-1}}. \end{array}$$

Nous supposons, ce qu'on peut toujours faire sans diminuer la généralité, que toutes ces fonctions initiales sont nulles. Nous admettrons en outre que les fonctions $F_1, F_2, \dots, F_p$ sont holo-

morphes dans un domaine Ω défini de la manière suivante : chacune des $(m - 1)$ variables $x_2, x_3, \dots, x_m$ reste comprise dans son plan dans une région de forme arbitraire, limitée par plusieurs courbes fermées, tandis que les modules de $x_1 - x_1^0$, et de toutes les autres variables qui figurent dans ces fonctions, restent inférieurs à des limites convenables. Dans ces conditions, si l'on fait décrire à chacune des variables $x_2, x_3, \dots, x_m$ des domaines $\Omega_2, \Omega_3, \dots, \Omega_m$, respectivement intérieurs aux précédents, on peut leur faire correspondre un nombre positif η tel que les intégrales satisfaisant aux conditions initiales données soient holomorphes lorsque les variables $x_2, x_3, \dots, x_m$ restent respectivement dans les domaines $\Omega_2, \Omega_3, \dots, \Omega_m$, pourvu que le module de $x_1 - x_1^0$ reste inférieur à η .

Remarque. — Au lieu de supposer que chacune des variables $x_2, x_3, \dots, x_m$ décrit dans son plan un domaine déterminé, on peut faire une hypothèse plus générale. La variable complexe x_i est en effet l'ensemble de deux variables réelles

$$x_i = x'_i + \sqrt{-1} x''_i;$$

si l'on regarde les $2m - 2$ variables $x'_i, x''_i (i = 2, \dots, m)$ comme les coordonnées d'un point dans l'espace à $2m - 2$ dimensions, tout continuum connexe à $2m - 2$ dimensions R_{2m-2} , situé dans l'espace à $2m - 2$ dimensions, définit un domaine de variabilité pour le système des variables complexes $x_2, x_3, \dots, x_m$. Tout continuum R'_{2m-2} , intérieur à R_{2m-2} , définit de même un nouveau domaine de variabilité intérieur au premier. Cela posé, on voit aisément qu'au lieu de supposer que chaque variable $x_i (i > 2)$ décrit un domaine déterminé *isolément*, on pourrait supposer le domaine de variabilité de ce système de variables défini par un certain continuum R_{2m-2} . Il suffirait alors de modifier l'énoncé en remplaçant l'ensemble des domaines $\Omega_2, \dots, \Omega_m$ par un continuum R'_{2m-2} intérieur à R_{2m-2} .

II.

8. On peut appliquer le théorème général du n° 4 aux équations différentielles ordinaires de différentes manières. On peut, par

exemple, considérer les valeurs initiales comme de nouvelles variables indépendantes, ne figurant pas explicitement dans les équations. Ainsi, soit

$$(16) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

une équation différentielle du premier ordre, et soit $Y(x, x_0, y_0)$ l'intégrale de cette équation qui prend la valeur y_0 pour $x = x_0$. Pour étudier cette intégrale, considérée comme fonction des trois variables indépendantes x, x_0, y_0 , on peut poser dans l'équation (16) $x = x_0 + x', y = y_0 + y'$, ce qui conduit à une nouvelle équation

$$(17) \quad \frac{dy'}{dx'} = f(x_0 + x', y_0 + y'),$$

que l'on peut regarder comme une équation aux dérivées partielles définissant une fonction des trois variables x', x_0, y_0 . En appliquant le théorème général à l'intégrale de l'équation (17) qui est nulle pour $x' = 0$, on obtient le résultat suivant que l'on pourrait aussi établir directement.

Supposons la fonction $f(x, y)$ holomorphe lorsque les variables x, y décrivent respectivement dans leurs plans deux domaines fermés $\mathfrak{D}_x, \mathfrak{D}_y$. Soient $\mathfrak{D}'_x, \mathfrak{D}'_y$ deux nouveaux domaines intérieurs respectivement aux précédents $\mathfrak{D}_x, \mathfrak{D}_y$, et limités par des courbes fermées n'ayant aucun point commun avec la frontière de $\mathfrak{D}_x$ ou de $\mathfrak{D}_y$. A ces deux domaines $\mathfrak{D}'_x, \mathfrak{D}'_y$ on peut faire correspondre un nombre positif R , tel que l'intégrale $Y(x, x_0, y_0)$ soit holomorphe, lorsque les variables x_0, y_0 décrivent respectivement $\mathfrak{D}'_x$ et $\mathfrak{D}'_y$, pourvu que le module de $x - x_0$ soit $\leq R$.

Cette intégrale peut être développée en une série entière ordonnée suivant les puissances de $x - x_0$

$$Y(x, x_0, y_0) = P_0(x_0, y_0) + P_1(x_0, y_0)(x - x_0) + \dots + P_n(x_0, y_0)(x - x_0)^n + \dots$$

dont les coefficients P_n sont des fonctions holomorphes des variables x_0, y_0 dans les domaines $\mathfrak{D}'_x$ et $\mathfrak{D}'_y$ respectivement. Quelles que soient les valeurs de ces variables, pourvu qu'elles appartiennent à ces domaines, le rayon de convergence de la série entière est au moins égal à R .

On sait que cette proposition joue un rôle important dans la théorie analytique des équations différentielles.

9. Considérons encore une équation différentielle du premier ordre

$$(18) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y, \lambda),$$

dont le second membre $f(x, y, \lambda)$ est une fonction holomorphe des trois variables x, y, λ , lorsque les variables x et y restent respectivement dans le voisinage d'un système de valeurs x_0, y_0 , tandis que le paramètre λ décrit un certain domaine $\mathfrak{D}_\lambda$. On peut regarder l'équation (18) comme une équation aux dérivées partielles entre les deux variables indépendantes x et λ et la fonction y . D'après le théorème général démontré au n° 4, *l'intégrale de cette équation qui, pour $x = x_0$, prend la valeur y_0 , est une fonction holomorphe de x et de λ , lorsque la variable λ décrit un domaine quelconque $\mathfrak{D}'_\lambda$, intérieur à $\mathfrak{D}_\lambda$, pourvu que le module $|x - x_0|$ reste inférieur à un nombre positif assez petit.*

Cette proposition ⁽¹⁾, qui pourrait évidemment être généralisée, est utile pour établir certains théorèmes d'existence, comme nous allons le montrer par un exemple.

10. Soit

$$(19) \quad s = F(x, y, z, p, q, r, t) = \alpha x + \beta y + \gamma z + \alpha_1 p + \beta_1 q + \alpha r + \beta t + \dots$$

une équation aux dérivées partielles du second ordre dont le second membre est une fonction holomorphe des variables x, y, z, p, q, r, t , dans le voisinage des valeurs

$$x = y = z = p = q = r = t = 0,$$

s'annulant pour ces valeurs. Proposons-nous de déterminer une intégrale de cette équation, holomorphe dans le domaine des valeurs $x = y = 0$, et s'annulant identiquement, quand l'une des variables x ou y prend la valeur zéro. Si l'on suppose cette inté-

⁽¹⁾ On remarquera que ce théorème est très différent du théorème cité plus haut de M. Poincaré.

grale développée en série entière, tous les termes sont divisibles par xy . Pour calculer les coefficients de cette série, il suffit de pouvoir exprimer toutes les dérivées partielles de la fonction inconnue

$$\frac{\partial^{m+n} z}{\partial x^m \partial y^n}$$

au moyen des dérivées partielles prises par rapport à la variable x seule, ou à la variable y seule. Si les coefficients a et b de r et de t dans le second membre sont quelconques, ce calcul ne peut se faire par des additions et des multiplications seulement. Par exemple, pour calculer les deux dérivées du troisième ordre

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2},$$

on a à résoudre deux équations linéaires

$$\begin{aligned} -a \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} &= F_1, \\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} - b \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} &= F_2, \end{aligned}$$

les seconds membres s'exprimant au moyen de x, y, z, p, q, r, t et des dérivées $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. Si l'on suppose qu'aucun des coefficients a, b n'est égal à zéro, on voit que $\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}\right)_0$ et $\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}\right)_0$ ne s'expriment pas au moyen des coefficients de F par les seules opérations d'addition et de multiplication, et l'on ne peut appliquer sans précaution les méthodes habituelles du calcul des limites.

Pour éviter cette difficulté, introduisons dans l'équation (19) un paramètre variable λ , en remplaçant les coefficients a et b de r et de t par $a\lambda$ et $b\lambda$ respectivement, et considérons l'équation auxiliaire

$$(20) \quad s = F(x, y, \lambda, z, p, q, r, t),$$

qui ne diffère de l'équation proposée (19) qu'en ce qu'on a remplacé a par $a\lambda$ et b par $b\lambda$. Si l'on regarde maintenant x, y, λ comme trois variables indépendantes, on peut se proposer de déterminer une intégrale de cette équation, holomorphe dans le voisinage des

valeurs $x = y = \lambda = 0$, et s'annulant identiquement quand l'une des variables x ou y a la valeur zéro. Pour cela, on commence par former une série entière en x, y, λ

$$(21) \quad \sum C_{\alpha\beta\gamma} x^\alpha y^\beta \lambda^\gamma,$$

satisfaisant formellement à l'équation (20), et ne contenant aucun terme indépendant de x ou de y , de façon que tous les coefficients $C_{0\beta\gamma}$, $C_{\alpha 0\gamma}$ soient nuls. Pour montrer que cela est possible, imaginons cette série (21) ordonnée suivant les puissances entières de λ ; elle s'écrit

$$(21 \text{ bis}) \quad z = z_0 + \lambda z_1 + \lambda^2 z_2 + \dots + \lambda^n z_n + \dots,$$

$z_0, z_1, \dots, z_n, \dots$ étant des séries entières en x et y , dont tous les termes sont divisibles par xy . Si l'on substitue cette série à la place de z dans les deux membres de l'équation (20), et qu'on identifie les coefficients des mêmes puissances de λ dans les deux membres, on a pour déterminer z_0 l'équation

$$\frac{\partial^2 z_0}{\partial x \partial y} = F\left(x, y, z_0, \frac{\partial z_0}{\partial x}, \frac{\partial z_0}{\partial y}, \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2}\right) - a \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} - b \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2},$$

dont le second membre ne renferme aucun terme du premier degré en $\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2}$ ou $\frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2}$; on sait que cette équation admet une intégrale holomorphe dans le domaine du point $x = 0, y = 0$, s'annulant quand l'une des variables x ou y a la valeur zéro, et tous les coefficients de la série qui représentent z_0 se déduisent des coefficients de F par des additions et des multiplications seulement. D'une façon générale, en égalant les coefficients de λ^n dans les deux membres, on a pour déterminer z_n une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 z_n}{\partial x \partial y} = \varphi\left(x, y, z_n, \frac{\partial z_n}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^n z_n}{\partial y^n}\right),$$

ne renfermant aucun terme en $\frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z_n}{\partial y^2}$. En raisonnant de proche en proche, on voit donc que l'on peut former un développement en série entière, de la forme (21 bis) ou (21), satisfaisant formellement à l'équation (20) et dont tous les coefficients se dé-

duisent des coefficients de la fonction $F(x, y, z, p, q, r, t)$ par les seules opérations d'addition et de multiplication.

Cela posé, remarquons qu'on passe de l'équation (20) à l'équation (19) en donnant au paramètre λ la valeur $\lambda = 1$. On pourra donc affirmer l'existence d'une intégrale de l'équation (19) satisfaisant aux conditions énoncées si l'on peut trouver deux nombres positifs quelconques η et η' , et un nombre positif $\mu > 1$, tel que la série entière (21) soit convergente lorsque l'on a

$$|x| < \eta, \quad |y| < \eta', \quad |\lambda| < \mu.$$

Alors en effet la série (21), où l'on fait $\lambda = 1$, est convergente pourvu que l'on ait $|x| < \eta$, $|y| < \eta'$, et représente dans ce domaine une fonction holomorphe des variables x et y qui satisfait à l'équation (19) et qui s'annule quand l'une des variables x et y prend la valeur zéro.

11. Pour trouver une limite du domaine de convergence de la série (21), nous pouvons maintenant nous servir de fonctions majorantes, puisque les coefficients de cette série se déduisent des coefficients de F par les seules opérations d'addition et de multiplication.

Soit $A = |a|$, $B = |b|$; nous pouvons prendre pour fonction majorante de $F(x, y, z, \lambda, p, q, r, t)$ une expression de la forme

$$\frac{M}{\left(1 - \frac{x+y}{\rho}\right) \left(1 - \frac{z+p+q}{\rho_1}\right) \left(1 - \frac{r+t}{R}\right)} - M \left(1 + \frac{r+t}{R}\right) + \lambda(Ar + Bt),$$

M , ρ , ρ_1 et R étant des nombres positifs; la fonction

$$\frac{M}{\left(1 - \frac{\frac{x}{h} + \frac{y}{l}}{\rho}\right) \left(1 - \frac{z+p+q}{\rho_1}\right) \left(1 - \frac{r+t}{R}\right)} - M \left(1 + \frac{r+t}{R}\right) + \lambda(Ar + Bt),$$

où h et l sont deux nombres positifs inférieurs à l'unité, est *a fortiori* majorante pour F . Si donc nous cherchons un développement en série entière de la forme

$$(22) \quad \sum C'_{\alpha\beta\gamma} x^\alpha y^\beta \lambda^\gamma$$

dont tous les termes contiennent xy en facteur, et satisfaisant formellement à l'équation

$$(23) \quad s = \frac{M}{\left(1 - \frac{x + \frac{y}{l}}{\rho}\right) \left(1 - \frac{r+p+q}{\rho_1}\right) \left(1 - \frac{r+t}{R}\right)} - M \left(1 + \frac{r+t}{R}\right) + \lambda(Ar + Bt),$$

tous les coefficients de ce nouveau développement seront des nombres réels et positifs supérieurs aux modules des coefficients correspondants de la série (21)

$$|C_{\alpha\beta\gamma}| \leq C'_{\alpha\beta\gamma}.$$

Si donc la série (22) est convergente dans un certain domaine, il en est de même de la série (21).

Il existe une infinité de séries de la forme (22) satisfaisant formellement à l'équation (23), et tous les coefficients $C'_{\alpha\beta\gamma}$ se déduisent par les seules opérations d'addition et de multiplication des coefficients $C'_{0\beta\gamma}$ et $C'_{\alpha 0\gamma}$. La série (22) s'obtient précisément en supposant que l'on a

$$C'_{0\beta\gamma} = 0, \quad C'_{\alpha 0\gamma} = 0,$$

quels que soient α, β, γ . Si, parmi tous les développements de cette forme qui satisfont formellement à l'équation (23), il en existe un dont tous les coefficients sont des nombres *positifs*, qui soit convergent dans un certain domaine, on pourra affirmer que la série (22), et par suite la série (21), est convergente dans le même domaine.

Cela posé, cherchons à satisfaire à l'équation (23) en prenant pour z une fonction des deux variables $u = \frac{x}{h} + \frac{y}{l}$, et λ ,

$$z = \varphi\left(\frac{x}{h} + \frac{y}{l}, \lambda\right);$$

on aura

$$p = \frac{1}{h} \varphi'(u), \quad q = \frac{1}{l} \varphi'(u),$$

$$r = \frac{1}{h^2} \varphi''(u), \quad s = \frac{1}{hl} \varphi''(u), \quad t = \frac{1}{l^2} \varphi''(u),$$

et l'équation (23) devient

$$\left[\frac{1}{hl} - \lambda \left(\frac{A}{h^2} + \frac{B}{l^2} \right) \right] \varphi''(u) \left[1 - \frac{\varphi'(u)}{R} \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{l^2} \right) \right] \\ = M \frac{\varphi''^2(u)}{R^2} \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{l^2} \right)^2 + \Psi[u, \varphi(u), \varphi'(u)]$$

en posant

$$\Psi = \frac{M}{\left(1 - \frac{u}{\rho} \right) \left[1 - \frac{\varphi}{\rho_1} - \frac{\varphi'}{\rho_1} \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{l} \right) \right]} - M.$$

Voyons d'abord dans quel cas on peut déterminer les deux nombres positifs h et l de façon que l'on ait

$$(24) \quad \frac{1}{hl} - \left(\frac{A}{h^2} + \frac{B}{l^2} \right) > 0,$$

ou

$$hl > Al^2 + Bh^2.$$

Il faut d'abord pour cela que le trinôme

$$Al^2 - hl + Bh^2$$

ait ses racines réelles, c'est-à-dire que l'on ait

$$(25) \quad 1 - 4AB > 0.$$

Si cette condition est satisfaite, il suffira de prendre pour h et l deux nombres positifs inférieurs à l'unité, de façon que le rapport $\frac{l}{h}$ soit compris entre les deux racines du trinôme, ce qui est évidemment possible. Les nombres h et l étant choisis de cette façon, posons

$$\frac{A}{h^2} + \frac{B}{l^2} = \frac{1}{\lambda_1} \frac{1}{hl},$$

λ_1 étant un nombre positif supérieur à un; l'équation précédente peut encore s'écrire

$$(26) \quad \frac{1}{hl} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} \right) \varphi''(u) = \varphi''^2(u) \left\{ H + K \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} \right) \right\} + \Psi[u, \varphi(u), \varphi'(u)],$$

H et K étant des nombres positifs, ou

$$(26') \quad \varphi''(u) = hl \varphi''^2(u) \left\{ \frac{H}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}} + K \right\} + \frac{\Psi[u, \varphi(u), \varphi'(u)]}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}}.$$

Cette équation (26') admet une intégrale s'annulant ainsi que ses dérivées du premier et du second ordre, pour $u = 0$, et, si l'on développe cette intégrale suivant les puissances de u et de λ , on obtient, en identifiant les deux membres, des coefficients tous positifs. En remplaçant dans le développement ainsi obtenu u par $\frac{x}{h} + \frac{y}{l}$, on obtient un développement en série de la forme (22), satisfaisant formellement à l'équation (23) et dont tous les coefficients sont positifs.

Il nous reste à montrer que ce développement est convergent dans un domaine défini par des inégalités telles que

$$|x| < \tau, \quad |y| < \tau', \quad |\lambda| < \mu,$$

τ et τ' étant deux nombres positifs, et μ un nombre positif *supérieur à un*. Or il suffit pour cela de prouver que l'intégrale de l'équation (26), qui est nulle ainsi que ses deux premières dérivées pour $u = 0$, est une fonction holomorphe de λ et de u , lorsque le module de λ reste inférieur à un nombre μ supérieur à un, pourvu que le module de la variable u soit plus petit qu'un nombre positif convenable.

Pour démontrer ce dernier point, nous remarquerons que l'équation (26') résolue par rapport à $\varphi''(u)$ nous donne pour $\varphi''(u)$ une expression

$$\varphi''(u) = T[u, \lambda, \varphi(u), \varphi'(u)],$$

qui est holomorphe lorsque le module de λ reste inférieur à un nombre positif quelconque $\lambda_2 < \lambda_1$, pourvu que les modules de u , $\varphi(u)$, $\varphi'(u)$ restent eux-mêmes plus petits qu'un nombre positif assez petit. D'après le théorème du n° 9, qui s'étend évidemment à une équation du second ordre, l'intégrale de l'équation (26) satisfaisant aux conditions initiales est une fonction holomorphe de λ et de u , pourvu que l'on ait $|\lambda| < \mu < \lambda_2$, $|u| < \tau$, τ étant un nombre positif, et μ un nombre positif quelconque inférieur à λ_2 . Mais λ_1 étant supérieur à un, on peut prendre pour λ_2 et par suite pour μ des nombres plus grands que l'unité. La proposition est donc établie.

La condition (25) est identique à la condition obtenue par M. Riquier (*Comptes rendus*, 12 janvier 1903, *Annales de l'École Normale supérieure*, 1904) par une méthode toute diffé-

rente. Il est clair d'ailleurs que le procédé employé ici est susceptible de nombreuses généralisations.

Cette condition $4AB < 1$ est seulement une condition *suffisante* pour qu'on puisse affirmer l'existence d'une intégrale de l'équation (19) satisfaisant aux conditions initiales données, mais rien ne prouve qu'elle soit *nécessaire*. C'est ce qui a lieu en particulier pour les équations linéaires en r, s, t , comme je l'ai montré dans un Mémoire antérieur (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2^e série, t. V, p. 405-436).

12. On est conduit à la question qui fait l'objet des paragraphes précédents quand on cherche à déterminer une surface intégrale d'une équation aux dérivées partielles du second ordre passant par deux courbes données Γ, Γ' , ayant un point commun O sans être tangentes en ce point. Si l'on suppose que l'on effectue d'abord une transformation ponctuelle de façon à remplacer les courbes données Γ, Γ' par les deux axes de coordonnées Ox, Oy , la question revient à déterminer une intégrale d'une équation aux dérivées partielles

$$(27) \quad F(x, y, z, p, q, r, t, s) = 0,$$

se réduisant à zéro quand l'une des variables x ou y a la valeur zéro. Soit s_0 une racine *simple* de l'équation

$$F(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, s) = 0;$$

la racine de l'équation (27) qui tend vers s_0 lorsque x, y, z, p, q, r, t tendent respectivement vers zéro est représentée par un développement en série

$$s = s_0 + \dots$$

dont le terme constant est s_0 ; il suffit de poser $z = s_0 xy + z'$ pour être ramené à une équation de la forme (19) avec les mêmes conditions initiales.

Lorsque les coefficients de l'équation sont réels, les directions caractéristiques de l'élément initial sont fournies par l'équation du second degré

$$-a dy^2 - dy dx - b dx^2 = 0,$$

et ces directions sont réelles pourvu que l'on ait

$$(28) \quad ab < \frac{1}{4}.$$

Cette condition est identique à la condition (25) lorsque a et b sont de même signe; si a et b sont de signes contraires, la condition (28) est vérifiée d'elle-même, tandis que la condition (25) ne l'est pas forcément.

En résumé, lorsque la condition (25) est satisfaite et les coefficients réels, les directions caractéristiques issues de l'origine sont réelles, mais la réciproque n'est pas vraie.

NOTE AU SUJET DU FROTTEMENT DE GLISSEMENT;

Par M. le Comte DE SPARRE.

Bien que j'aie déjà eu occasion d'aborder plusieurs fois ce sujet et, en dernier lieu, dans la Note sur le valet de menuisier, que j'ai publiée dernièrement dans le *Bulletin*, je crois qu'il ne sera pas sans intérêt d'y revenir de nouveau, d'autant plus que M. Painlevé, postérieurement à la rédaction de la Note dont je viens de parler, a fait, à l'Académie des Sciences, deux Communications sur ce sujet, le 21 août et le 20 octobre de l'année dernière.

Je rappelle que l'on a toujours admis que si deux corps, qui d'abord n'avaient aucune tendance à se déplacer l'un par rapport à l'autre, tendent ensuite à prendre un mouvement relatif, le coefficient de frottement croît de zéro à sa valeur f , relative au mouvement, à moins qu'il ne se trouve une valeur f' de ce coefficient plus petite que f , pour laquelle la force de frottement fait équilibre à la composante tangentielle des forces qui sollicitent le corps, auquel cas le glissement ne se produit pas.

M. Lecornu admet, d'une façon semblable, que lorsque deux corps en mouvement, l'un par rapport à l'autre, sont mis en contact, le coefficient de frottement croît très rapidement de zéro à sa valeur f pour le mouvement, à moins qu'il ne se trouve une valeur $f' < f$ qui rende les réactions infinies, auquel cas il se produit une percussion.

M. Painlevé n'admet pas cette manière de voir et il dit, dans sa Communication du 20 octobre : « L'assimilation aux lois du frottement au repos n'est pas sérieuse et l'hypothèse, d'après laquelle $\frac{F}{N}$ ⁽¹⁾ partirait d'une valeur supérieure à f me paraît aussi vraisemblable que l'hypothèse d'après laquelle $\frac{F}{N}$ part de zéro. »

Je crois que M. Painlevé n'a pu formuler cette opinion que parce qu'il n'a pas tenu suffisamment compte de la cause à laquelle on attribue le frottement.

Pour le faire voir, je citerai un passage du *Traité de Mécanique générale* de Resal ⁽²⁾ : « Il résulte de la déformation des corps en contact que la résultante des actions mutuelles, de la part de l'un sur l'autre, n'est pas normale à leur surface, ou qu'elle est la résultante d'une composante normale et d'une composante tangentielle. »

Cette citation montre que, à l'époque où Resal écrivit ces lignes, on attribuait la force de frottement F à la déformation des corps en contact.

Cette force de frottement ne se manifestera par suite que lorsque la déformation se sera déjà produite. Il y aura donc une première période, au moment où les deux corps sont mis en contact, pendant laquelle leur compression réciproque produira la déformation des parties en contact, période pendant laquelle la force de frottement, d'abord nulle, tant qu'il n'y a pas de déformation appréciable, reste plus petite qu'elle ne le sera lorsque la déformation aura acquis sa valeur définitive.

En un mot, l'hypothèse de M. Lecornu, que le coefficient de frottement part de zéro lorsque deux corps en mouvement l'un par rapport à l'autre sont mis en contact, revient simplement à admettre que l'effet ne peut précéder la cause, ce qui paraît assez rationnel.

On doit remarquer aussi que, pour la même raison, si à un moment donné la composante normale de la pression mutuelle de deux corps subit une augmentation brusque, le coefficient de

⁽¹⁾ F désignant la composante tangentielle et N la composante normale de la réaction.

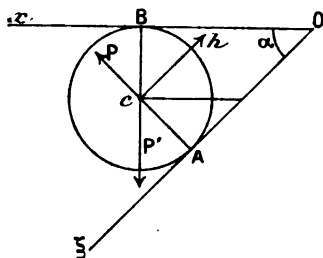
⁽²⁾ Tome II, p. 2 (publié en 1874).

frottement commencera par décroître d'une façon plus ou moins considérable, puisque, dans le rapport $\frac{F}{N}$, la composante normale N a augmenté, tandis que la force de frottement F , résultat de la déformation mutuelle des deux corps, ne prendra son augmentation correspondante que lorsque l'accroissement de déformation (qui ne suit pas d'une façon instantanée l'augmentation de N) se sera lui-même produit.

Il résulte aussi de là que, si deux corps ont un simple contact géométrique, la force de frottement est nulle, puisqu'il n'y a aucune déformation des parties en contact; c'est là d'ailleurs un fait qui a toujours été admis dans les questions de frottement.

Ceci dit, je reviens aux exemples donnés par M. Painlevé dans ses dernières Communications. Soit d'abord l'exemple de M. Chau-mat cité dans la Communication du 21 août, qui a trait à l'indéter-mination. Une roue homogène pesante glisse avec frottement (dans un plan vertical) sur une droite fixe horizontale Ox et glisse sans frottement sur une deuxième droite descendante $O\xi$, elle peut se soulever au-dessus de $O\xi$ et descendre au-dessous de Ox . Soient f le coefficient de frottement de la roue sur Ox , α l'angle $xO\xi$, r le rayon de la roue; nous supposons $\tan \alpha < f$.

Fig. 1.



On peut supposer d'abord que, la roue reposant sur $O\xi$, on l'amène à avoir en B avec Ox un simple contact géométrique; dans ce cas, si l'on abandonne ensuite la roue à elle-même, en lui appliquant un couple N de sens $xO\xi$, le contact en B étant un simple contact géométrique, il n'y a pas de frottement en B à l'instant initial et le mouvement se fait, par suite, comme si la droite Ox n'existait pas, puisque le déplacement subséquent éloigne la roue de Ox .

Il est à remarquer, d'ailleurs, que l'on arrive absolument au même résultat et sans la moindre ambiguïté également, si l'on suppose qu'on ait produit un serrage préalable de la roue entre Ox et $O\xi$, au moyen d'une force h appliquée au centre c de la roue et faisant un angle λ avec l'horizon.

Supposons que, après avoir produit le serrage au moyen de la force h , on applique le couple N en maintenant la force h .

Soient P la réaction de $O\xi$ en A , P' la composante normale de la réaction de Ox en B , la composante tangentielle étant $P'f$, si le mouvement se produit et $P'f'$ avec $f' < f$ si le mouvement ne se produit pas.

Il est facile de voir que c'est toujours ce dernier cas qui aura lieu; en effet, pour qu'il en soit ainsi, on a les conditions

$$\begin{aligned} P \sin \alpha - P' f' - h \cos \lambda &= 0 \quad (1), \\ mg + P' - P \cos \alpha - h \sin \lambda &= 0, \\ P' f' r - N &= 0, \\ f' &< f. \end{aligned}$$

On tire de là

$$(1) \quad P = \frac{h(\cos \lambda + f' \sin \lambda) - mgf'}{\cos \alpha (\tan \alpha - f')},$$

$$(2) \quad P' = \frac{h \frac{\cos(\lambda - \alpha)}{\cos \alpha} - mg \tan \alpha}{\tan \alpha - f'},$$

$$(3) \quad f' = \frac{\frac{N}{r} \tan \alpha}{\frac{N}{r} + h \frac{\cos(\lambda - \alpha)}{\cos \alpha} - mg \tan \alpha},$$

d'où l'on déduit

$$(4) \quad \tan \alpha - f' = \frac{h \frac{\cos(\lambda - \alpha)}{\cos \alpha} - mg \tan \alpha}{\frac{N}{r} + h \frac{\cos(\lambda - \alpha)}{\cos \alpha} - mg \tan \alpha} \tan \alpha.$$

D'ailleurs, puisque nous supposons qu'il y a serrage initial (avant qu'on ait appliqué le couple N), P' doit être positif pour $f' = 0$, ce qui exige

$$(5) \quad h \frac{\cos(\lambda - \alpha)}{\cos \alpha} - mg \tan \alpha > 0$$

(1) m étant la masse de la roue et r son rayon.

et, cette condition étant remplie (4), fait voir que l'on a

$$f' < \tan \alpha < f,$$

le mouvement ne se produit donc pas, quelque grand que soit N.

De plus, la condition (5) peut s'écrire

$$h \cos \lambda - (mg - h \sin \lambda) \tan \alpha > 0$$

et, comme

$$f' < \tan \alpha,$$

on en conclut

$$h \cos \lambda - (mg - h \sin \lambda) f' > 0,$$

ce qui fait voir que P est toujours positif.

Si maintenant on fait décroître h, P' décroîtra et il deviendra nul pour la valeur

$$h = \frac{mg \sin \alpha}{\cos(\lambda - \alpha)},$$

valeur pour laquelle P est encore positif; car on a, pour cette valeur,

$$h(\cos \lambda + f' \sin \lambda) - mgf' = \frac{mg \cos \lambda \cos \alpha}{\cos(\lambda - \alpha)} (\tan \alpha - f') > 0.$$

Donc, à ce moment, la pression en B deviendra nulle et, par suite, le frottement disparaîtra.

Le mouvement se fera donc à partir de cet instant, comme si O x n'existait pas; c'est, en particulier, ce qui arrivera lorsque h devenant nul on sera ramené au problème de M. Chaumat.

On voit que, même avec un serrage initial, aussi bien que lorsqu'il n'y en a pas, la théorie classique du frottement permet de résoudre le problème sans aucune ambiguïté et sans qu'il soit nécessaire d'ajouter quoi que ce soit à cette théorie.

Considérons maintenant l'autre problème envisagé par M. Painlevé dans sa Communication du 21 août :

Une tige rigide AB a son extrémité qui glisse avec frottement (dans un plan vertical) sur une droite fixe O x, en supposant le point A compris entre deux lignes infiniment rapprochées O x et O₁ x₁, de façon que, lorsqu'il touche l'une de ces lignes, il ne touche pas l'autre, mais en est infiniment rapproché.

Je suppose, de plus, que les forces se réduisent à la pesanteur

et à deux forces horizontales : l'une X appliquée au centre de gravité G et l'autre h appliquée en A .

Soient m la masse de la tige, mk^2 son moment d'inertie par rapport au centre de gravité, l la distance AG , θ l'angle de AB avec Ox , R_x et R_y les composantes de la réaction en A . Les équations du mouvement par rapport au centre de gravité donneront, en désignant par x_1 et y_1 les coordonnées de ce point,

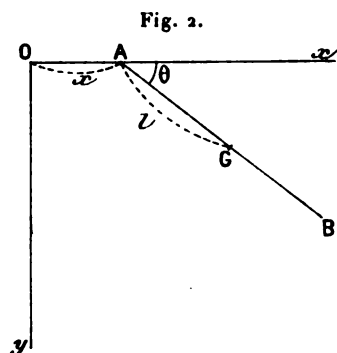
$$(1) \quad \begin{cases} m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = R_x + h + X, \\ m \frac{d^2 y_1}{dt^2} = R_y + mg, \\ mk^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = l[(R_x + h) \sin \theta - R_y \cos \theta]; \end{cases}$$

d'ailleurs, comme

$$x_1 = x + l \cos \theta, \quad y_1 = l \sin \theta,$$

les deux premières équations précédentes deviennent ⁽¹⁾

$$(2) \quad \begin{cases} x'' - l\theta'' \sin \theta - l\theta'^2 \cos \theta = \frac{R_x}{m} + \frac{h + X}{m}, \\ l\theta'' \cos \theta - l\theta'^2 \sin \theta = \frac{R_y}{m} + g. \end{cases}$$



Si alors on remplace dans la dernière des équations (1) R_x et R_y par leur valeur déduite de (2), on aura

$$(3) \quad \frac{k^2}{l} \theta'' = x'' \sin \theta - l\theta'' + g \cos \theta - \frac{X}{m} \sin \theta.$$

(1) En écrivant, pour simplifier l'écriture, x'' , θ'' , θ'^2 à la place de $\frac{d^2 x}{dt^2}$, $\frac{d^2 \theta}{dt^2}$, $\frac{d^2 \theta}{dt^2}$.

Posons maintenant

$$(4) \quad 2\mu = \frac{k^2 + l^2}{l^2} \quad (1),$$

on aura

$$(5) \quad 2\mu l \theta' = x' \sin \theta + g \cos \theta - \frac{X}{m} \sin \theta.$$

Si l'on remplace alors θ'' par sa valeur déduite de (5), dans les équations (2), nous aurons

$$(6) \quad \begin{cases} \left(x' - \frac{X}{m}\right)(2\mu - \sin^2 \theta) - g \sin \theta \cos \theta - 2\mu l \theta'^2 \cos \theta = \frac{2\mu R_x}{m} + 2\mu \frac{h}{m}, \\ \left(x' - \frac{X}{m}\right) \cos \theta \sin \theta + g \cos^2 \theta - 2\mu l \theta'^2 \sin \theta = \frac{2\mu R_y}{m} + 2\mu g. \end{cases}$$

Si l'on pose alors

$$(7) \quad R_x = -\epsilon f' R_y.$$

on déduira des équations (6)

$$(8) \quad \begin{cases} x' = \frac{X}{m} + \frac{2\mu \frac{h}{m} + g[\sin \theta \cos \theta + \epsilon f'(2\mu - \cos^2 \theta)] + 2\mu l \theta'^2 (\cos \theta + \epsilon f' \sin \theta)}{2\mu - \sin^2 \theta + \epsilon f' \sin \theta \cos \theta}, \\ \frac{R_y}{m} = \frac{\frac{h}{m} \sin \theta \cos \theta - (2\mu - 1)(g + l \theta'^2 \sin \theta)}{2\mu - \sin^2 \theta + \epsilon f' \sin \theta \cos \theta}. \end{cases}$$

Le signe de ϵ devant être choisi de façon que

$$(9) \quad \epsilon x' R_y > 0,$$

condition qui, si $x' = 0$, doit être remplacée par la suivante

$$(9') \quad \epsilon x'' R_y > 0.$$

Si l'on fait

$$X = 0, \quad \mu = 1, \quad 2l = r,$$

on retombe sur le problème que j'avais examiné dans ma Communication du 31 juillet, et si l'on fait, au lieu de cela, $h = 0$ sur

(1) Comme $k^2 \leq l^2$, on aura

$$\frac{1}{2} \leq \mu \leq 1.$$

celui envisagé par M. Painlevé dans sa Communication du 21 août. On voit que ces problèmes sont complètement différents et que l'on ne saurait, comme le fait M. Painlevé, comparer leurs discussions, d'autant plus que les conclusions en sont, dans certains cas, absolument contradictoires. Ainsi, dans le problème de M. Painlevé, il peut y avoir, comme nous le verrons, arc-boutement, pour le mouvement à partir du repos, tandis que ce cas ne peut jamais se présenter pour le problème que j'ai considéré ⁽¹⁾.

Pour en revenir au problème envisagé par M. Painlevé, dans sa Communication du 21 août, il insiste sur le cas où le système part du repos.

Nous supposons toujours

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad f > \frac{2\mu - \sin^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta}.$$

Puisque le système part du repos, f' croît à partir de zéro. Or, pour $f' = 0$, les formules (8), où l'on doit faire $h = 0$, donnent, si $X > 0$, $x'' > 0$, $R_y < 0$ et l'on doit prendre $\varepsilon = -1$, mais alors x'' devient nul pour

$$(10) \quad f' = \frac{\frac{X}{m}(2\mu - \sin^2 \theta) + g \sin \theta \cos \theta}{\frac{X}{m} \sin \theta \cos \theta + g(2\mu - \cos^2 \theta)} < \frac{2\mu - \sin^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} < f \text{ (1)};$$

on voit donc que, quelque grand que soit X , du moment qu'il est positif, il y a *un seul mouvement* possible, celui où A est fixe. Dans ce cas, d'ailleurs, $R_y < 0$ et le point A presse sur le guide inférieur ⁽²⁾.

(1) M. Painlevé n'avait donc pas besoin de dire que je me trompais si je croyais avoir ajouté quoi que ce soit à la discussion d'un problème *que je n'ai pas traité*.

(2) On a, en effet,

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{X}{m}(2\mu - \sin^2 \theta) + g \sin \theta \cos \theta}{\frac{X}{m} \sin \theta \cos \theta + g(2\mu - \cos^2 \theta)} - \frac{2\mu - \sin^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= - \frac{2\mu g(2\mu - 1)}{\sin \theta \cos \theta \left[\frac{X}{m} \sin \theta \cos \theta + g(2\mu - \cos^2 \theta) \right]}. \end{aligned}$$

(3) On voit que le seul mouvement acceptable est différent des trois indiqués comme possibles par M. Painlevé dans sa Communication du 21 août.

Ce qui précède fait d'ailleurs voir, comme je l'ai dit, que le problème de M. Painlevé, où $h = 0$, est absolument différent de celui que j'avais examiné dans ma Communication du 31 juillet, puisque dans le mien il n'y avait jamais arc-boutement et que, dans celui de M. Painlevé, il y a arc-boutement dès que $X > 0$.

Supposons maintenant X négatif et posons

$$X = -X_1.$$

nous aurons, en prenant toujours

$$\begin{aligned} h &= \theta_0' = 0, \\ x'' &= -\frac{X_1}{m} + g \frac{\sin \theta \cos \theta + \varepsilon f' (2\mu - \cos^2 \theta)}{2\mu - \sin^2 \theta + \varepsilon f' \sin \theta \cos \theta}, \\ \frac{R_y}{m} &= -g \frac{2\mu - 1}{2\mu - \sin^2 \theta + \varepsilon f' \sin \theta \cos \theta}. \end{aligned}$$

On est alors conduit à distinguer deux cas :

$$1^\circ \quad \frac{X_1}{mg} = \left| \frac{X}{mg} \right| < \frac{\sin \theta \cos \theta}{2\mu - \sin^2 \theta}.$$

Dans ce cas, pour $f' = 0$, on a

$$x'' > 0, \quad R_y < 0$$

et il faut prendre

$$\varepsilon = -1,$$

alors x'' deviendra nul pour

$$f' = \frac{g \sin \theta \cos \theta - \frac{X_1}{m} (2\mu - \sin^2 \theta)}{g (2\mu - \cos^2 \theta) - \frac{X_1}{m} \sin \theta \cos \theta} < f.$$

Donc, dans ce cas, il y a un seul mouvement possible, celui où A reste fixe et presse sur le guide inférieur (¹),

$$2^\circ \quad \frac{X_1}{mg} = \left| \frac{X}{mg} \right| > \frac{\sin \theta \cos \theta}{2\mu - \sin^2 \theta}.$$

(¹) On a, en effet,

$$R_y < 0,$$

car,

$$2\mu - \sin^2 \theta - f' \sin \theta \cos \theta = \frac{2\mu g (2\mu - 1)}{g (2\mu - \cos^2 \theta) - \frac{X_1}{m} \sin \theta \cos \theta} > 0,$$

puisque

$$g (2\mu - \cos^2 \theta) - \frac{X_1}{m} \sin \theta \cos \theta > g \frac{2\mu (2\mu - 1)}{2\mu - \sin^2 \theta} > 0.$$

Dans ce cas, pour $f' = 0$, on a

$$x'' < 0, \quad R_y < 0,$$

il faut donc prendre

$$\varepsilon = +1.$$

Lorsque f' croîtra ensuite de 0 à f , R_y conserve le signe — puisque $\varepsilon = +1$, et le point A appuie toujours sur le guide inférieur. Ce cas se subdivisera toutefois en deux :

$$\text{I. (11)} \quad \frac{\sin \theta \cos \theta}{2\mu - \sin^2 \theta} < \frac{X_1}{mg} < \frac{\sin \theta \cos \theta + f(2\mu - \cos^2 \theta)}{2\mu - \sin^2 \theta + f \sin \theta \cos \theta},$$

dans ce cas x'' devient nul pour la valeur

$$f' = \frac{\frac{X_1}{m}(2\mu - \sin^2 \theta) - g \sin \theta \cos \theta}{g(2\mu - \cos^2 \theta) - \frac{X_1}{m} \sin \theta \cos \theta} < f \quad (1);$$

donc dans ce cas le point A reste fixe.

$$\text{II.} \quad \frac{X_1}{mg} > \frac{\sin \theta \cos \theta + f(2\mu - \cos^2 \theta)}{2\mu - \sin^2 \theta + f \sin \theta \cos \theta},$$

dans ce cas x'' est encore négatif pour $f' = f$ et, par suite, le glissement se fait dans le sens négatif, le point A appuyant sur le guide inférieur.

On voit que la théorie classique du frottement permet de résoudre ce problème dans tous les cas sans aucune ambiguïté, et en appliquant cette théorie ainsi qu'on l'a toujours fait.

Il résulte toutefois de la discussion qui précède que les conclusions de la discussion du problème de M. Painlevé donné dans sa Communication du 21 août ⁽²⁾ sont fausses, puisque dans le cas sur lequel il appelle l'attention :

$$x'_0 = \theta'_0 = 0, \quad X > \frac{f(2\mu - \cos^2 \theta) - \sin \theta \cos \theta}{f \sin \theta \cos \theta - 2\mu + \sin^2 \theta},$$

(1) On a d'ailleurs en vertu de (11)

$$\frac{X_1}{mg} < \frac{2\mu - \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta}.$$

(2) *Comptes rendus*, p. 401.

il n'y a qu'un seul mouvement possible et qui est différent des trois indiqués comme possibles par M. Painlevé.

Considérons maintenant le problème de M. Chaumat conduisant, suivant M. Painlevé, à une impossibilité.

Soient Ox et Oy deux demi-droites fixes d'un plan vertical, la première horizontale, l'autre oblique, dirigée au-dessus de Ox et faisant avec Ox un angle aigu α . Une roue homogène pesante, de masse m , située dans l'angle xOy , glisse avec frottement sur la droite Ox , au-dessus de laquelle elle peut se soulever, et sans frottement le long de la droite Oy , dont elle peut s'écarter dans le sens Ox . La roue est abandonnée à l'instant $t = 0$, avec une vitesse initiale de rotation ω_0 , de sens xOy , son centre étant immobile.

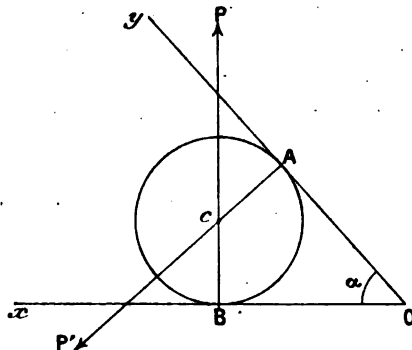
M. Painlevé suppose les conditions initiales réalisées de la façon suivante : la roue est maintenue en contact géométrique avec Ox et Oy par une force verticale $h = mg$ appliquée en son centre qu'on fait ensuite tendre vers zéro d'une façon aussi lente que l'on voudra.

On suppose

$$f > \tan \alpha.$$

Soit P la composante normale de la réaction de Ox , P' la réaction normale de Oy .

Fig. 3.



Tant que l'on a $h = mg$, la roue ne frottant pas sur Oy et le contact en B avec Ox étant un simple contact géométrique, il n'y a pas de frottement et la rotation de la roue se continue indéfini-

ment; mais, dès que $h < mg$, quelque faible que soit la différence et dès que la roue sera en prise avec Ox , le coefficient de frottement croîtra, non de zéro à f , mais de zéro à

$$f' = \tan \alpha,$$

valeur pour laquelle P deviendra infini et produira par suite une percussion qui arrêtera la roue. On a, en effet, en négligeant le déplacement du centre de la roue,

$$\begin{aligned} P' \sin \alpha - P f' &= 0, \\ P + h - P' \cos \alpha - mg &= 0, \end{aligned}$$

d'où

$$P = \frac{mg - h}{1 - f' \cot \alpha},$$

et P et par suite aussi $P f'$ deviennent infinis pour $f' = \tan \alpha$.

Il n'y a d'ailleurs là rien que d'absolument rationnel, car, dès que le frottement entre en jeu et si faible que soit la pression verticale de la roue sur Ox (du moment qu'elle est suffisante pour mettre la roue en prise avec Ox), l'adhérence tend à entraîner la roue dans le sens des x négatifs et celle-ci venant se coincer entre les deux droites Oy et Ox les pressions de ces deux droites croissent au delà de toutes limites si l'on suppose la roue et les droites incompressibles et la percussion $P f'$ où P est infinie arrête la roue.

On doit remarquer que la lenteur plus ou moins grande avec laquelle on fait décroître h à partir de mg ne change absolument rien au résultat final, et ne fait pas que le phénomène ne se passe pas toujours dans un temps très court. (Nous calculerons plus loin ce temps en tenant compte de la compressibilité de la roue et constaterons qu'il est toujours très petit.)

La percussion se produit dès que, la roue étant en prise avec Ox , le frottement entre en jeu, car le coincement de la roue entre Ox et Oy fait croître P et P' au delà de toutes limites et la valeur plus ou moins grande de la force $mg - h$ est alors absolument négligeable devant P .

Il y a là un phénomène semblable à celui qui se produirait si dans un encliquetage Dobo ⁽¹⁾ on soulevait très légèrement au

(1) Voir, au sujet de la théorie de cet encliquetage, le *Traité de Mécanique* de Bour.

moyen de fils les ailes articulées, de façon qu'elles ne puissent être en contact avec la roue folle, celle-ci pourrait alors tourner dans les deux sens sans entraîner l'arbre ; mais, si on relâche les fils, dès que les ailes seront en prise avec la circonférence de la roue, celle-ci entraînera l'arbre, ou s'arrêtera subitement si celui-ci est fixe. Il est bien certain que la manière plus ou moins lente avec laquelle on lâchera les fils n'aura pas d'influence appréciable sur le phénomène : dès que les ailes sont en prise avec la roue, celle-ci devient solidaire de l'arbre.

Je crois inutile de revenir sur le second problème, pour le cas de l'impossibilité, car je devrais reproduire, à peu de chose près, ce que j'ai dit dans ma Communication du 31 juillet, mais il ne sera peut-être pas inutile de répondre à certaines objections pour ce dernier problème, comme pour celui de M. Chaumat que nous venons d'examiner.

Il est certain que dans la nature il n'y a pas de forces infinies et par suite pas de percussions, mais il ne faut pas oublier que ce que l'on demande à la Mécanique appliquée, dans le domaine de laquelle se trouve la théorie du frottement, c'est, non de nous donner la représentation rigoureuse des phénomènes, mais bien de nous en fournir une image assez approchée pour que nous puissions nous en servir pour prévoir les résultats finaux.

Or, s'il n'y a pas de forces infinies, il peut dans certains cas en intervenir d'assez grandes et dont la durée d'action est assez faible, pour que les résultats finaux provenant de leur intervention soient dans les limites d'approximation dont nous avons besoin, les mêmes que si on les remplaçait par des percussions.

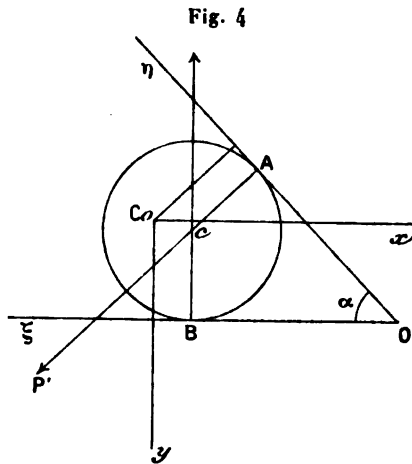
Dans le cas qui nous occupe, ni la réaction, ni la force de frottement ne deviennent infinies, mais elles deviennent, pendant une certaine période très courte, assez grandes pour que, si l'on n'a en vue que ce qui se passe après cette période, on puisse les remplacer par des percussions.

Il est bien certain d'ailleurs que l'introduction d'une percussion produit une discontinuité dans la suite des phénomènes, mais cette discontinuité n'existe pas réellement, c'est nous qui l'introduisons pour la facilité de nos calculs.

Il arrive d'ailleurs aussi que nous introduisons nous-mêmes dans certains cas des percussions dans nos problèmes, sans y

faire attention, c'est lorsqu'il s'agit de systèmes à liaisons pour lesquels l'hypothèse de la rigidité absolue que l'on suppose à ces liaisons exige que l'on suppose également infinies les pressions ou tensions qu'elles supportent, et c'est précisément ce qui a lieu dans les deux problèmes que M. Painlevé considère dans sa Communication du 2 octobre.

Pour le faire voir nous allons reprendre ces deux problèmes en introduisant les forces de liaisons, ce qui nous ramènera d'ailleurs à la seconde explication donnée par M. Lecornu dans sa Communication du 6 mars. Prenons d'abord le problème de M. Chaumat que nous venons d'examiner.



Nous supposons que la roue est d'abord maintenue en contact géométrique avec $O\xi$ et $O\eta$ par une force verticale $nh = mg$ ⁽¹⁾ qu'on fait ensuite tendre vers zéro. Nous rapportons le mouvement à un système d'axes rectangulaires C_0xy passant par la position initiale du centre de la roue; lorsque le centre de la roue sera venu en C, par suite du coincement de cette roue entre $O\xi$ et $O\eta$, elle se sera rapprochée de $O\xi$ d'une quantité y et de $O\eta$ d'une quantité $x \sin \alpha - y \cos \alpha$; la composante normale P de la réaction de $O\xi$ sur la roue est une fonction de y et la pression P' de $O\eta$ une

(¹) Je désigne cette force ici par nh au lieu de h pour simplifier l'écriture.

fonction de $x \sin \alpha - y \cos \alpha$; on peut même, tout au moins dans une première approximation, supposer P et P' proportionnels à ces quantités. On aura alors

$$\begin{aligned} P &= m \mu^2 y, \\ P' &= m \mu^2 (x \sin \alpha - y \cos \alpha) \quad (1). \end{aligned}$$

On aura alors pour les équations du mouvement de la roue

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= P f - P' \sin \alpha, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= mg - mh + P' \cos \alpha - P, \\ I \frac{d^2 \theta}{dt^2} &= -P' f(R - y). \end{aligned}$$

En remplaçant P et P' par leurs valeurs les deux premières deviennent

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= \mu^2 f y - \mu^2 (x \sin \alpha - y \cos \alpha) \sin \alpha, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= g - h + \mu^2 (x \sin \alpha - y \cos \alpha) \cos \alpha - \mu^2 y. \end{aligned}$$

Multiplions la première par le facteur λ et ajoutons-la à la seconde; nous aurons

$$\begin{aligned} \frac{d^2 (\lambda x + y)}{dt^2} \\ = g - h + \mu^2 (\sin \alpha \cos \alpha - \lambda \sin^2 \alpha) x + \mu^2 (\lambda f + \lambda \sin \alpha \cos \alpha - 1 - \cos^2 \alpha) y. \end{aligned}$$

Nous poserons alors

$$\frac{\sin \alpha \cos \alpha - \lambda \sin^2 \alpha}{\lambda} = \frac{\lambda f + \lambda \sin \alpha \cos \alpha - 1 - \cos^2 \alpha}{1} = k,$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned} \lambda (\sin^2 \alpha + k) - \sin \alpha \cos \alpha &= 0, \\ \lambda (f + \sin \alpha \cos \alpha) - 1 - k - \cos^2 \alpha &= 0. \end{aligned}$$

(1) On aurait pu, si l'on avait voulu tenir compte non seulement de la compression de la roue mais aussi de celle des deux droites $O\xi$ et $O\tau$, prendre pour les deux coefficients de proportionnalité des valeurs différentes, si l'élasticité des deux droites n'était pas la même, mais cela changerait peu de chose.

On a donc pour déterminer k l'équation

$$(\sin^2 \alpha + k)(1 + k + \cos^2 \alpha) - \sin \alpha \cos \alpha (f + \sin \alpha \cos \alpha) = 0,$$

où

$$k^2 + 2k + \sin^2 \alpha - f \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

ou

$$k^2 + 2k - \sin \alpha \cos \alpha (f - \tan \alpha) = 0,$$

puisque nous supposons $f > \tan \alpha$, les racines sont de signes contraires.

Si l'on prend pour k l'une des racines de cette équation et pour λ la valeur correspondante, on aura

$$\frac{d^2(\lambda x + y)}{dt^2} = g - h + \mu^2 k(\lambda x + y).$$

Nous supposons $h = g$ pour $t = 0$ et décroissant à partir de cette valeur nous pourrions donc prendre

$$h = g - nt.$$

Notre équation devient alors

$$\frac{d^2(\lambda x + y)}{dt^2} = nt + \mu^2 k(\lambda x + y);$$

nous aurons alors comme intégrale particulière

$$\lambda x + y = -\frac{nt}{\mu^2 k}.$$

Prenons d'abord pour k la racine positive que je désigne par α^2 et soit λ , la valeur correspondante de λ , on aura

$$\lambda_1 x + y = -\frac{nt}{\mu^2 \alpha^2} + A e^{\mu \alpha t} + B e^{-\mu \alpha t},$$

et, comme pour $t = 0$

$$x = y = 0, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0,$$

on aura

$$A + B = 0,$$

$$-\frac{n}{\mu^2 \alpha^2} + \mu \alpha (A - B) = 0,$$

d'où

$$A = \frac{n}{2\mu^2 a^2} = -B.$$

Prenons ensuite pour k la racine négative que je désigne par $-b^2$ et, si λ_2 est la valeur correspondante de λ , on aura

$$\lambda_2 x + y = \frac{nt}{\mu^2 b^2} + C \cos \mu b t + D \sin \mu b t,$$

et les conditions initiales donneront

$$\begin{aligned} C &= 0, \\ \frac{n}{\mu^2 b^2} + D \mu b &= 0. \end{aligned}$$

On a donc en définitive

$$(12) \quad \lambda_1 x + y = \frac{n}{2\mu^2 a^2} \left(\frac{e^{\mu a t} - e^{-\mu a t}}{\mu a} - 2t \right),$$

$$(13) \quad \lambda_2 x + y = \frac{n}{\mu^2 b^2} \left(t - \frac{\sin \mu b t}{\mu b} \right).$$

Ces valeurs font voir que, *quelque petit que soit* n , comme μ est très grand, x et y , et par suite aussi P et P' , croîtront très rapidement.

Mais le mouvement de rotation de la roue est fourni par l'équation

$$(14) \quad I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -P f R = -f m \mu^2 R y,$$

car l'on peut négliger y devant R , et, comme ω_0 est positif, $\frac{d\theta}{dt}$ s'annulera très rapidement et d'autant plus rapidement que μ sera plus grand, c'est-à-dire que la roue et les droites sur lesquelles elle s'appuie seront plus raides.

Si l'on supposait ces droites et la roue incompressibles, on serait conduit à supposer μ infini, et par suite P également infini, ce qui entraînerait une percussion arrêtant la roue dans un temps infiniment petit.

M. Painlevé a fait, au sujet du résultat analogue obtenu par M. Lecornu dans sa Communication du 6 mars, l'objection suivante. Il résulte des formules écrites plus haut que $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ croissent

avec μ et que par suite la roue se comprime d'autant plus vite qu'elle est plus raide, et il semblait y voir une contradiction. Il y a là, au contraire, un résultat qui s'explique très bien.

En effet, plus la roue sera raide, plus, si l'adhérence est suffisante, les pressions P et P' croîtront rapidement, et l'on conçoit qu'il puisse en résulter aussi une croissance plus rapide de x et de y .

Il est facile toutefois de voir que les valeurs finales de x et y décroissent lorsque μ croît.

En effet, si μ est très grand, ainsi que nous le supposons, on peut réduire les formules (12) et (13) aux suivantes, au moins comme première approximation :

$$\lambda_1 x + y = \frac{n}{2\mu^3 a^3} e^{\mu a t},$$

$$\lambda_2 x + y = 0,$$

d'où l'on déduit

$$y = \frac{\lambda_2 n e^{\mu a t}}{2\mu^3 a^3 (\lambda_2 - \lambda_1)}.$$

Mais

$$\lambda_1 = \frac{1 + k_1 + \cos^2 \alpha}{f + \sin \alpha \cos \alpha},$$

$$\lambda_2 = \frac{1 + k_2 + \cos^2 \alpha}{f + \sin \alpha \cos \alpha} = -\cos \alpha \frac{\sqrt{1 + f \tan \alpha} - \cos \alpha}{f + \sin \alpha \cos \alpha},$$

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{k_1 - k_2}{f + \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2 \cos \alpha \sqrt{1 + f \tan \alpha}}{f + \sin \alpha \cos \alpha},$$

donc

$$y = \frac{\sqrt{1 + f \tan \alpha} - \cos \alpha}{4 \sqrt{1 + f \tan \alpha}} \frac{n e^{\mu a t}}{\mu^3 a^3} = q \frac{n e^{\mu a t}}{\mu^3 a^3},$$

en posant

$$q = \frac{\sqrt{1 + f \tan \alpha} - \cos \alpha}{4 \sqrt{1 + f \tan \alpha}}.$$

(14) donnera donc

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = - m f R q n \frac{e^{\mu a t}}{\mu a^3},$$

d'où

$$I \frac{d\theta}{dt} = \omega_0 - m f R q n \frac{e^{\mu a t}}{\mu a^4}.$$

On en conclura pour la valeur t_1 de t pour laquelle la roue

s'arrête

$$e^{\mu a t_1} = \frac{\mu^2 a^4 \omega_0}{m f R q n},$$

d'où

$$t_1 = \frac{1}{\mu a} L \frac{\mu^2 a^4 \omega_0}{m f R q n},$$

valeur qui, quel que soit n , tend vers zéro lorsque μ croît indéfiniment, et est très petite pour de grandes valeurs de μ ⁽¹⁾.

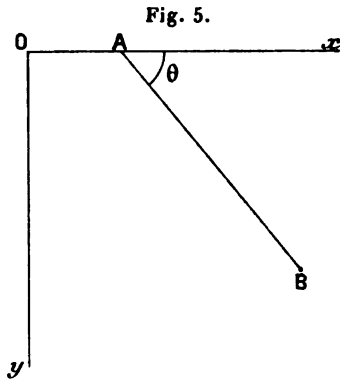
De plus, on aura pour la valeur finale y_1 de y

$$y_1 = \frac{q n e^{\mu a t_1}}{\mu^3 a^3} = \frac{a \omega_0}{m f R \mu},$$

valeur d'autant plus petite que μ est plus grand et qui s'annule pour μ infini.

On voit donc que, si la roue se comprime d'autant plus vite qu'elle est plus raide, sa compression finale est en raison inverse de sa raideur, résultat absolument rationnel.

Considérons maintenant le second problème envisagé par M. Painlevé en nous bornant au cas le plus simple, celui traité par M. Appell dans son *Traité de Mécanique*.



Considérons donc deux points matériels A et B de même masse égale à 1 et reliés par une tige dont la masse est négligeable par rapport à celle de A et de B.

⁽¹⁾ Ce qui montre bien que, contrairement à ce que dit M. Painlevé dans sa Communication du 2 octobre, l'arrêt de la roue se fait dans un temps très court, quelque petit que soit n .

Soit $r = AB$, nous supposons la tension T de AB proportionnelle à l'allongement, de sorte que nous aurons

$$T = \mu^2(r - r_0).$$

La tige se meut dans le plan vertical xOy et est soumise à la seule pesanteur ⁽¹⁾.

Soient x l'abscisse de A , ξ et y les coordonnées de B . Les équations du mouvement des deux points A et B nous donneront

$$\begin{aligned} x'' &= R_x + T \cos \theta, \\ R_y + T \sin \theta + g &= 0, \\ \xi'' &= -T \cos \theta, \\ y'' &= g - T \sin \theta, \end{aligned}$$

où R_x et R_y sont les composantes de la réaction de Ox .

D'ailleurs, les relations

$$\xi = x + r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

donnent

$$\begin{aligned} \xi'' &= x'' + r'' \cos \theta - 2r'\theta' \sin \theta - r\theta'' \sin \theta - r\theta'^2 \cos \theta, \\ y'' &= r'' \sin \theta + 2r'\theta' \sin \theta + r\theta'' \cos \theta - r\theta'^2 \sin \theta. \end{aligned}$$

On a donc pour les équations du mouvement

$$\begin{aligned} x'' &= R_x + \mu^2(r - r_0) \cos \theta, \\ R_y + g + \mu^2(r - r_0) \sin \theta &= 0, \\ x'' + r'' \cos \theta - 2r'\theta' \sin \theta - r\theta'' \sin \theta - r\theta'^2 \cos \theta + \mu^2(r - r_0) \cos \theta &= 0, \\ r'' \sin \theta + 2r'\theta' \cos \theta + r\theta'' \cos \theta - r\theta'^2 \sin \theta - g + \mu^2(r - r_0) \sin \theta &= 0. \end{aligned}$$

Si le point A se déplace, on aura, de plus,

$$R_x = -\epsilon f R_y, \quad \epsilon x' R_y > 0,$$

où

$$\epsilon = \pm 1.$$

⁽¹⁾ Il est, en effet, inutile de supposer une force horizontale appliquée en A pour réaliser les conditions initiales, car, du moment que l'on introduit une tension proportionnelle à l'allongement, il n'y aura aucune impossibilité même apparente.

On déduit alors des équations précédentes

$$\begin{aligned} R_y &= -g - \mu^2(r - r_0) \sin \theta, \\ x'' &= \epsilon f [g + \mu^2(r - r_0) \sin \theta] + \mu^2(r - r_0) \cos \theta, \\ r'' &= r \theta'^2 + g(\sin \theta - \epsilon f \cos \theta) \mu^2 - (r - r_0)(\epsilon f \sin \theta \cos \theta + 1 + \cos^2 \theta), \\ r \theta'' &= [g + \mu^2(r - r_0) \sin \theta](\cos \theta + \epsilon f \sin \theta) - 2r' \theta'. \end{aligned}$$

Il n'y a plus ici, quelles que soient les conditions initiales, aucune impossibilité, même apparente.

Supposons qu'à l'instant initial pour $t = 0$ on ait

$$r = r_0, \quad \theta'_0 = 0, \quad x'_0 > 0, \quad r'_0 = 0,$$

on aura

$$R_y < 0,$$

et par suite on devra prendre

$$\epsilon = -1,$$

et l'on devra garder cette valeur tant que x' et R_y conservent le même signe.

Nous aurons donc

$$(15) \quad r'' = r \theta'^2 + g(\sin \theta + f \cos \theta) + \mu^2(r - r_0)(f \sin \theta \cos \theta - 1 - \cos^2 \theta).$$

Nous supposons

$$f > \frac{1 + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta}, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Considérons maintenant une période de temps assez courte, à partir de $t = 0$, pour que nous puissions pendant cette période, au moins comme première approximation, remplacer θ par une valeur moyenne et le traiter comme une constante dans l'équation précédente; de plus, nous négligerons dans le second membre de (15) $r' \theta'^2$, en vérifiant après coup la légitimité de ces approximations. Nous aurons alors

$$r'' = k^2 \mu^2(r - r_0) + g(\sin \theta + f \cos \theta),$$

où nous avons posé

$$k^2 = f \sin \theta \cos \theta - 1 - \cos^2 \theta > 0.$$

On tire de là, en tenant compte des conditions initiales, et

regardant toujours θ comme constant,

$$r = r_0 + \frac{g(\sin \theta + f \cos \theta)}{2\mu^2 k^2} (e^{\mu k t} + e^{-\mu k t} - 2),$$

on a d'ailleurs, puisque $\varepsilon = -1$,

$$x' = -gf - (f \sin \theta - \cos \theta) \mu^2 (r - r_0),$$

et l'on déduit de la valeur de k^2

$$\frac{1 + k^2}{\cos \theta} = f \sin \theta - \cos \theta,$$

$$\frac{2 + k^2}{\sin \theta} = f \cos \theta + \sin \theta,$$

de sorte que l'on peut écrire

$$r = r_0 + \frac{g(2 + k^2)}{2\mu^2 k^2 \sin \theta} (e^{\mu k t} + e^{-\mu k t} - 2),$$

$$x' = -gf - g \frac{(1 + k^2)(2 + k^2)}{2k^2 \sin \theta \cos \theta} (e^{\mu k t} + e^{-\mu k t} - 2),$$

$$T = g \frac{2 + k^2}{2k^2 \sin \theta} (e^{\mu k t} + e^{-\mu k t} - 2),$$

$$R_y = -g - g \frac{2 + k^2}{2k^2} (e^{\mu k t} + e^{-\mu k t} - 2).$$

Si, d'ailleurs, μ est, ainsi que nous le supposons, très grand, on pourra se contenter de prendre

$$r = r_0 + \frac{g(2 + k^2)}{2\mu^2 k^2 \sin \theta} e^{\mu k t},$$

$$x' = -g \frac{(1 + k^2)(2 + k^2)}{2k^2 \sin \theta \cos \theta} e^{\mu k t},$$

$$T = g \frac{2 + k^2}{2k^2 \sin \theta} e^{\mu k t},$$

et avec la même approximation ⁽¹⁾

$$r\theta'' = - \frac{g(1 + k^2)(2 + k^2)}{2k^2 \cos \theta} e^{\mu k t}.$$

(¹) En négligeant toujours les termes qui ne contiennent pas $e^{\mu k t}$ en facteur devant ceux qui le contiennent, on obtient ainsi des valeurs qu'il ne faudrait pas appliquer pour $t = 0$, mais qui donnent une approximation suffisante dès que t n'est pas rigoureusement nul.

Puis

$$x' = x'_0 - g \frac{(1+k^2)(2+k^2)}{2k^3 \mu \sin \theta \cos \theta} e^{\mu k t},$$

$$\theta - \theta_0 = - \frac{g(1+k^2)(2+k^2)}{2k^4 \mu^2 r \cos \theta} e^{\mu k t}.$$

On a alors pour la valeur t_1 de t pour laquelle x' est nul

$$e^{\mu k t_1} = \frac{2x'_0 k^3 \mu \sin \theta \cos \theta}{g(1+k^2)(2+k^2)},$$

d'où

$$t_1 = \frac{1}{\mu k} L \left(\frac{2x'_0 k^3 \mu \sin \theta \cos \theta}{g(1+k^2)(2+k^2)} \right),$$

valeur très petite puisque μ est très grand. On aura ensuite

$$\theta - \theta_0 = - \frac{x'_0 \sin \theta}{k \mu r}.$$

On voit que cette valeur est très petite et que l'on peut bien, ainsi que nous l'avons fait, traiter θ comme constant.

Remarquons, d'ailleurs, que l'on aura pour la valeur de θ' à la fin de la période que nous considérons

$$\theta'_1 = - \frac{g(1+k^2)(2+k^2)}{2k^3 \mu r \cos \theta} e^{\mu k t_1} = - \frac{x'_0 \sin \theta}{r}.$$

On pourrait faire à ce qui précède l'objection suivante : nous avons négligé, pour calculer r , $r\theta'^2$ dans le second membre de l'expression (15); or, nous venons de voir que la valeur finale de cette quantité est $r\theta'^2 = \frac{x_0'^2 \sin^2 \theta}{r}$ et cette quantité n'est pas négligeable. Il est toutefois facile de faire voir que dans le second membre de (15)

$$r\theta'^2 + g(\sin \theta + f \cos \theta) + \mu^2(r - r_0)(f \sin \theta \cos \theta - 1 - \cos^2 \theta),$$

le premier terme est toujours négligeable par rapport à l'ensemble des deux autres.

En effet, à l'instant initial, $r\theta'^2$, qui est nul, est négligeable devant $g(\sin \theta + f \cos \theta)$, qui ne l'est pas. Ensuite, dès que t a une valeur appréciable, on a sensiblement

$$\theta' = - \frac{g(1+k^2)(2+k^2)}{2k^3 \mu r \cos \theta} e^{\mu k t},$$

$$\mu^2(r - r_0)k^2 = \frac{g(2+k^2)}{2 \sin \theta} k t e^{\mu k t}$$

et, par suite,

$$\frac{r\theta'^2}{\mu^2 k^2 (r - r_0)} = \frac{g(1 + k^2)^2 (2 + k^2)}{2k^6 \mu^2 r \cos^2 \theta} \sin \theta e^{\mu k t};$$

or, ce rapport croît constamment avec t et, à la fin de la période, pour $t = t_1$, on aura

$$\frac{r\theta_1'^2}{\mu^2 k^2 (r_1 - r_0)} = \frac{(1 + k^2)x'_0}{k^2 \mu r} \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta},$$

rapport qui est très petit à cause du facteur μ au dénominateur; nous avons donc pu négliger à bon droit le terme $r\theta'^2$ dans l'expression (15). On a, d'ailleurs, pour la valeur finale de la tension pour $t = t_1$,

$$T_1 = \frac{x'_0 k \mu \cos \theta}{(1 + k^2)},$$

quantité très grande, et qui devient infinie avec μ , c'est-à-dire si l'on suppose la ligne inextensible.

On voit, par ce qui précède, que, dans ce cas encore, l'étude plus détaillée du phénomène conduit absolument aux mêmes conclusions, pour les résultats finaux, que l'hypothèse de M. Lecornu. De plus, cette hypothèse me paraît *infiniment préférable*. En effet, d'une part, elle est, ainsi que nous l'avons vu, une conséquence naturelle de ce qui a toujours été admis comme étant la cause du frottement, et si, en introduisant des percussions, elle produit une discontinuité dans les phénomènes, ce fait est, ainsi que cela ressort des deux problèmes que nous venons d'examiner, une conséquence naturelle de l'hypothèse de la rigidité absolue des liaisons, hypothèse qui, dans les cas que nous avons considérés, rend infinis les efforts supportés par ces liaisons.

Sans aucun doute, si l'on tient compte, comme nous l'avons fait, des tensions élastiques, on peut résoudre, ainsi que nous l'avons vu (1), les problèmes dont il s'agit sans introduire aucune nouvelle hypothèse; mais cela exige, dans chaque cas, une étude particulière et des calculs plus ou moins longs. Au lieu de cela l'hypothèse de M. Lecornu permet de déterminer immédiatement, dans

(1) Et ainsi que M. Lecornu l'avait déjà fait dans sa Communication du 6 mars, pour un autre cas.

chaque cas, le mouvement final qui se produit après la mise en contact des deux corps; or, il est bien certain que ce qui se passe pendant la période très courte qui suit la mise en contact des corps présente, en général, peu d'intérêt.

Par exemple, dans le cas du problème de M. Chaumat, elle nous apprend que la roue s'arrête presque instantanément dès qu'elle est en prise avec Ox .

Dans l'autre problème, elle nous apprend que le point A s'arrête presque instantanément, et, quant à la vitesse du point B, après l'arrêt de A, elle sera fournie par le théorème des moments des quantités de mouvement pris par rapport à A qui nous donnera (1)

$$rx'_0 \sin \theta + r^2 \theta'_1 = 0,$$

d'où

$$\theta'_1 = - \frac{x'_0 \sin \theta}{r}.$$

C'est le résultat auquel nous étions arrivé par l'autre méthode, mais beaucoup moins simplement.

En résumé, l'hypothèse de M. Lecornu nous donne une image des phénomènes, qui, pour le détail de ceux qui se produisent au moment du contact des corps, peut être moins exacte que celle que l'on obtient en tenant compte de l'élasticité des liaisons, mais en revanche elle nous permet de prévoir d'une façon beaucoup plus simple, et avec une exactitude très suffisante, le résultat final qui se produit après cette période de mise en contact des corps, ce qui est le but principal que l'on se propose.

(1) Puisqu'on regarde les phénomènes comme résultant d'une percussion appliquée en A qui réduit ce point au repos, et que la vitesse initiale de B est x'_0 parallèle à Ox et la vitesse finale $r\theta'_1$ perpendiculaire à AB.

EXTRAIT DES STATUTS ET DU RÈGLEMENT.

La Société mathématique de France a pour objet l'avancement et la propagation des études de Mathématiques pures et appliquées. Elle y concourt par ses travaux et ses publications. Elle a son siège à Paris.

La Société se compose de sociétaires perpétuels, de membres résidents et de membres non résidents, en nombre illimité.

Sont considérés comme résidents les membres qui ont à Paris leur domicile ou leurs occupations professionnelles.

Les Étrangers peuvent faire partie de la Société.

Les conditions à remplir, pour être membre de la Société, sont les suivantes : 1° avoir été présenté par deux de ses membres et agréé par le Conseil d'administration ou par le Bureau agissant en vertu d'un mandat du Conseil; 2° avoir obtenu, à l'une des séances qui ont suivi la présentation, les suffrages de la majorité des membres présents; 3° avoir versé un droit d'admission de *dix francs*; 4° payer une cotisation annuelle dont le montant est de *vingt francs* pour les membres résidents, et de *quinze francs* pour les membres non résidents.

La cotisation annuelle peut toujours être rachetée par une somme de *trois cents francs*, versée dans les conditions fixées par le règlement administratif de la Société.

Ce versement confère le titre de *sociétaire perpétuel*.

La cotisation annuelle est payée au commencement de chaque exercice dont l'origine est fixée au 1^{er} novembre de chaque année.

Les nouveaux membres doivent payer la totalité de la cotisation de l'exercice en cours, quelle que soit l'époque de leur admission.

La Société tient des séances ordinaires deux fois par mois; elle prend trois mois de vacances, en août, septembre et octobre.

Pour assister aux séances, les personnes étrangères à la Société doivent être présentées par l'un de ses membres.

La Société publie par livraisons un Recueil annuel qui a pour titre : *Bulletin de la Société mathématique de France*, et qui contient, avec un extrait des procès-verbaux des séances, des Notes et Mémoires sur les Mathématiques pures ou appliquées, ayant pour auteurs des membres de la Société, et présentant quelque originalité au point de vue de la méthode ou des résultats.

Les livraisons du *Bulletin* sont adressées à tous les membres de la Société, au fur et à mesure de leur publication. Toutefois, dans le cas où un sociétaire se met en retard dans le paiement de sa cotisation, l'envoi du *Bulletin* est suspendu pour lui, jusqu'à ce qu'il ait acquitté l'arriéré.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS.

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6^e).

OCAGNE (Maurice d'). Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur à l'École des Ponts et Chaussées, Répétiteur à l'École Polytechnique. —

Le calcul simplifié par les procédés mécaniques et graphiques, Histoire et description sommaire des instruments et machines à calculer, tables, abaques et nomogrammes. 2^e édition, entièrement refondue et considérablement augmentée. In-8 (23 × 14) de VIII-228 pages, avec 70 figures, cartonné; 1905..... 5 fr.

TABLE DES MATIÈRES

(FASCICULE II.)

	Pages.
Comptes rendus des séances.....	61
[S 2] COMBEBIAC. — Sur l'application des équations de Lagrange à la détermination des actions exercées par un fluide parfait incompressible animé d'un mouvement irrotationnel.....	63
[C 1 c] HADAMARD. — Sur les transformations ponctuelles.....	71
[E 7 a] GOURSAT (E.). — Remarques sur quelques théorèmes d'existence.....	85
[R 9 a] DE SPARRE. — Note au sujet du frottement de glissement...	108

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6°).

DARBOUX (G.), Membre de l'Institut, Doyen de la Faculté des Sciences et Professeur de Géométrie supérieure à l'Université de Paris. — **Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes.** 2 volumes grand in-8, se vendant séparément.

TOME I. Volume de vi-338 pages; 1898..... 10 fr.

TOME II..... (*En préparation.*)

OCAGNE (Maurice d'), Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur à l'École des Ponts et Chaussées, Répétiteur à l'École Polytechnique. — **Traité de Nomographie. Théorie des abaques. Applications.** Grand in-8, avec 177 figures et 1 planche; 1899.

Broché..... 14 fr. | Relié (cuir souple).. 17 fr.

PICARD (Émile), Membre de l'Institut, Professeur à l'Université de Paris, et **SIMART (Georges)**, Capitaine de frégate, Répétiteur à l'École Polytechnique. — **Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes.** 2 volumes grand in-8, se vendant séparément.

TOME I : Volume de vi-246 pages; 1897..... 9 fr.

TOME II : Prix du volume complet pour les souscripteurs... 14 fr.

(*Deux fascicules comprenant vi-385 pages ont paru.*)

Publication trimestrielle.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE

PUBLIÉ
PAR LES SECRÉTAIRES.

S'adresser, pour la rédaction, à M. RAFFY, rue Pierre-Nicole, 7, Paris, 5^e;
pour la distribution, à M. GRÉVY, rue Claude-Bernard, 71, Paris, 5^e.

TOME XXXIV. — FASCICULE III.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
A LA SORBONNE.

1906

MM. les Membres de la Société sont priés d'adresser leur cotisation à M. *Claude-Lafontaine*, banquier, rue de Trévis, n° 32, à Paris, Trésorier de la Société.

On s'abonne et l'on trouve les Volumes déjà publiés au siège de la Société et à la Librairie Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, Paris.

Les séances de la Société mathématique ont lieu les premier et troisième jeudis de chaque mois à 9 heures du soir.

Depuis le 1^{er} mars 1900 les séances de la Société ont lieu dans une salle de la Faculté des Sciences (entrée place de la Sorbonne, escalier tout au bout de la galerie, deuxième étage à droite).

Les Membres de la Société ont dû recevoir une carte, portant le timbre du Secrétariat, leur donnant accès à la Bibliothèque de l'Université, et fournissant à ce sujet les renseignements nécessaires; ceux qui ne l'auraient pas reçue sont priés d'en informer le Secrétariat.

La correspondance peut être adressée, soit à la Faculté des Sciences, place de la Sorbonne, soit au domicile de l'un des secrétaires, de préférence à M. Grévy, sauf ce qui concerne la rédaction du Bulletin, qui doit être adressé de préférence à M. Raffy.

AVIS.

Dans sa séance du 15 mars 1906, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé qu'à l'avenir tout Membre de la Société qui voudra compléter sa collection du *Bulletin* aura le droit personnel de le faire, une seule fois pour chacun des volumes publiés avant son admission, aux prix suivants :

- 3 francs le volume pour chacun des trente premiers tomes;
- 6 francs le volume pour chacun des tomes suivants, ce dernier prix devant être réduit à 4 francs pour les acheteurs de *dix volumes* au moins.

Dans sa séance du 28 février 1900, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé qu'à l'avenir tout Membre de la Société, auteur d'un travail *quelconque* inséré dans le Bulletin et désirant en obtenir des tirages à part, **devra en faire la demande en retournant l'épreuve corrigée.**

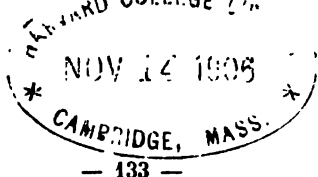
Si le nombre demandé ne dépasse pas *cinquante*, les frais du tirage à part seront faits par la Société.

Conformément à des décisions prises par le Conseil et par la Commission d'impression :

1^o Le *Bulletin*, depuis le Tome XXVII, paraît **tous les trois mois**;

2^o Les auteurs de tous les travaux destinés au *Bulletin* sont **instamment priés** d'inscrire en tête de leurs manuscrits la classification que leur assigne, d'après le sujet traité, l'*Index du Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*;

3^o Ils sont également invités à ne pas dépasser, autant que possible, la proportion de **une figure** pour **quatre pages** de texte imprimé.



COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 3 AVRIL 1906.

PRÉSIDENTE DE M. HADAMARD.

Communications :

M. Popovici : *Sur les multiplicateurs des systèmes d'équations différentielles.*

M. Hadamard : *Sur le principe de Dirichlet.*

SÉANCE DU 26 AVRIL 1906.

PRÉSIDENTE DE M. BLUTEL.

Communications :

M. Raffy : *Sur la correspondance réciproque entre les lignes asymptotiques et le réseau diagonal conjugué.*

M. BLUTEL présente deux modèles d'une surface réglée du quatrième ordre possédant deux droites doubles.

SÉANCE DU 3 MAI 1906.

PRÉSIDENTE DE M. HADAMARD.

Communications :

M. A. Demoulin : *Sur certaines transformations ponctuelles de l'espace.*

M. Popovici : *Sur l'intégration de quelques équations aux dérivées partielles.*

M. Hadamard : *Sur les contours fermés.*

SÉANCE DU 17 MAI 1906.

PRÉSIDENTE DE M. HADAMARD.

Communication :

M. Servant : *Sur l'habillage des surfaces de révolution.*

SÉANCE DU 7 JUIN 1907.

PRÉSIDENCE DE M. HADAMARD.

Communications :

M. Sanielevici : *Sur l'équation aux dérivées partielles que vérifie une somme de plusieurs fonctions homogènes.*

M. Hadamard : *Sur la méthode des approximations successives.*

M. Remy : *Sur la surface de Kummer.*

SÉANCE DU 21 JUIN 1906.

PRÉSIDENCE DE M. R. PERRIN.

Communications :

M. Marcus : *Sur le développement de l'inverse d'une série entière.*

M. Bioche : *Sur la symétrie de certaines courbes.*

M. Raffy : *Sur la correspondance entre lignes asymptotiques et lignes diagonales.*

SÉANCE DU 5 JUILLET 1906.

PRÉSIDENCE DE M. BLUTEL.

Communications :

M. Popovici : *Sur les développements en série de fonctions.*

M. Marcus : *Sur le développement d'une racine simple d'une fonction entière.*

M. R. Perrin : *Sur les lois de force qui font décrire à un point une conique, quelles que soient les circonstances initiales.*

M. Raffy : *Sur la transformation de Lie.*

M. PETROVITCH adresse un Mémoire intitulé : *Sur certaines transcendentes entières.*

SÉANCE DU 19 JUILLET 1906.

PRÉSIDENCE DE M. BLUTEL.

Communications :

M. Maillet : *Sur les nombres transcendants dont le développement en fraction continue est quasi-périodique et sur les nombres de Liouville.*

M. Gérardin : *Sur les nombres amiables.*

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR LE PRINCIPE DE DIRICHLET;

Par M. HADAMARD.

M. Hilbert a, comme on sait, indiqué une méthode permettant d'établir la possibilité du problème de Dirichlet (formation d'une fonction harmonique dans une aire donnée et prenant des valeurs données sur le contour) par la méthode même qui avait servi à Riemann, c'est-à-dire en prouvant directement que l'intégrale

$$(1) \quad I = \int \int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy,$$

étendue à l'aire donnée S, a un minimum.

A cet effet, l'auteur se place dans l'hypothèse où le contour de l'aire S est analytique (ou du moins composé de parties analytiques), et où il en est de même de la distribution des valeurs données de u sur ce contour. Il est alors clair, en tout cas, qu'il existe des fonctions u qui prennent ces valeurs à la frontière et qui, dans l'intérieur de l'aire, admettent des dérivées partielles finies, pour lesquelles, par conséquent, l'intégrale I existe.

Mais on sait que l'existence de la solution a été établie par d'autres méthodes, en supposant les valeurs de u simplement continues. Dans ces conditions, ce premier point de départ du raisonnement de M. Hilbert, à savoir l'existence de fonctions u satis-

faisant aux conditions aux limites et pour lesquelles l'intégrale I ait un sens, cesse d'être aussi évident.

Or, il ne faut pas croire qu'il y ait là une difficulté toute superficielle.

Tout d'abord, si l'on cherche une fonction u prenant sur le contour d'une aire des valeurs données (simplement continues) et admettant, en tout point intérieur, des dérivées partielles, on ne trouvera guère, pour en former, de moyen plus simple que la résolution même du problème de Dirichlet.

Mais il y a plus : et l'on peut établir en toute rigueur que la méthode de M. Hilbert peut être inapplicable par le fait qu'il n'existe aucune fonction u qui donne à l'intégrale I un sens.

Supposons que S soit un cercle de rayon 1 : la solution du problème de Dirichlet est alors

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \\ &= \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \rho^n \cos(n\theta + \alpha_n) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} a_n &= c_n \cos \alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(1, \theta) \cos \theta \, d\theta, \\ b_n &= c_n \sin \alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(1, \theta) \sin \theta \, d\theta. \end{aligned}$$

L'intégrale

$$\iint \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^2 \right] dx \, dy = \iint \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial \theta} \right)^2 \right] \rho \, d\rho \, d\theta,$$

étendue à l'intérieur du cercle de rayon $\rho < 1$ qui a pour centre l'origine, est égale à

$$(2) \quad \pi \sum n c_n^2 \rho^{2n}.$$

Elle augmente donc indéfiniment lorsque ρ tend vers un, si la série

$$(3) \quad \sum n c_n^2$$

est divergente. Or ceci peut arriver même si la série trigonométrique qui représente u sur la circonférence $\rho = 1$ est absolument convergente, il suffit de prendre

$$\left\{ \begin{array}{ll} c_n = 0 & \text{pour } n \neq 2^p \\ c_n = \frac{1}{2^p} & \text{pour } n = 2^p. \end{array} \right.$$

S'il en est ainsi, on voit que la solution du problème de Dirichlet donne lieu à une intégrale de I infinie. Comme cette solution u_0 correspond au minimum de I , il est à prévoir qu'aucune autre fonction satisfaisant aux conditions aux limites ne pourra fournir une intégrale finie.

Mais, contrairement à ce qu'on pourrait croire *a priori*, il paraît impossible de fonder une démonstration rigoureuse de ce fait sur la considération de la fonction u_0 , et il est nécessaire de raisonner directement.

Soit donc u une fonction quelconque définie à l'intérieur du centre de rayon 1, admettant, en tout point *intérieur* à ce cercle, des dérivées premières continues, et prenant sur la circonférence les valeurs données. Si l'on pose

$$A_n(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho, \theta) \cos n\theta \, d\theta,$$

$$B_n(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho, \theta) \sin n\theta \, d\theta,$$

puis

$$A'_n(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial \rho} \cos n\theta \, d\theta,$$

$$B'_n(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial \rho} \sin n\theta \, d\theta,$$

on aura tout d'abord

$$A'_n = \frac{dA_n}{d\rho}, \quad B'_n = \frac{dB_n}{d\rho}.$$

D'autre part et sans préjuger la possibilité de développer $\frac{\partial u}{\partial \rho}$ en

série trigonométrique, on sait (1) qu'on a

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \right)^2 d\theta > \frac{A_0'^2}{2} + \sum_1^n (A_n'^2 + B_n'^2),$$

quel que soit l'entier n auquel on arrête la sommation.

De même, comme on peut écrire, pour $n > 0$,

$$A_n = -\frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial \theta} \sin n\theta d\theta,$$

$$B_n = \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial \theta} \cos n\theta d\theta,$$

on aura

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 d\theta > \sum_1^n n^2 (A_n^2 + B_n^2).$$

On a donc

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \rho d\rho \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 \right] d\theta > \sum_1^n \int_0^{\rho_0} \left(\rho A_n'^2 + n^2 \frac{A_n^2}{\rho} \right) d\rho \\ & \quad + \sum_1^n \int_0^{\rho_0} \left(\rho B_n'^2 + n^2 \frac{B_n^2}{\rho} \right) d\rho. \end{aligned} \right.$$

Or les méthodes ordinaires du calcul des variations permettent de montrer que l'intégrale

$$\int_0^{\rho_0} \left(\rho A_n'^2 + n^2 \frac{A_n^2}{\rho} \right) d\rho,$$

où $A_n(\rho)$ est une fonction assujettie à s'annuler pour $\rho = 0$, est au moins égale à $n A_n^2(\rho_0)$.

Comme, pour $\rho = 1$, on a

$$A_n = a_n, B_n = b_n,$$

nous retombons bien sur la conclusion énoncée : nous voyons que la méthode de M. Hilbert peut être inapplicable, alors même que le problème de Dirichlet a effectivement une solution.

(1) Voir, par exemple, HARNACK, *Mathematische Annalen*, t. XVII, 1880, p. 125; HUGONOT, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XCV, 1882, p. 909.

LES ANTICAUSTIQUES DU PARABOLOÏDE HYPERBOLIQUE ÉQUILATÈRE;

Par M. DE MONTCHÉUIL.

Laguerre ⁽¹⁾ et, après lui, M. Humbert ⁽²⁾ ont été amenés, par l'étude des courbes de direction, à considérer les anticaustiques par réflexion pour des rayons parallèles, des courbes planes algébriques et en particulier de la parabole. Ces auteurs ont surtout considéré le cas des rayons perpendiculaires à l'axe de cette dernière courbe. Celui des rayons parallèles à cet axe est d'ailleurs sans intérêt, quand on suppose les rayons réfléchis dans le plan de la courbe. Alors, en effet, tout est dit quand on a remarqué que ces rayons convergent au foyer de la parabole. Mais il n'est nullement nécessaire de supposer qu'un rayon réfléchi par une courbe plane reste dans le plan de celle-ci. La direction de ce rayon *n'est bien définie* que lorsque, avec la direction du rayon incident et la courbe dirimante, on donne encore le plan passant par la tangente, sur lequel a lieu la réflexion; et si d'ordinaire on suppose implicitement que cette réflexion se fait sur un cylindre qui admet la courbe dirimante pour section droite, cette hypothèse ne s'impose en aucune façon.

Restant donc dans l'ordre d'idées de Laguerre et de M. Humbert, nous allons indiquer très sommairement quelques propriétés des anticaustiques du paraboloid hyperbolique équilatère pour des systèmes de rayons parallèles. Nous étudierons d'abord les anticaustiques de la surface, ensuite celles de diverses courbes tracées sur cette surface et tout particulièrement celles des sections paraboliques.

I.

Soit donné le paraboloid hyperbolique équilatère défini par l'équation

$$(1) \quad z = \frac{y^2 - x^2}{4a}.$$

⁽¹⁾ *Nouvelles Annales*, 3^e série, t. II, 1883.

⁽²⁾ *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1888.

Nous allons établir que cette surface jouit des propriétés suivantes :

- 1° *Elle est la surface moyenne de la cyclide de Dupin.*
- 2° *Elle admet cette surface pour anticaustique, les rayons incidents étant supposés parallèles à l'axe des z .*
- 3° *La caustique est formée du système de deux paraboles situées dans deux plans perpendiculaires, et telles que le sommet de chacune d'elles soit au foyer de l'autre.*
- 4° *Les cosinus directeurs des rayons réfléchis et les coordonnées de l'anticaustique s'expriment rationnellement en fonction des coordonnées de la projection de la surface directrice sur le plan des xy .*
- 5° *Les coordonnées du parabolôïde et celles de la cyclide sont liées par une transformation birationnelle qui fait correspondre point par point deux familles de sections paraboliques de celle-là aux cercles, lignes de courbure de celle-ci.*

Nous avons établi la première proposition dans notre thèse : *Sur une classe de surfaces* (1).

La cyclide de Dupin qui admet pour surface moyenne le parabolôïde défini par l'équation (1) est donnée par l'équation

$$(2) \quad \frac{x^2}{z + za} + \frac{y^2}{z - za} + z = 0.$$

Avant d'en venir à l'examen des autres propositions, remarquons que la cyclide et sa surface moyenne pourront être obtenues par la construction suivante :

Traçons deux paraboles identiques ayant pour axe commun celui des z , l'une dans le plan des xy , l'autre dans celui des yz , et telles que le sommet de chacune d'elles se confonde avec le foyer de l'autre. La congruence des droites qui s'appuient sur ces deux paraboles est celle des normales à la cyclide de Dupin. Ces paraboles représentent les deux courbes auxquelles se réduisent les deux nappes de la surface des centres de courbure. On voit dès lors que le point milieu du segment qui relie les deux paraboles décrira la surface moyenne de la cyclide.

(1) Gauthier-Villars, 1902, p. 68.

Il nous reste à déterminer le point de la normale qui décrit la surface. Supposons pour un instant notre seconde proposition démontrée. Construisons alors un cercle vertical tangent au plan des xy contenant la normale dans son plan et ayant pour centre le point milieu du segment focal. On se rend compte aisément que l'un des points d'intersection du cercle et de la normale décrit la cyclide.

Nous avons affirmé que les rayons parallèles à l'axe des z se réfléchissent sur le parabolôïde normalement à la cyclide. Cette proposition peut être vérifiée comme il suit :

Quand on passe des coordonnées cartésiennes à celles de O. Bonnet, l'équation (2) de la cyclide de Dupin prend la forme

$$(3) \quad \xi = a(u^2 + u_1^2).$$

Or, cette expression de ξ vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial u_1} = 0,$$

équation qui est celle des surfaces pour lesquelles la demi-somme des rayons de courbure est égale à la distance du point donné de la surface moyenne à un plan fixe ⁽¹⁾. Par suite les deux nappes de l'enveloppe de la sphère tangente à la cyclide et dont le centre décrit le parabolôïde seront formées de cette même cyclide et d'un plan fixe. Ici, le plan fixe étant celui des xy , l'anticaustique du parabolôïde pour les rayons parallèles à l'axe des z sera bien la cyclide de Dupin.

La troisième proposition découle de la seconde. Les rayons réfléchis étant normaux à la cyclide passeront nécessairement par les deux paraboles auxquelles se réduisent les deux nappes de la surface des centres.

La quatrième proposition qui va découler des formules que nous allons établir à l'instant peut encore être considérée comme la conséquence à peu près immédiate d'une affirmation que nous avons démontrée ailleurs ⁽²⁾ et qui peut se formuler comme il

⁽¹⁾ Thèse déjà citée, p. 29.

⁽²⁾ *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXXII, 1904, p. 173.

suit : Une surface étant définie par une relation algébrique quelconque entre les coordonnées de O . Bonnet, les systèmes formés des rayons normaux à cette surface et des rayons réfléchis par la surface moyenne sont analytiquement séparables. Il en est de même des surfaces normales à ces congruences qui constituent les deux nappes de l'enveloppe d'une sphère variable dont le centre décrit la surface directrice.

D'ailleurs la démonstration de cette proposition et celle de la suivante sont une conséquence des formules que nous allons établir.

En prenant pour point de départ l'équation (2) on obtient les expressions suivantes des coordonnées de la surface moyenne :

$$(4) \quad \begin{cases} x = -a(u + u_1), \\ y = ia(u_1 - u), \\ z = -\frac{a}{2}(u^2 + u_1^2). \end{cases}$$

On sait d'ailleurs que les cosinus directeurs c, c', c'' de la normale à la cyclide sont exprimés par les relations

$$\begin{aligned} c &= \frac{u + u_1}{1 + uu_1}, \\ c' &= i \frac{u_1 - u}{1 + uu_1}, \\ c'' &= \frac{uu_1 - 1}{1 + uu_1}. \end{aligned}$$

Éliminant u, u_1 entre ce système et le système (4), il vient

$$(5) \quad \begin{cases} c = -\frac{4ax}{x^2 + y^2 + 4a^2}, \\ c' = \frac{4ay}{x^2 + y^2 + 4a^2}, \\ c'' = \frac{x^2 + y^2 - 4a^2}{x^2 + y^2 + 4a^2}. \end{cases}$$

X, Y, Z désignant les coordonnées courantes, la normale de cosinus directeurs c, c', c'' passant par le point de coordonnées $x,$

y, z du paraboloid sera déterminée par le système

$$(6) \quad \begin{cases} X = x + \frac{4ax}{x^2 + y^2 + 4a^2} \lambda, \\ Y = y - \frac{4ay}{x^2 + y^2 + 4a^2} \lambda, \\ Z = \frac{y^2 - x^2}{4a} - \frac{x^2 + y^2 - 4a^2}{x^2 + y^2 + 4a^2} \lambda. \end{cases}$$

λ désigne ici la distance d'un point donné de la normale à son point de rencontre avec le paraboloid.

Pour obtenir les expressions des coordonnées de l'anticaustique, nous devons donner à λ , dans le système (6), la valeur de la demi-somme des rayons de courbure, valeur qui est ici égale à z , puisque la sphère dont le centre décrit la surface moyenne et qui a pour rayon la demi-somme des rayons de courbure est tangente (nous l'avons vu) au plan des xy . Nous avons donc le système

$$(7) \quad \begin{cases} X = 2x \frac{y^2 + 2a^2}{x^2 + y^2 + 4a^2}, \\ Y = 2y \frac{x^2 + 2a^2}{x^2 + y^2 + 4a^2}, \\ Z = 2a \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2 + 4a^2}. \end{cases}$$

Les systèmes (5) et (7) définissent les cosinus directeurs des normales de la cyclide et ses coordonnées en fonction rationnelle des coordonnées du paraboloid, ou, si l'on veut, des coordonnées de sa projection sur le plan des xy . Il nous reste maintenant à exprimer les coordonnées du paraboloid en fonction de celles de la cyclide.

Dans ce but, cherchons les paramètres des lignes de courbure de cette dernière surface. En désignant par ρ, ρ_1 ces paramètres on déduit de l'équation (3)

$$\begin{aligned} \rho &= u + u_1, \\ \rho_1 &= i(u_1 - u). \end{aligned}$$

D'où, en tenant compte des expressions de x, y coordonnées du paraboloid,

$$\begin{aligned} x &= -a\rho, \\ y &= a\rho_1. \end{aligned}$$

Ces lignes de courbure sont donc des courbes planes. Si nous

déterminons les équations de ces plans et si nous y remplaçons ρ, ρ_1 par leurs valeurs en x, y nous obtenons le système

$$\begin{aligned} 2aX - x(Z + 2a) &= 0, \\ 2aY + y(Z - 2a) &= 0. \end{aligned}$$

Or, il reste à remarquer que ces relations nous donnent précisément deux des trois quantités x, y, z que nous cherchons à exprimer rationnellement en X, Y, Z . Il nous suffira donc de leur associer l'équation du paraboloïde, et nous obtiendrons le système

$$(8) \quad \begin{cases} x = 2a \frac{X}{Z + 2a}, \\ y = -2a \frac{Y}{Z - 2a}, \\ z = a \left[\left(\frac{Y}{Z - 2a} \right)^2 - \left(\frac{X}{Z + 2a} \right)^2 \right]. \end{cases}$$

Les systèmes (7) et (9) combinés définissent donc la transformation birationnelle dont nous avons affirmé l'existence dans notre cinquième proposition.

Pour x et y constants nous avons sur le paraboloïde des sections paraboliques d'axes parallèles à celui des z . D'autre part, les quantités x et y peuvent être considérées comme les paramètres des lignes de courbure de la cyclide comme le montrent les relations

$$x = -a\rho, \quad y = a\rho_1.$$

Or, les lignes de courbure de la cyclide sont des cercles. Nous voyons par là que les systèmes (7) et (8) font correspondre point par point deux familles de paraboles tracées sur le paraboloïde aux cercles de la cyclide. Nos propositions sont donc complètement démontrées.

Le système (6) nous permet de suivre la marche des rayons réfléchis. Nous savons qu'ils rencontrent deux paraboles. On déduit aisément les équations de ces paraboles de l'équation (3) qui définit la cyclide. Elles sont respectivement déterminées par les deux systèmes

$$(9) \quad \begin{cases} X^2 + 8aZ - 8a^2 = 0, \\ Y = 0, \end{cases}$$

$$(9)' \quad \begin{cases} Y^2 - 8aZ - 8a^2 = 0, \\ X = 0. \end{cases}$$

Ceci posé, remarquons que le paraboloïde et la cyclide se coupent suivant deux droites rectangulaires, situées dans le plan des xy et définies par le système

$$y^2 - x^2 = 0, \quad z = 0.$$

Considérons la région de la surface pour laquelle on a

$$x^2 - y^2 > 0.$$

Alors les rayons réfléchis partiront de la surface directrice avec la valeur initiale $\lambda = 0$, et croissant avec ce paramètre rencontreront la cyclide lorsque l'on aura

$$\lambda = \frac{y^2 - x^2}{4a} = s;$$

λ continuant à croître ils viendront rencontrer la parabole définie par le système (9), et l'on aura

$$\lambda = \frac{x^2 + y^2 + 4a^2}{4a}.$$

Si, au contraire, partant de $\lambda = 0$, nous faisons décroître ce paramètre, nous verrons que les rayons réfléchis rencontreront la seconde parabole définie par le système (9)' pour une valeur de λ égale et de signe contraire à celle qui correspond à la première parabole.

Les points pour lesquels on a $x^2 < y^2$ donneraient lieu à une discussion analogue. Ici seulement le point de rencontre du rayon lumineux avec la cyclide se trouvera placé entre le paraboloïde et la seconde parabole. On trouverait les mêmes valeurs de λ que précédemment mais changées de signe.

En terminant ce paragraphe nous allons établir quelques autres transformations birationnelles qui ont un lien étroit avec les précédentes. Nous allons indiquer brièvement la marche des calculs à effectuer. Les systèmes (7) et (8) nous donneront une transformation birationnelle entre le paraboloïde hyperbolique équilatère et la cyclide de Dupin. Si dans le système (5) nous changeons c, c', c'' en $\frac{x_1}{R}, \frac{-y_1}{R}, \frac{z_1}{R}$, x_1, y_1, z_1 représentent les coordonnées du paraboloïde. Nous pouvons alors exprimer x, y, z rationnellement en x_1, y_1, z_1 , et nous avons une transformation birationnelle entre le paraboloïde et la sphère. Rapprochant alors les deux

transformations et éliminant x, y, z , nous obtenons une transformation birationnelle entre la cyclide de Dupin et la sphère. Une propriété intéressante rapproche d'ailleurs ces deux surfaces. Les congruences de leurs normales se réfléchissent parallèlement aux axes de deux paraboloïdes : du paraboloïde hyperbolique équilatère pour la cyclide, du paraboloïde de révolution pour la sphère. Nous sommes donc invités à chercher une transformation birationnelle qui relie la sphère au paraboloïde de révolution dont le foyer occupe le centre de cette sphère. Il ne nous restera plus qu'à établir la transformation birationnelle qui relie les deux paraboloïdes et ainsi nous aurons obtenu un cycle fermé de ces transformations.

Nous allons en dresser le Tableau, et, pour procéder avec ordre, nous désignerons par $x, y, z; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3$ les systèmes de coordonnées respectives du paraboloïde hyperbolique équilatère, de la cyclide, de la sphère, du paraboloïde de révolution.

Enfin nous aurons recours à la notation $(0, 1) (1, 2)$, etc. pour désigner les transformations relatives aux surfaces de coordonnées $(x, y, z), (x_1, y_1, z_1)$, etc.

Nous avons donc

$$\begin{aligned} x &= 2a \frac{x_1}{z_1 + 2a}, & x_1 &= 2x \frac{y^2 + 2a^2}{x^2 + y^2 + 4a^2}, \\ y &= -2a \frac{y_1}{z_1 - 2a}, & y_1 &= 2y \frac{x^2 + 2a^2}{x^2 + y^2 + 4a^2}, \\ z &= a \left[\left(\frac{y_1}{z_1 - 2a} \right)^2 - \left(\frac{x_1}{z_1 + 2a} \right)^2 \right], & z_1 &= 2a \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2 + 4a^2}, \\ x_2 &= 2Rx_1 \frac{2a - z_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 4a^2}, & x_1 &= \frac{a}{R} \frac{2y_1^2 + (R - z_1)^2}{(z_1 - R)^2} x_2, \\ y_2 &= 2Ry_1 \frac{2a + z_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 4a^2}, & y_1 &= \frac{a}{R} \frac{2x_1^2 + (R - z_1)^2}{(z_1 - R)^2} y_2, \\ z_2 &= R \frac{x_1^2 + y_1^2 + 3z_1^2 - 4a^2}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 4a^2}, & z_1 &= \frac{a}{R} \frac{y_1^2 - x_1^2}{R - z_1}, \\ x_2 &= -\frac{Rx_3}{z_3 + 2c}, & x_3 &= \frac{2cx_2}{z_2 - R}, \\ y_2 &= -\frac{Ry_3}{z_3 + 2c}, & y_3 &= \frac{2cy_2}{z_2 - R}, \\ z_2 &= \frac{Rz_3}{z_3 + 2c}, & z_3 &= -\frac{2cz_2}{z_2 - R}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}x_3 &= \frac{c}{a} x, & x &= \frac{a}{c} x_3, \\y_3 &= \frac{c}{a} y, & y &= \frac{a}{c} y_3, \\z_3 &= \frac{c}{4a^2} (x^2 + y^2 - 4a^2), & z &= \frac{a}{4c^2} (y_3^2 - x_3^2).\end{aligned}$$

Les quatre surfaces considérées sont ici définies par le système

$$(10) \quad \begin{cases} y^2 - x^2 - 4az = 0, & z_1(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - 4a^2) + 2a(y_1^2 - x_1^2) = 0, \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - R^2 = 0, & x_3^2 + y_3^2 - 4c(z_3 + c) = 0, \end{cases}$$

c désigne ici une constante.

Ces quatre systèmes forment le cycle complet. Nous pouvons toutefois y joindre les deux systèmes (0, 2), (1, 3) qui relient le paraboloid hyperbolique équilatère à la sphère et le paraboloid de résolution à la cyclide.

Nous trouvons

$$\begin{aligned}x_2 &= -\frac{4ax}{x^2 + y^2 + 4a^2} R, & x &= 2a \frac{x_2}{z_2 - R}, \\y_2 &= -\frac{4ay}{x^2 + y^2 + 4a^2} R, & y &= 2a \frac{y_2}{z_2 - R}, \\z_2 &= \frac{x^2 + y^2 - 4a^2}{x^2 + y^2 + 4a^2} R, & z &= a \frac{y_2^2 - x_2^2}{(z_2 - R)^2}, \\x_3 &= 2c \frac{x_1}{z_1 + 2a}, & x_1 &= \frac{a}{2c^2} \frac{y_1^2 + 2c^2}{z_1 + 2c} x_3, \\y_3 &= -2c \frac{y_1}{z_1 - 2a}, & y_1 &= \frac{a}{2c^2} \frac{x_1^2 + 2c^2}{z_1 + 2c} y_3, \\z_3 &= c \left(\frac{x_1^2}{(z_1 + 2a)^2} + \frac{y_1^2}{(z_1 - 2a)^2} - 1 \right), & z_1 &= \frac{a}{2c} \frac{y_3^2 - x_3^2}{z_3 + 2c}.\end{aligned}$$

L'interprétation géométrique de ces systèmes offre un intérêt particulier quand on introduit l'hypothèse

$$a = c = -\frac{R}{2}.$$

Alors les projections sur le plan des xy des points associés sur les deux paraboloïdes se confondent. Le système (0, 3) donne en effet

$$x_3 = x, \quad y_3 = y.$$

De ce fait nous pouvons déduire la proposition suivante :

Soient donnés un parabolôide de révolution et un parabolôide hyperbolique équilatère de même axe définis par les équations du système (10) où l'on suppose $2a = 2c = -R$; tout rayon incident parallèle à l'axe des z se réfléchira sur chacune de ces deux surfaces suivant des directions respectivement normales à la sphère et à la cyclide du même système (10) et rencontrant ces deux surfaces en des points liés par la transformation birationnelle (1, 2).

Dans la même hypothèse les deux groupes de formules du système (2, 3) deviennent identiques.

Ainsi donc le système (2, 3) définit une transformation réciproque entre les points du parabolôide de révolution et l'une des sphères normales aux rayons réfléchis sur cette surface, la direction des rayons incidents étant supposée parallèle à l'axe.

Si dans le système (2, 3) nous faisons toujours $2c = -R$ le point du plan des xy de coordonnées x_2, y_2 sera à la fois projection orthogonale sur ce plan d'un point du parabolôide de révolution, et projection centrale sur le même plan de point correspondant de la sphère, le pôle de projection étant situé en un des points où l'axe des z rencontre la sphère.

Cette transformation d'un point de la sphère en sa projection centrale que nous venons de définir est celle (à un coefficient près d'homothétie) par laquelle on passe de la surface plane à la surface sphérique de Riemann.

Nous n'avons déterminé qu'une seule anticaustique du parabolôide, alors que leur ensemble constitue une famille. Mais rien n'est plus aisé que de déduire cette famille de l'équation de la cyclide. Écrivons

$$\xi = a(u^2 + u_1^2) + \rho_2(1 + uu_1),$$

ρ_2 désignant un paramètre arbitraire. Pour $\rho_2 = 0$ nous avons l'équation de la cyclide, et à chaque valeur de ρ_2 correspond une surface parallèle à celle-ci, par conséquent une anticaustique du parabolôide.

On sait que le paramètre ρ_2 associé aux paramètres ρ, ρ_1 des lignes de courbure permet de définir un système cyclique dont fait partie la cyclide de Dupin.

Nous n'insisterons pas sur ces résultats et nous avons hâte d'en venir à l'étude des anticaustiques relatives à certaines courbes tracées sur le paraboloid.

II.

Coupons le paraboloid par un plan parallèle à l'axe des z . Soit θ l'angle de ce plan avec celui des xz . Si l'on effectue un changement de plans de projection, tel que le plan de section devienne celui des $y'z', x', z'$, les nouvelles coordonnées peuvent être définies par le système

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \theta + y \sin \theta + x'_0, \\y' &= y \cos \theta - x \sin \theta + y'_0, \\z' &= z.\end{aligned}$$

x'_0, y'_0 , coordonnées de l'ancienne origine par rapport à la nouvelle, peuvent être choisies sur le plan de section de telle sorte qu'on ait

$$\begin{aligned}x'_0 &= \lambda \cos 2\theta, \\y'_0 &= -\lambda \sin 2\theta,\end{aligned}$$

λ désignant la distance de l'ancienne origine à la nouvelle.

L'équation du paraboloid hyperbolique devient alors

$$\cos 2\theta (y'^2 - x'^2) + 2 \sin 2\theta x'y' + 2\lambda x' - \cos 2\theta \lambda^2 - 4\alpha z' = 0$$

et la parabole de section sera définie par le système

$$\begin{aligned}x' &= 0, \\ \cos 2\theta y'^2 - 4\alpha z' - \cos 2\theta \lambda^2 &= 0.\end{aligned}$$

En tenant compte des relations

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta + x'_0 = 0, \quad x'_0 = \lambda \cos 2\theta, \quad y' = -\lambda \sin 2\theta$$

il vient

$$\begin{aligned}x &= -y' \sin \theta - \lambda \cos \theta, \\y &= y' \cos \theta + \lambda \sin \theta.\end{aligned}$$

Il suffit de porter ces valeurs dans le second groupe du système (0,1), qui définit les coordonnées de la cyclide de Dupin, pour obtenir l'anticaustique de la section.

On trouvera en particulier

$$\frac{X}{\lambda \sin 2\theta Y + 2a \sin \theta Z} + \frac{Y}{\lambda \sin 2\theta x - 2a \cos \theta Z} + \frac{Z}{\sin \theta X + \cos \theta Y} = 0.$$

Nous voyons par cette équation que *les paraboles déterminées sur le parabolôide par des plans parallèles à l'axe des z admettent pour anticaustique l'intersection de deux cubiques dont l'une est la cyclide de Dupin.*

Les cosinus directeurs des rayons réfléchis vérifient la relation

$$2a(c \cos \theta - c' \sin \theta) + \lambda(c'' - 1) \cos 2\theta = 0.$$

Cette équation montre que les rayons réfléchis sur la parabole de section font un angle constant avec une direction fixe.

Cet angle a pour valeur

$$\cos V = \frac{\lambda \cos 2\theta}{\sqrt{\lambda^2 \cos^2 2\theta + 4a^2}}.$$

Quand le plan de section passe par l'axe des z, on a $\lambda = 0$. x et y sont alors définis par les expressions

$$\begin{aligned} x &= -y' \sin \theta, \\ y &= y' \cos \theta \end{aligned}$$

et les coordonnées de l'anticaustique ont pour expressions

$$\begin{aligned} X &= -2y' \cos \theta \frac{y'^2 \cos^2 \theta + 2a^2}{y'^2 + 4a^2}, \\ Y &= 2y' \sin \theta \frac{y'^2 \sin^2 \theta + 2a^2}{y'^2 + 4a^2}, \\ Z &= 2a \frac{y'^2 \cos 2\theta}{y'^2 + 4a^2}. \end{aligned}$$

L'élimination de y' donne entre autres équations

$$\begin{aligned} X^2 - Y^2 + 2 \cot 2\theta XY + 4aZ &= 0, \\ (X^2 + Y^2 + 2Z^2) \sin 2\theta + 2XY &= 0, \\ Z &= 2a \frac{X \cos \theta + Y \sin \theta}{X \cos \theta - Y \sin \theta}. \end{aligned}$$

Nous voyons donc que *les intersections du parabolôïde hyperbolique équilatère avec un plan passant par l'axe des z admettent, pour anticaustiques, des courbes suivant lesquelles trois surfaces du deuxième degré coupent la cyclide de Dupin.*

Les cosinus directeurs des rayons réfléchis vérifient ici la relation

$$c \cos \theta - c' \sin \theta = 0$$

qui montre que ces rayons sont tous parallèles à un plan passant par l'axe des z .

Si l'on rapproche cette relation de l'équation

$$x \cos \theta + y \sin \theta = 0$$

qui définit la direction du plan de section, on trouve pour valeur de l'angle des deux plans

$$\cos \gamma = \cos 2\theta.$$

D'où nous pouvons tirer cette conclusion : *Soient données sur le parabolôïde hyperbolique équilatère défini par l'équation (1) deux plans symétriques par rapport au plan des xz , les rayons parallèles à l'axe des z se réfléchiront sur chacune des paraboles de section suivant des directions parallèles au plan de l'autre parabole.*

Pour $\theta = 0$ les deux plans se confondent et dès lors les rayons réfléchis doivent se trouver dans le plan de section. L'intersection de ce plan avec la cyclide étant l'anticaustique de la parabole doit se réduire à un cercle. On vérifie sans peine qu'il en est bien ainsi. En effet l'équation (2) de la cyclide peut se mettre sous la même forme

$$(Z - 2a)(X^2 + Z^2 - 2aZ) + (Z^2 + 2a)Y^2 = 0.$$

Or, pour la section du parabolôïde déterminée par la valeur $\theta = 0$, on a $Y = 0$ et l'équation de la cyclide se décompose en deux équations dont l'une définit bien un cercle.

Les sections les plus intéressantes du parabolôïde sont celles qu'on obtient en faisant successivement x et y constants. Nous avons vu que ces quantités sont les paramètres des lignes de courbure de la cyclide. Les anticaustiques des paraboles de section seront donc les cercles qui constituent les lignes de courbure de

cette surface. Nous pouvons résumer les propriétés du système de rayons réfléchis dans la proposition suivante :

Soit donné le parabolôide hyperbolique équilatère défini par l'équation (1); les parallèles à l'axe des z se réfléchiront sur les paraboles de la surface situées dans des plans parallèles aux plans coordonnés suivant les génératrices d'un cône de révolution. Ces cônes ont leur sommet sur l'une des paraboles auxquelles se réduisent les deux nappes de la développée de la cyclide de Dupin normale aux rayons réfléchis. Ils enveloppent la seconde de ces paraboles, la parabole de section et admettent pour sections droites leurs intersections avec la cyclide et toutes les surfaces parallèles à celles-ci.

En égalant z à une constante dans l'équation du parabolôide, on obtient une série de sections parallèles qui admettent pour anticaustique les intersections de la cyclide avec la surface du second degré définie par l'équation

$$a(Y^2 - X^2) - zZ^2 - 4a^2(Z - z) = 0.$$

On trouve pour équation de la représentation sphérique

$$a(c^2 - c'^2) + 2(1 - c'')^2 = 0.$$

Nous pouvons en terminant considérer les courbes d'intersection du parabolôide par un cylindre de révolution ayant pour axe celui des z .

On a ici

$$x^2 + y^2 = k^2 = \text{const.}$$

et l'on trouve

$$c'' = \frac{k^2 - 4a^2}{k^2 + 4a^2}.$$

Cette relation nous montre que les rayons réfléchis font un angle constant avec l'axe des z . Pour $k = 2a$, ces rayons deviennent perpendiculaires à cet axe.

L'anticaustique se trouve ici sur la surface de révolution du second degré :

$$4a^2(X^2 + Y^2 - k^2) + (k^2 + 8a^2)Z^2 = 0.$$

**SUR L'EXTENSION A L'ESPACE DU THÉOREME DES POLYGONES
DE PONCELET PAR DES POLYÈDRES DE GENRE un ;**

Par M. G. FONTENÉ.

I.

1. Dans un Mémoire inséré au *Bulletin* (t. XXXII, 1904, p. 284), j'ai d'abord montré que l'extension du théorème des polygones de Poncelet à l'espace a des chances de réussir en employant des polyèdres homogènes de genre un , dont les faces sont des quadrilatères et dont les angles solides sont des angles tétraèdres; j'ai donné à ces polyèdres le nom de *polyèdres réticulés*, qui rappelle la disposition des sommets en q séries de p sommets d'une part, en p séries de q sommets d'autre part, et la disposition analogue des faces.

Un tel polyèdre, avec des sommets en nombre pq , des faces en nombre pq , dépend régulièrement de $2pq$ paramètres. S'il doit être circonscrit à une quadrique donnée S , et inscrit à une quadrique donnée S' , ce qui forme en général $2pq$ conditions, il semble que l'on a affaire à un problème déterminé; mais peut-être ce problème est-il en réalité généralement impossible, et ne devient-il possible qu'en devenant indéterminé.

Avec $p=3$, $q=3$, le polyèdre dépend exceptionnellement de $18+1$ paramètres. J'ai montré que la recherche d'un polyèdre de cette nature circonscrit à une quadrique S et inscrit à une quadrique S' , recherche qui est un problème *simplement* indéterminé en apparence, est en réalité un problème généralement impossible, et qui ne devient possible qu'en devenant *doublement* indéterminé. La condition de fermeture est

$$\sqrt{\lambda_1} \pm \sqrt{\lambda_2} \pm \sqrt{\lambda_3} \pm \sqrt{\lambda_4} = 0,$$

les λ étant les racines du discriminant de la forme $\lambda S + S'$.

Je considère ici un nouveau cas pour lequel j'ai pu établir en toute rigueur la condition de fermeture

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_3 + \lambda_4$$

que j'avais indiquée comme probable (*Bulletin*, t. XXXIII, p. 115).

2. Si l'on suppose que, dans un polyèdre réticulé correspondant aux valeurs $p = 4$, $p = 4$, les sommets opposés se confondent deux à deux, on obtient un polyèdre Π , présentant 8 faces quadrangulaires, 8 angles solides tétraèdres (*Bulletin*, t. XXXIII, p. 116), ce polyèdre dépend encore exceptionnellement de $16 + 1$ paramètres. Les sommets d'un polyèdre Π formant en outre un système de points de Lamé, en même temps que les plans de ses faces forment un système de plans de Lamé, le problème de construire un tel polyèdre, circonscrit à une quadrique S et inscrit à une quadrique S' , est un problème *triplement* indéterminé en apparence; je ferai voir que ce problème est en réalité un problème généralement impossible, et qui ne devient possible qu'en devenant *quadruplement* indéterminé; la condition de fermeture est écrite ci-dessus.

3. J'ai montré (*Bulletin*, t. XXXIV, p. 7) (1) que les 8 points et les 8 plans d'un *octuple gauche complet* sont, de trois manières différentes, les sommets et les plans des faces d'un polyèdre Π ; et le problème qui se pose pour un tel polyèdre est identique à celui-ci : lorsque deux quadriques S et S' admettent un octuple gauche complet circonscrit à l'une et inscrit à l'autre, satisfont-elles à la condition invariante écrite ci-dessus, de manière à admettre, non une triple, mais une quadruple infinité de semblables octuples?

4. Avant d'aborder cette question, nous devons en étudier une autre.

L'octuple gauche complet peut être regardé, de quatre manières différentes, comme un ensemble de deux tétraèdres dont chacun est inscrit à l'autre; cette configuration s'était offerte sous ce point de vue à M. Humbert (*Bulletin*, t. XXXII, p. 142). Ce géomètre, comme conséquence d'un théorème que j'avais déjà fait connaître, et qu'il a obtenu de son côté, a démontré (en considérant des tétraèdres) un théorème que l'on peut énoncer ainsi :

Lorsque les 8 points communs à une quadrique réglée S et

(1) Le polyèdre Π est représenté en cet endroit sous son aspect le plus frappant; la figure est empruntée à une Note de M. Bricard, qui a signalé le premier l'existence de ce polyèdre.

à un biquadratique Ω sont les sommets de deux quadrilatères de génératrices appartenant à S , il existe une double infinité d'octuples gauches complets circonscrits à la quadrique et inscrits à la biquadratique; réciproquement, ...

L'existence d'un seul octupple gauche circonscrit à la quadrique et inscrit à la biquadratique entraîne-t-elle que les 8 points communs soient les sommets de deux quadrilatères de génératrices appartenant à la quadrique, etc.? Un décompte de paramètres en rend l'affirmation vraisemblable (*Bulletin*, t. XXXIV, p. 13); mais ce mode de raisonnement, souvent légitime, est insuffisant en l'espèce. Un Mémoire récent de M. Bricard (*Bulletin*, t. XXXIV, p. 17) donne le moyen de faire la démonstration.

5. L'octupple gauche complet peut être regardé, de quatre manières différentes, comme un hexaèdre dont les plans des faces sont 6 des 8 plans du système, et dont les sommets sont les 8 points du système, les deux tétraèdres bien connus que l'on peut ordinairement inscrire à un hexaèdre se réduisant à des quadrangles plans. Corrélativement, on peut le regarder, de quatre manières différentes, comme un octaèdre dont les sommets sont 6 des 8 points (a, a') , (b, b') , (c, c') , (d, d') du système, et dont les plans des faces sont les 8 plans du système, avec cette particularité : les faces de l'octaèdre étant réparties en deux groupes de quatre faces, tels que deux faces quelconques d'un même groupe aient en commun un sommet et un seul, les quatre faces d'un même groupe ont un point commun. C'est à ce dernier point de vue que M. Bricard envisage l'octupple gauche.

Étant donnée une biquadratique Ω , on peut lui inscrire ∞^3 octuples gauches, dont les couples de sommets (a, a') , (b, b') , (c, c') , (d, d') appartiennent à l'une des trois involutions bien connues qui transforment la courbe en elle-même : on peut se donner à volonté l'un des 8 plans de l'octupple, soit le plan $abcd$. Les 8 plans d'un octupple formant un système de Lamé, il existe ∞^2 quadriques inscrites à chacun de ces octuples : il semble donc qu'il existe ∞^5 quadriques, inscrites aux octuples que l'on peut inscrire à une biquadratique; si l'on démontre que ces quadriques sont réellement en nombre ∞^3 , il en résultera que chacune d'elles est inscrite à ∞^2 des octuples considérés, et toute quadrique admettant un octupple

qui lui est circonscrit, en même temps qu'il est inscrit à la biquadratique, admettra ∞^2 semblables octuples : le fait préalable que nous avons en vue sera établi.

Or, M. Bricard a donné d'une involution I, telle que celles dont on vient de parler, une expression algébrique qui se prête mieux au traitement de certaines questions que l'expression par les fonctions elliptiques : Si

$$l = 0, l' = 0, \dots, \dots, p = 0, p' = 0$$

sont les équations tangentielles de quatre couples de points faisant partie de l'involution, l'équation

$$(\Sigma) \quad \lambda ll' + \mu mm' + \nu nn' + \pi pp' = 0,$$

bien qu'elle renferme seulement trois paramètres, se trouve (en raison de la dépendance des 8 points) pouvoir représenter une infinité de quadriques réduites à deux points, et ces couples de points sont les couples involutifs que l'on a en vue. Considérons alors un octuple gauche inscrit à la biquadratique Ω , les couples de sommets étant $(a, a'), (b, b'), (c, c'), (d, d')$. Prenons sur Ω des couples involutifs $AA' = 0, CC' = 0$; parmi les quadriques du faisceau tangentiel

$$AA' + \rho CC' = 0,$$

il y en a une qui touche le plan $abcd$, et elle est inscrite à l'octuple considéré (Mémoire de M. Bricard, p. 23); en faisant varier indépendamment les deux couples AA' et CC' , on aura toutes les quadriques inscrites à cet octuple (*ibid.*, p. 26 et 27). Si maintenant on fait varier l'octuple que l'on considère, on aura des quadriques en nombre ∞^3 , puisqu'on les a toutes en faisant varier le couple AA' , le couple CC' , et le multiplicateur ρ . Le fait annoncé plus haut est donc établi. On remarquera que les quadriques dont il s'agit ici, en nombre infini ∞^3 , sont les quadriques représentées par l'équation (Σ) , où λ, μ, ν, π varient arbitrairement.

Le fait que toute quadrique Σ admettant un octuple qui lui est circonscrit, en même temps qu'il est inscrit à la biquadratique, admet nécessairement ∞^2 semblables octuples, vient d'être démontré sans faire intervenir explicitement le théorème de M. Humbert. Mais il faut observer que, l'équation de la quadrique Σ pouvant

être mise sous la forme $AA' + \rho CC' = 0$, cette quadrique contient le quadrilatère $AA'CC'$ dont les sommets sont des points de la biquadratique; si d'ailleurs BB' et DD' sont les deux couples de points qui forment avec les couples AA' et CC' les sommets d'un octuple gauche inscrit à la biquadratique, on a une identité de la forme

$$AA' + \rho CC' = k(BB' + \sigma DD'),$$

puisque la quadrique formée des deux points D et D' est inscrite à l'octaèdre qui a pour sommets les points A, A', B, B', C, C' ; l'équation de la quadrique Σ peut donc aussi se mettre sous la forme $BB' + \sigma DD' = 0$, de sorte que cette quadrique contient également le quadrilatère $BDB'D'$.

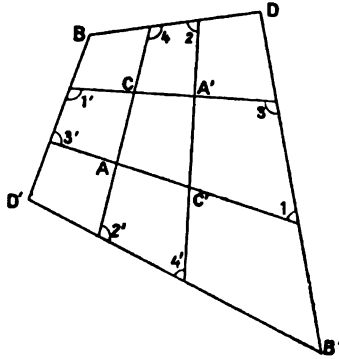
6. La question préalable posée au n° 4 étant ainsi résolue par l'affirmative, arrivons à la question posée au n° 3, et qui est celle que nous avons réellement en vue. Soit un octuple gauche circonscrit à une quadrique S et inscrit à une quadrique S' . Par les sommets aa', bb', cc', dd' de cet octuple, on peut faire passer une infinité de biquadratiques Ω tracées sur S' : considérons l'une de ces biquadratiques. D'après ce qui précède, les 8 points communs à la biquadratique Ω et à la quadrique S sont les sommets de deux quadrilatères de génératrices $ABA'B'$ et $CDC'D'$ appartenant à S , de sorte qu'il existe deux contours quadrangulaires situés sur S et inscrits à S' , ou encore deux contours quadrangulaires situés sur S et inscrits à la biquadratique C' qui est la trace de la quadrique S' sur la quadrique S . Mais on sait qu'un tel contour ne peut exister sans qu'il en existe une infinité, et j'ai montré (*Nouvelles Annales*, 1905, p. 119) que la condition de fermeture est celle-ci: les racines du discriminant de la forme $\lambda S + S'$ doivent satisfaire à la condition

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_3 + \lambda_4.$$

Ainsi, par le fait qu'un octuple gauche est circonscrit à une quadrique S et inscrit à une quadrique S' , ces deux quadriques ne sont pas quelconques; elles vérifient la condition précédente, et il existe une infinité de contours quadrangulaires situés sur S et inscrits à S' (ou à la biquadratique commune C'). Soient $ACA'C'$ et $BDB'D'$ deux de ces contours (*fig. 1*); les 8 points (A, A'),

$(B, B'), \dots$, qui sont d'ailleurs les sommets d'un octuplé gauche complet, étant communs aux quadriques $(1, 1'), (2, 2'), (3, 3'), (4, 4')$ dont chacune est un système de deux plans, sont 8 points de Lamé, et l'on peut faire passer par ces points une infinité de biquadratiques Ω tracées sur S' ; dans chacune de ces biquadra-

Fig. 1.



tiques Ω on peut inscrire, d'après le théorème de M. Humbert, une double infinité d'octuplés gauches complets circonscrits à S .

Il semble que l'on aurait ainsi ∞^3 octuplés gauches complets inscrits à S' et circonscrits à S . Mais il n'en peut être ainsi, car il existerait par cela même ∞^3 tétraèdres inscrits à S' et circonscrits à S , et, en vertu d'un théorème auquel il est fait allusion plus haut, les deux quadriques devraient avoir en commun un quadrilatère de génératrices, ce que l'on ne suppose pas (on devrait avoir pour cela $\lambda_1 = \lambda_3, \lambda_2 = \lambda_4$). Il arrive que chacun des octuplés gauches obtenus se présente ∞^1 fois; on les obtient tous, une fois chacun, en laissant fixe le quadrilatère $ACA'C'$, et en faisant varier seulement le quadrilatère $BDB'D'$; et l'on se rend compte de ce fait en se rappelant que les sommets $(a, a'), (b, b'), \dots$, d'un octuplé gauche sont 8 points de Lamé, de sorte que l'on peut faire passer par ces points, et par le point A donné à l'avance, une biquadratique Ω tracée sur S' : il se trouve que cette biquadratique passe par les quatre sommets du quadrilatère $ACA'C'$, et qu'elle rencontre encore la biquadratique C' en quatre points $BDB'D'$ qui sont les sommets d'un quadrilatère de génératrices tracé sur S . Le fait annoncé au début est donc établi: l'existence d'un octuplé

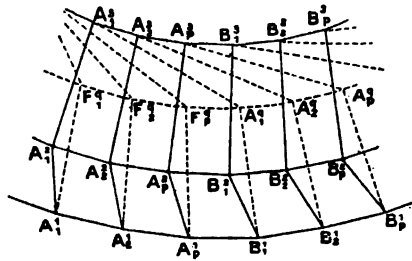
gauche complet circonscrit à une quadrique S et inscrit à une quadrique S' suppose la condition de fermeture qui a été indiquée, et entraîne l'existence d'une *quadruple* infinité de semblables octuples.

II.

7. Le résultat précédent apportant une confirmation nouvelle aux vues que j'ai exposées précédemment, il n'est pas sans intérêt de compléter sur quelques points l'étude des polyèdres tétra-gonaux. Je montrerai d'abord qu'un tel polyèdre peut être constitué d'une manière plus générale que celle que j'ai indiquée tout d'abord : aux deux caractéristiques p et q vient s'en adjoindre une troisième r .

La figure ci-dessous représente une partie d'un polyèdre tétra-

Fig. 2.



gonal affectant la forme générale d'un tore. Les arêtes formant des suites ou contours de première espèce

$$A_1^1 A_2^1 \dots A_p^1, B_1^1 B_2^1 \dots B_p^1, C_1^1 \dots, F_1^1,$$

l'indice supérieur étant constant, et des suites ou contours de seconde espèce

$$A_1^1 A_2^1 \dots A_q^1, B_1^1 B_2^1 \dots B_q^1, C_1^1 \dots, F_1^1,$$

l'indice inférieur étant constant; les deux contours considérés ont en commun les sommets

$$A_1^1, B_1^1, C_1^1, \dots, F_1^1,$$

dont le nombre sera désigné par p , et ce fait est général pour deux contours d'espèces différentes. Si p est le nombre des contours

de seconde espèce, et q celui des contours de première espèce, le nombre des sommets est pqr ; chacun des q contours de première espèce contient en effet $pr = P$ sommets, puisqu'il est rencontré en r points par chacun des p contours de seconde espèce; chacun des p contours de seconde espèce contient de même $qr = Q$ sommets.

Un polyèdre tétragonal d'indice r peut être déduit d'un polyèdre tétragonal d'indice 1. Soit en effet un polyèdre tétragonal d'indice 1, dont les contours de première espèce renferment P sommets, dont les contours de seconde espèce renferment Q sommets, et soit r un diviseur commun aux nombres P et Q , de sorte que l'on a $P = pr$, $Q = qr$; si l'on suppose que les contours de première espèce, dont le nombre est qr , se confondent de r en r , et que les contours de seconde espèce, dont le nombre est pr , se confondent également de r en r , on arrive à un polyèdre tétragonal d'indice r .

Pour former les contours précédents, on a fait suivre une arête MN , au point N par exemple, de l'arête NP qui lui est opposée dans l'angle tétraèdre N du polyèdre; les contours d'arêtes ainsi obtenus ont pour sommets les sommets du polyèdre, et peuvent être appelés *contours ponctuels d'arêtes*. Corrélativement, on peut former d'autres contours en faisant suivre une arête $(m; n)$, dans le plan n par exemple, de l'arête (n, p) qui lui est opposée dans la face quadrangulaire du polyèdre situé dans le plan n ; les contours d'arêtes ainsi obtenus ont pour plans de leurs angles les plans des faces du polyèdre, et peuvent être appelés *contours tangentiels d'arêtes*.

Aux valeurs $p = 2$, $q = 2$, $r = 2$ correspond le polyèdre tétragonal à 8 sommets et à 8 faces dont il a été question au paragraphe I; si l'on se reporte aux figures données précédemment (*Bulletin*, t. XXXIII, p. 116 et 117), les deux contours ponctuels de première espèce sont $abcd$, $a'b'c'd'$ et les deux contours ponctuels de seconde espèce sont $ac'ca'$ et $bd'db'$. La première des deux figures en question permet de concevoir un polyèdre tétragonal d'indice 2, avec p et q quelconques.

Si l'on fait $p = 3$, $q = 1$, $r = 3$, on obtient un polyèdre tétragonal à 9 sommets et à 9 faces. Soit $AA'A''BB'B''CC'C''$ le contour ponctuel d'arêtes de première espèce; les trois contours de

seconde espèce sont $ABC, A'B'C, A''B''C''$. Chacune des arêtes, $AB, A'B', A''B'', BC, B'C', \dots$ rencontre la suivante, et ces arêtes forment le contour tangentiel de première espèce, contour dont nous désignerons les sommets par la notation $1, 2, 3, \dots, 9$; en ce qui concerne les contours tangentiels de seconde espèce, les arêtes AA', BB', CC' , par exemple, sont deux à deux coplanaires, et sont ainsi les arêtes d'un trièdre (il en est de même pour les arêtes $A'A'', B'B'', C'C''$, et pour les arêtes $A''B, B''C, C''A$). On peut dire que les 18 arêtes du polyèdre sont les 9 côtés du contour ponctuel $AA'A'', \dots$, et les 9 côtés du contour tangentiel formé par les droites successives $AB, A'B', A''B'', BC, \dots$; les plans des angles de ce dernier contour sont les plans des faces du polyèdre.

Pour construire un tel polyèdre, nous emploierons les trois contours ponctuels de seconde espèce $ABC, A'B'C', A''B''C''$. Les plans de ces triangles forment un trièdre Sx, Sy, Sz ; donnons-nous ce trièdre, et traçons sur sa surface le contour $1, 2, 3, 4, \dots, 9$, les sommets étant successivement sur les arêtes $Sz, Sx, Sy, Sz, \dots$; nous obtenons dans les trois faces ySz, zSx, xSy les trois triangles $ABC, A'B'C', A''B''C''$: les droites $g_1, 12, 23, 34, 45, 56$ devant contenir les arêtes $AB, A'B', A''B'', BC, B'C', B''C''$, on marque B, B', B'' aux intersections des droites g_1 et $34, 12$ et $45, 23$ et 56 , et le reste va de soi. Les 9 dernières arêtes du polyèdre sont les arêtes

$$(AA', BB', CC'), (A'A'' B'B'', C'C''), (A''B, B''C, C''A),$$

concourantes trois à trois.

8. De combien de paramètres dépend un polyèdre tétragonal? Le nombre commun des sommets et des faces étant S , les sommets sont astreints à S conditions par le fait que les faces sont quadrangulaires, et le nombre des paramètres est $2S$, sauf réduction possible du nombre des conditions. Une telle réduction ayant lieu, comme on l'a vu, pour $p=3, q=3, r=1$, et aussi pour $p=2, q=2, r=2$, on est amené à se demander si le fait n'est pas général; on va voir qu'il n'a pas lieu pour $r=1, p=3, q \neq 3$.

Soit $r=1$. On peut se donner, avec les notations de mon premier Mémoire, les p plans $A^1B^1A^2B^2, B^1C^1B^2C^2, \dots$, et les p points $A^2, B^2, C^2, \dots$, sur les droites $A^1A^2, B^1B^2, C^1C^2, \dots$;

puis les p plans $A^2B^2A^3B^3$, $B^2C^2B^3C^3$, ..., et les p points A^3 , B^3 , C^3 , ..., sur les droites A^2A^3 , B^2B^3 , C^2C^3 , ...; et ainsi de suite jusqu'aux points A^q , B^q , C^q , ...; le nombre des paramètres est ainsi

$$4p + 2p(q - 2) = 2pq.$$

Si l'on se donne alors le point A^1 quelconque, ce qui détermine de proche en proche les points B^1 , C^1 , D^1 , ..., la question est de savoir si l'on reviendra au point A^1 , comme il arrive pour $q = 2$, $q = 3$.

A supposer que les choses se passent régulièrement, si l'on se donne le point A^1 quelconque sur la droite A^2A^3 , on trouvera généralement en revenant sur cette arête un point A^1 distinct du point A^1 ; il y aura homographie entre A^1 et A^1 , et les deux points doubles de cette homographie seront les positions que l'on devra donner au point A^1 pour revenir à ce point. Prenons $p = 3$. Les deux positions du point A^1 sont, d'une part, le sommet S du trièdre formé par les plans $A^2B^2A^3B^3$, $B^2C^2B^3C^3$, $C^2A^2C^3A^3$, d'autre part, le point où la droite A^2A^3 rencontre le plan $A^2B^2C^2$; et les deux solutions ainsi obtenues doivent être écartées. C'est que, en effet, on ne peut pas se donner arbitrairement les plans $A^2B^2A^3B^3$, ... passant par les côtés du triangle $A^2B^2C^2$, et les points $A^2B^2C^2$ sur les droites qui doivent les contenir. Soient, par exemple, α , β , γ les points où les côtés du triangle $A^2B^2C^2$ rencontrent les plans des faces correspondantes du trièdre S ; la droite B^1C^1 devant passer en α , ..., le plan $A^1B^1C^1$ doit contenir les points α , β , γ , qui sont déjà dans le plan $A^2B^2C^2$; si donc on écarte pour le triangle $A^1B^1C^1$ les deux solutions indiquées ci-dessus, les points α , β , γ doivent être en ligne droite, ce qui réduit d'une unité le nombre des paramètres, et le plan $A^1B^1C^1$ est alors un plan quelconque passant par la droite α , β , γ , *ce qui ramène le nombre des paramètres à sa valeur normale*. Il y a toutefois exception pour le cas $p = 3$, $q = 3$; on se donne alors les plans $A^1A^2A^3$, ... et les points A^2 , B^2 , C^2 , les plans $A^2B^2A^3B^3$, ... et les points A^3 , B^3 , C^3 ; par la droite d'intersection des plans $A^2B^2C^2$ et $A^3B^3C^3$, qui est ici la droite $\alpha\beta\gamma$, on mène un plan quelconque qui donne les points A^1 , B^1 , C^1 ; on gagne donc un paramètre. (On aurait pu faire un raisonnement corrélatif, les points α , β , γ étant remplacés par des plans.)

En supposant toujours $p = 3$, au lieu de partir de trois plans $A^1B^1A^2B^2, \dots$, pour arriver à trois points A^q, B^q, C^q , on peut partir des points A^2, B^2, C^2 , et arriver aux points A^q, B^q, C^q , avec des paramètres en nombre $2pq - 3$. Si l'on se donne alors le plan du triangle $A^1B^1C^1$, ce triangle est déterminé, puisque la droite B^1C^1 par exemple doit rencontrer les deux droites B^2C^2 et B^qC^q ; il y a toujours exception pour le cas $p = 3, q = 3$, le plan $A^1B^1C^1$ devant alors passer par la droite d'intersection des plans $A^2B^2C^2, A^3B^3C^3$, et chacun des côtés du triangle $A^1B^1C^1$ dépendant ensuite d'un paramètre. (On peut faire un raisonnement corrélatif.)

NOTE SUR LA CHUTE DES CORPS PESANTS;

Par M. MAURICE-P. RUDZKI.

Il y a quelques mois, M. de Sparre ⁽¹⁾ a développé les équations du mouvement relatif à la surface de la Terre. En abandonnant l'hypothèse simplificative, ordinairement admise, que les surfaces de niveau peuvent être considérées comme des plans parallèles, M. de Sparre a été amené à introduire ⁽²⁾ dans les équations certaines petites composantes de l'attraction et de la force centrifuge, agissant dans les directions x et y , l'axe des z étant supposé vertical.

Aux développements de M. de Sparre je voudrais ajouter la remarque que, dans les conditions où il s'est placé, il convient d'introduire aussi les composantes des forces produisant le phénomène des marées. En effet, la valeur de la force totale ⁽³⁾ pro-

⁽¹⁾ Ce *Bulletin*, t. XXXIII, p. 65-72 et p. 146-150. Voir aussi l'article de M. Fouché, *ibid.*, p. 150-156.

⁽²⁾ Bien entendu, je ne veux pas dire que M. de Sparre a été le premier à envisager le problème sous ce point de vue.

⁽³⁾ Pour les expressions des trois composantes de la force (A), voir le petit livre de M. Hatt, *Des marées*, p. 17.

J'observe que la composante horizontale de la force produisant les marées, due à la Lune, ne peut pas surpasser $\frac{g}{11\,660\,000}$. Voir, par exemple, le livre de M. G.-H. Darwin, *The tides and kindred phenomena*, etc., p. 100.

duisant les marées, due à l'attraction de la Lune, est

$$(A) \quad \frac{g}{8500000},$$

où g désigne la pesanteur à la surface de la Terre.

Considérons maintenant les composantes de l'attraction terrestre dans les directions des axes x et y ; prenons, par exemple, (*loc. cit.*, p. 67) la composante

$$(B) \quad -G \frac{y}{R}.$$

G est l'attraction; on voit qu'elle diffère très peu de la pesanteur g ; R désigne le rayon moyen de la Terre. Si l'on pose $y = 1^m$, la force (B) aura la valeur $\frac{-g}{6370000}$ environ, c'est-à-dire que les forces (A) et (B) sont de même ordre.

Ainsi, quand il s'agit de la chute libre d'un corps pesant, des oscillations d'un pendule ou d'un autre problème, dans lequel les coordonnées x et y restent toujours très petites, on ne doit pas introduire les petites composantes de la pesanteur, dues à la courbure des surfaces de niveau, sans avoir en même temps égard aux forces produisant les marées (¹).

Il en est autrement en Balistique. Les forces du type (B) croissent avec la distance à l'orifice du canon; à quelques dizaines de mètres, elles deviennent beaucoup plus grandes que les forces du type (A). Ainsi peut-on négliger ces dernières (les forces produisant les marées).

Il va de soi que, dans de nombreux problèmes, d'autres agents tels que la résistance de l'air, le vent, etc. jouent un rôle plus important que les petites forces (A) et (B) considérées tout à l'heure.

(¹) On peut envisager cette question sous un autre aspect. On n'écrit pas les forces produisant les marées, mais on considère la direction de la verticale comme variable.

SUR CERTAINES TRANSCENDANTES ENTIÈRES;

Par M. MICHEL PETROVITCH.

1. Il y a un nombre illimité de séries

$$(1) \quad a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

dont le coefficient général a_n se laisse mettre sous la forme

$$(2) \quad a_n = \frac{1}{n!} \int_a^b u(t) [r(t)]^n dt,$$

où les limites a et b de l'intégrale sont réelles, les fonctions $u(t)$ et $r(t)$ réelles, limitées et d'un signe invariable lorsque t varie entre a et b .

Nous appellerons les fonctions, définies par de telles séries, *transcendantes* $\Delta(z)$.

Dans le cas le plus simple où $r(t)$ se réduit à une constante, la transcendante $\Delta(z)$ se réduit à une fonction exponentielle

$$\Delta(z) = A e^{\alpha z}.$$

Lorsque $r(t)$ est une véritable fonction de t , le développement (1) engendre une infinité de transcendantes variées. Ainsi, au cas où

$$r(t) = ht, \quad h = \text{const.}$$

correspond une fonction de la forme

$$\Delta(z) = A \frac{e^{\beta z} - e^{\alpha z}}{z},$$

A, α, β étant des constantes réelles; au coefficient

$$a_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 \left(t \log \frac{1}{t} \right)^n dt$$

correspond la transcendante

$$\Delta(z) = \sum_0^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)^{n+1}};$$

au coefficient

$$a_n = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} \frac{2e^{-at}}{\sqrt{\pi}} e^{-\beta t^n} dt$$

($\alpha > 0, \beta > 0$) correspond

$$\Delta(z) = \sum_0^{\infty} \frac{z^n}{n! \sqrt{\alpha + n\beta}}.$$

2. De l'expression (2) on tire

$$(3) \quad \Delta(z) = \int_a^b u(t) e^{zr(t)} dt,$$

$$(4) \quad \Delta^{(k)}(z) = \int_a^b u(t) [r(t)]^k e^{zr(t)} dt,$$

d'où l'on conclut que *la dérivée d'un ordre quelconque d'une transcendante $\Delta(z)$ est elle-même une transcendante $\Delta(z)$.*

De même, l'expression

$$(5) \quad \int \Delta(z) dz = \int_a^b \frac{u(t)}{r(t)} e^{zr(t)} dt + \text{const.}$$

fait voir que : *lorsque la fonction correspondante $r(t)$ ne s'annule pas pour les valeurs de t comprises entre a et b , ni pour ces mêmes valeurs, l'intégrale $\int \Delta(z) dz$ est, à une constante près, également une transcendante $\Delta(z)$.*

De (2) on conclut qu'en valeur absolue

$$a_n \leq a_0 \frac{M^n}{n!},$$

M étant la plus grande valeur absolue de $r(t)$ pour les valeurs de t comprises entre a et b . Par suite : *toute transcendante $\Delta(z)$ est une fonction entière de genre inférieur à deux.*

Les expressions (3) et (4) mettent en évidence de nombreuses particularités des transcendentes $\Delta(z)$, dont nous ne citerons ici que les suivantes :

Pour toute valeur réelle ou imaginaire de z le module de $\Delta(z)$ est inférieur à celui de

$$a_0 e^{Mz},$$

et le module de $\Delta^{(k)}(z)$ inférieur à celui de

$$a_k e^{Mz}.$$

L'élément de l'intégrale (3) gardant un signe invariable pour toute valeur réelle de z , et ainsi l'élément de la première intégrale qui figure dans l'expression

$$\Delta(\alpha + \beta i) = \int_a^b u e^{\alpha r} \cos \beta r \, dt + i \int_a^b u e^{\alpha r} \sin \beta r \, dt,$$

gardant un signe invariable pour toute valeur de β comprise entre $-\frac{\pi}{M}$ et $\frac{\pi}{M}$, on conclut qu'une transcendante $\Delta(z)$ (et par suite sa dérivée d'un ordre quelconque) ne peut avoir aucun zéro réel, ni aucun zéro imaginaire à coefficient de i compris entre $-\frac{\pi}{M}$ et $\frac{\pi}{M}$.

Chacune des courbes réelles

$$y = \Delta(x), \quad y = \Delta'(x), \quad y = \Delta''(x), \quad \dots$$

varie constamment dans un même sens, sans présenter de maxima, de minima ou de points d'inflexion; de plus, on aura pour les valeurs positives de x et de α

$$\begin{aligned} \Delta(x + \alpha) &\leq e^{M\alpha} \Delta(x), & \Delta(x + \alpha) &\leq \Delta(\alpha) e^{Mx}, \\ \Delta^{(k)}(x + \alpha) &\leq M^k e^{M\alpha} \Delta(x), & \Delta(x + \alpha) &\leq M^k \Delta(\alpha) e^{Mx}. \end{aligned}$$

Si N est la plus petite valeur de $r(t)$ entre a et b , on aura

$$\begin{aligned} \Delta(x) &\geq \alpha_0 e^{Nx}, \\ \Delta(x + \alpha) &\geq e^{N\alpha} \Delta(x), & \Delta(x + \alpha) &\geq \Delta(\alpha) e^{Nx}, \end{aligned}$$

avec des inégalités analogues pour les dérivées.

Lorsque z augmente indéfiniment dans une direction quelconque à droite de l'axe des imaginaires, la fonction $\Delta(z)$ augmentera indéfiniment ou bien tendra vers zéro suivant que $r(t)$ est positive ou négative dans l'intervalle (a, b) .

De même, lorsque z augmente indéfiniment dans une direction quelconque à gauche de l'axe des imaginaires, $\Delta(z)$ augmentera indéfiniment ou bien tendra vers zéro suivant que $r(t)$ est négative ou positive dans (a, b) .

En tous cas, donc, la courbe

$$y = \Delta(x)$$

(ainsi que les courbes dérivées) a l'axe des x comme asymptote,

et s'en approche indéfiniment à droite ou à gauche de l'axe des y , suivant le signe de $r(t)$.

Les inégalités précédentes fournissent aussi des limites supérieures ou inférieures pour les valeurs asymptotiques de $\Delta(x)$ dans le cas de x très grand : celles-ci sont fournies par des exponentielles

$$Ae^{hx},$$

où A et h sont des constantes.

Dans le cas plus particulier où la fonction $r(t)$ présente un maximum entre a et b , la formule classique de Laplace fournit comme valeur asymptotique précise de $\Delta(x)$ l'expression

$$C \frac{e^{hx}}{\sqrt{x}},$$

où les constantes C et h ont pour valeurs

$$C = u(\alpha) \sqrt{-\frac{2\pi}{r''(\alpha)}}, \quad h = r(\alpha),$$

α étant la valeur de t pour laquelle $r(t)$ atteint son maximum.

Pour avoir l'expression analogue correspondant à la dérivée $\Delta^{(k)}(x)$, il suffit de changer dans C $u(\alpha)$ en

$$u(\alpha)[r(\alpha)]^k.$$

Parmi les nombreuses propriétés qu'on peut tirer des expressions précédentes, citons encore la suivante :

Les équations linéaires à coefficients constants et à second membre, celui-ci étant une transcendante $\Delta(z)$, sont en général intégrables à l'aide des transcendentes $\Delta(z)$: l'équation

$$A_0 \frac{d^p y}{dx^p} + A_1 \frac{d^{p-1} y}{dx^{p-1}} + \dots + A_p y = \int_a^b u(t) e^{xr(t)} dt$$

admet comme intégrale particulière

$$\Delta(x) = \int_a^b U(t) e^{xr(t)} dt,$$

avec

$$U(t) = \frac{u(t)}{A_0[r(t)]^p + A_1[r(t)]^{p-1} + \dots + A_p},$$

sous la condition que l'équation algébrique caractéristique

$$A_0 x^p + A_1 x^{p-1} + \dots + A_p = 0$$

n'ait aucune racine réelle comprise entre la plus petite et la plus grande valeur de $r(t)$ quand t varie de a à b .

3. On a ainsi une classe assez étendue de fonctions entières de genre zéro ou un, à nombreuses particularités connues.

Appliquons ce qui précède à la transcendante

$$\Delta(z) = \sum_0^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)^{n+1}},$$

laquelle, comme on le verra dans ce qui suit, présente un intérêt tout particulier.

On a ici

$$a_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 \left(t \log \frac{1}{t} \right)^n dt,$$

et par suite

$$\Delta(z) = \int_0^1 e^{zt \log \frac{1}{t}} dt.$$

La fonction correspondante,

$$r(t) = t \log \frac{1}{t},$$

part de la valeur 0 pour $t = 0$, croît jusqu'à son maximum

$$M = \frac{1}{e},$$

à partir duquel elle décroît en atteignant la valeur 0 pour $t = 1$. Par suite la fonction $\Delta(z)$ présentera les particularités suivantes :

Pour toute valeur réelle ou imaginaire de z le module de $\Delta(z)$ est inférieur à celui de $e^{\frac{z}{e}}$ et le module de $\Delta^{(k)}(z)$ inférieur à celui de

$$\frac{1}{(k+1)^{k+1}} e^{\frac{z}{e}}.$$

Pour les valeurs réelles et positives de z et de α , on a

$$\begin{aligned}\Delta(z + \alpha) &\leq e^{\frac{\alpha}{e}} \Delta(z), & \Delta(z + \alpha) &\leq \Delta(\alpha) e^{\frac{z}{e}}, \\ \Delta^{(k)}(z + \alpha) &\leq e^{\frac{\alpha}{e} - k} \Delta^{(k)}(z), & \Delta^{(k)}(z + \alpha) &\leq \Delta^{(k)}(\alpha) e^{\frac{z}{e} - k}.\end{aligned}$$

La fonction $\Delta(z)$ et toutes ses dérivées n'ont aucun zéro réel ni aucun zéro imaginaire à coefficient de i compris entre $-\pi e$ et πe . Ces fonctions tendent vers zéro ou augmentent indéfiniment suivant que z augmente indéfiniment dans une direction à gauche ou bien à droite de l'axe des imaginaires.

La valeur asymptotique de $\Delta(z)$, pour z positif et très grand, est donnée par l'expression

$$\sqrt{\frac{2\pi}{e}} \frac{e^{\frac{z}{e}}}{\sqrt{z}};$$

celle de la dérivée $\Delta^{(k)}(z)$ par l'expression

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{e^{k+\frac{1}{2}}} \frac{e^{\frac{z}{e}}}{\sqrt{z}}.$$

On peut avoir une limite inférieure de $\Delta(z)$ pour les valeurs réelles et positives de z en remarquant qu'on a

$$e^n > \frac{(n+1)^n}{n!},$$

d'où l'on conclut facilement

$$\Delta(z) > \frac{e}{z} (e^{\frac{z}{e}} - 1), \dots$$

4. Voici maintenant un problème d'un ordre plus général où s'introduit d'elle-même la transcendante qui fait l'objet du paragraphe précédent.

Il existe une infinité de séries

$$(6) \quad A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots,$$

à coefficients réels, positifs et tels que l'équation algébrique

$$(7) \quad A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots + A_k z^k = 0,$$

obtenue en égalant à zéro la somme des $k+1$ premiers termes de (6), ait toutes ses racines réelles quel que soit k .

On s'assure bien simplement de l'existence effective de telles séries de la manière suivante. Soit

$$(7) \quad f_k(z) = A_0 + A_1 z + \dots + A_k z^k = 0,$$

une équation algébrique à coefficients réels, positifs et à racines

$$z_1, z_2, \dots, z_k,$$

toutes réelles et inégales; il est facile de voir qu'on peut choisir, et cela d'une infinité de manières, un coefficient réel positif A_{k+1} , de sorte que l'équation

$$(8) \quad f_{k+1}(z) = f_k(z) + A_{k+1} z^{k+1}$$

ait également toutes ses racines réelles et inégales. Car, en choisissant k nombres réels

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k,$$

de sorte qu'on ait

$$\xi_1 < z_1 < \xi_2 < z_2 < \dots < \xi_k < z_k,$$

les valeurs

$$f_k(\xi_i) \text{ et } f_k(\xi_{i+1}),$$

seront différentes de zéro et de signes contraires, et de plus on aura

$$\begin{array}{ll} \text{pour } k \text{ pair} & f_k(\xi_1) > 0, \quad f_k(\xi_k) < 0, \\ \text{pour } k \text{ impair} & f_k(\xi_1) < 0, \quad f_k(\xi_k) < 0. \end{array}$$

D'autre part, on peut toujours trouver une quantité réelle positive δ suffisamment petite pour que, quelle que soit la valeur de A_{k+1} comprise entre 0 et δ , la fonction $f_{k+1}(z)$, définie par (8), ait pour $z = \xi_i$ le même signe que $f_k(z)$. Et comme l'on a

$$\begin{array}{ll} \text{pour } k \text{ pair} & f_{k+1}(-\infty) < 0, \quad f_{k+1}(\infty) > 0, \\ \text{pour } k \text{ impair} & f_{k+1}(-\infty) > 0, \quad f_{k+1}(\infty) > 0, \end{array}$$

l'équation $f_{k+1}(z) = 0$ aura une racine dans chacun des $k+1$ intervalles

$$(-\infty, \xi_1), (\xi_1, \xi_2), \dots, (\xi_{k-1}, \xi_k), (\xi_k, \infty),$$

et par suite elle a toutes ses racines réelles et inégales.

On formerait ainsi, de proche en proche, des équations

$f_n(z) = 0$ des degrés de plus en plus élevés, ce qui prouve bien l'existence des séries (6) en question (1).

Désignons maintenant par $\lambda(n)$ une quelconque des fonctions de n suivantes :

1° Polynomes $P(n)$ quelconques n'ayant que des zéros réels et négatifs ;

2° Fonctions de la forme $e^{hn}P(n)$, où h est un nombre réel quelconque ;

3° Fonctions entières $G(n)$ quelconques de n , de genre zéro ou un, n'ayant que des zéros réels et négatifs ;

4° Fonctions de la forme e^{-hn^2} , h étant un nombre réel et positif quelconque ;

5° Produit d'un nombre quelconque de fonctions 1°, 2°, 3°, 4° ;

6° Fonctions de la forme

$$\frac{\lambda_1(n)}{\lambda_2(0)\lambda_2(1)\dots\lambda_2(n)},$$

$\lambda_1(n)$ et $\lambda_2(n)$ étant deux quelconques parmi les fonctions 1°, 2°, 3°, 4°, 5°.

Laguerre a montré (2) que, si une équation algébrique

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = 0$$

a toutes ses racines réelles, il en sera de même de l'équation

$$a_0\lambda(0) + a_1\lambda(1)x + \dots + a_n\lambda(n)x^n = 0.$$

On en conclut directement que, connaissant une série (6), on peut en déduire une infinité de la forme

$$A_0\omega_0 + A_1\omega_1z + A_2\omega_2z^2 + \dots,$$

jouissant de la propriété caractéristique des séries (6) : il suffit de prendre pour ω_n une quelconque des fonctions $\lambda(n)$.

C'est l'étude des fonctions définies par les séries (6) qui se rattache à la transcendante entière

$$\Delta(z) = \sum_0^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)^{n+1}},$$

(1) Voir aussi *L'Intermédiaire des Mathématiciens*, t. XIII, 1906, p. 135-136.

(2) *Œuvres*, t. I, p. 33-36, 199-206, etc.

considérée au paragraphe précédent, comme on le verra dans ce qui suit.

5. Appelons, pour abrégé, *fonctions* $\Omega(z)$ toute fonction de z définie par une série (6).

En désignant par

$$\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$$

les valeurs absolues des inverses des racines, manifestement toutes négatives, de l'équation algébrique

$$A_0 + A_1 z + \dots + A_n z^n = 0,$$

on aura

$$\frac{A_n}{A_0} = \zeta_1 \zeta_2 \dots \zeta_n,$$

$$\frac{A_1}{A_0} = \zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_n.$$

Les quantités ζ_i étant toutes réelles et positives, on aura, d'après la proposition classique sur la moyenne géométrique,

$$\sqrt[n]{\zeta_1 \zeta_2 \dots \zeta_n} \leq \frac{1}{n} (\zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_n),$$

ou bien

$$(9) \quad A_n \leq \frac{A_0}{n^n} \left(\frac{A_1}{A_0} \right)^n.$$

Par suite, en remarquant que

$$\sum_0^\infty \frac{z^n}{n^n} = 1 + z \sum_0^\infty \frac{z^n}{(n+1)^{n+1}},$$

on conclut que *les coefficients du développement d'une fonction* $\Omega(z)$ *quelconque suivant les puissances de* z *sont au plus égaux à ceux de la fonction*

$$A_0 + A_1 z \Delta \left(\frac{A_1 z}{A_0} \right),$$

où $\Delta(z)$ désigne la transcendante

$$\Delta(z) = \sum_0^\infty \frac{z^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

C'est cette proposition qui rattache la transcendante $\Delta(z)$ aux

fonctions $\Omega(z)$. Les inégalités relatives à $\Delta(z)$ s'étendent dès lors à toutes ces fonctions ; nous citerons les plus immédiates.

Tout d'abord l'inégalité (9) fait voir que toute fonction $\Omega(z)$ est une fonction entière de genre zéro ou un.

La même inégalité fait aussi voir que, pour toute valeur réelle ou imaginaire de z , le module d'une fonction $\Omega(z)$ quelconque est inférieur à

$$A_0 + A_1 r \Delta \left(\frac{A_1 r}{A_0} \right) \quad r = |z|.$$

En même temps, en s'appuyant sur l'inégalité précédente

$$\Delta(r) < e^{\frac{r}{e}},$$

on voit que l'expression

$$A_0 + A_1 r e^{\frac{A_1 r}{A_0 e}}$$

donne aussi une limite supérieure du module de $\Omega(z)$.

D'après une proposition de Laguerre ⁽¹⁾, les coefficients d'une série

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots,$$

à coefficients tous positifs, représentant une fonction entière de genre inférieur à deux, ayant toutes ses racines réelles, sont inférieurs aux coefficients correspondants de la série

$$a_0 e^{\frac{a_1 z}{a_0}}.$$

Nous ferons remarquer que la limite supérieure

$$\frac{A_0}{n^n} \left(\frac{A_1}{A_0} \right)^n,$$

que nous avons trouvée pour le coefficient A_n de $\Omega(z)$, est manifestement inférieure à

$$\frac{A_0}{1.2 \dots n} \left(\frac{A_1}{A_0} \right)^n$$

et par suite plus précise que la limite fournie par la proposition de Laguerre.

Il en est évidemment de même pour la limite supérieure que nous venons de trouver pour le module de $\Omega(z)$, puisqu'on a

(¹) BOREL, *Leçons sur les fonctions entières*, p. 34-36.

pour r réel et positif

$$A_0 + A_1 r \Delta \left(\frac{A_1 r}{a_0} \right) < A_0 e^{\frac{A_1 r}{A_0}}.$$

Enfin, la seconde limite supérieure

$$A_0 + A_1 r e^{\frac{A_1 r}{A_0 e}},$$

que nous avons trouvée pour le module de $\Omega(z)$, est aussi *plus précise* que celle de Laguerre: la différence entre celle-ci et la nôtre

$$A_0 \sum_0^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{e^{n-1}} \right) \left(\frac{A_1 r}{A_0} \right)^n$$

est positive puisque pour $n > 1$ on a

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{e^{n-1}}.$$

La fonction $\Omega(z)$ croît indéfiniment pour les valeurs positives de z indéfiniment croissantes; l'inégalité

$$\Omega(z) < A_0 + A_1 z \Delta \left(\frac{A_1 z}{A_0} \right)$$

et l'égalité asymptotique

$$\Delta(z) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{e}} \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{z}},$$

trouvée précédemment, montrent alors qu'une fonction quelconque $\Omega(z)$ croît moins vite que la fonction

$$\frac{H e^{hz}}{\sqrt{z}},$$

où H et h sont des constantes ayant pour valeurs

$$H = A_1 \sqrt{\frac{2\pi A_0}{e A_1}}, \quad h = \frac{A_1}{e A_0}.$$

L'inégalité (9) conduit aussi à des inégalités relatives aux zéros de $\Omega(z)$, parmi lesquelles nous indiquerons la suivante:

Soient

$$\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \dots$$

les valeurs absolues de ces zéros (tous réels et négatifs), rangées suivant leurs grandeurs croissantes, et formons la fonction

$$\varphi(r) = c_0^2 + c_1^2 r^2 + c_2^2 r^4 + \dots,$$

avec

$$c_n = \frac{A_0}{n^n} \left(\frac{A_1}{A_0} \right)^n.$$

En vertu d'une proposition que j'ai démontrée antérieurement ⁽¹⁾ et d'après l'inégalité (9), on aura

$$\zeta_1 \geq \frac{A_1 r}{\sqrt{\varphi(r)}},$$

quelle que soit la valeur réelle et positive de r . En prenant la valeur particulière

$$r = \frac{A_0}{A_1},$$

on aura

$$\varphi(r) = A_0^2 \sum_0^\infty n^{-2n} = 2,06388 \dots A_1^2,$$

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi(r)}} = \frac{0,6960 \dots}{A_0},$$

d'où la conclusion suivante : *une limite inférieure des valeurs absolues des zéros de toute fonction $\Omega(z)$ est donnée par l'expression*

$$0,6961 \frac{A_0}{A_1}.$$

On arrive même à la proposition plus générale que *le produit des modules des k premiers zéros de $\Omega(z)$ est égal ou supé-*

(¹) Si l'on désigne par ρ le plus petit module des zéros d'une série quelconque $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ et si l'on forme la fonction

$$u(r) = \frac{1}{r^2} (a_0^2 + a_1^2 r^2 + a_2^2 r^4 + \dots),$$

on aura

$$\rho \geq \frac{|a_0|}{\sqrt{u(r)}},$$

quelle que soit la valeur réelle et positive r , inférieure au rayon de convergence de la série (M. PETROVITCH, *Bull. de la Soc. math. de France*, t. XXIV, 1901, p. 302-312; E. LANDAU, *Bull. de la Soc. math. de France*, t. XXXIII, 1905, p. 251-261).

rieur à

$$0,6961 \left(\frac{A_0}{A_1} \right)^k.$$

On conçoit, d'ailleurs, facilement que les inégalités précédentes permettent de nombreuses applications des résultats récents sur les séries de Taylor aux fonctions $\Omega(z)$.

**SUR QUELQUES THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE PLANE
LIÉS A LA SURFACE DE KUMMER;**

Par M. L. REMY.

Si l'on projette une surface de Kummer à partir d'un de ses points doubles sur un plan tangent singulier, le contour apparent se compose de six droites tangentes à une même conique Γ , et formant deux triangles inscrits à la conique de contact C du plan tangent singulier.

Inversement, la figure plane formée par six droites tangentes à une même conique dépend de trois paramètres au point de vue projectif et peut être considérée comme la projection d'une surface de Kummer à partir d'un de ses points doubles.

De cette correspondance, nous nous proposons de déduire quelques théorèmes de géométrie plane dont il est aisé, d'ailleurs, de donner une démonstration directe.

I.

Prenons le centre de projection O comme sommet $x=y=z=0$ du trièdre de référence, et le plan de projection pour plan $t=0$. L'équation de la surface de Kummer est de la forme

$$\Gamma t^2 + 2 C_3 t + C^2 = 0,$$

Γ et C étant des polynômes homogènes en x, y, z de degré 2, et C_3 un polynôme homogène en x, y, z de degré 3.

Dans le plan $t=0$, l'équation $\Gamma(x, y, z)=0$ représente la conique tangente aux six droites formant le contour apparent de la surface, et l'équation $C(x, y, z)=0$ représente la conique de contact du plan $t=0$.

Le cône circonscrit de sommet O a pour équation $C_3^2 - \Gamma C^2 = 0$;

or il se décompose en six plans, soient $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x'=0$, $y'=0$, $z'=0$. De là l'identité

$$(I) \quad C_3 - \Gamma C^2 = xyzx'y'z'.$$

Il résulte de cette identité que la cubique $C_3 = 0$ passe par les six sommets des deux triangles $T(x, y, z)$ et $T'(x', y', z')$ et par les points de contact de leurs six côtés avec la conique Γ . D'où ce théorème :

Si deux triangles sont inscrits à une conique C , et, par suite, circonscrits à une même conique Γ , les six sommets et les six points de contact sont situés sur une cubique.

Il est aisé d'obtenir l'équation de cette cubique. Soient

$$\Gamma = m^2x^2 + n^2y^2 + p^2z^2 - 2mnxy - 2npyz - 2pmzx = 0$$

et

$$C = ayz + bzx + cxy = 0$$

les équations des deux coniques. La cubique C_3 étant circonscrite au triangle de référence a une équation de la forme

$$yz(\alpha_1y + \alpha_2z) + zx(\beta_1z + \beta_2x) + xy(\gamma_1x + \gamma_2y) + \lambda xyz = 0.$$

En faisant successivement $x=0$, $y=0$, $z=0$ dans l'identité (I), on détermine les coefficients α_1 , α_2 , β_1 , β_2 , γ_1 , γ_2

$$C_3 = \varepsilon ayz(ny - pz) + \varepsilon' bzx(pz - mx) + \varepsilon'' cxy(mx - ny) + \lambda xyz,$$

ε , ε' , ε'' étant égaux à ± 1 . D'ailleurs, on doit prendre $\varepsilon = \varepsilon' = \varepsilon''$, car la cubique C_3 ne peut être tangente à la conique C en aucun des sommets du triangle de référence. De cette équation, il résulte que :

En chacun des sommets des triangles T et T' la tangente à la cubique C_3 et la tangente à la conique C sont conjuguées harmoniques par rapport aux côtés du triangle.

Supposons que le triangle T reste fixe et que le triangle T' varie en restant inscrit à C et circonscrit à Γ : nous obtenons le théorème suivant :

Les involutions déterminées sur les coniques C et Γ par les sommets et les points de contact des triangles inscrits à C et

circonscrits à Γ sont découpées par le faisceau des cubiques C_3 qui passent par les trois points de contact et par les trois sommets d'un de ces triangles et ont pour tangente en chacun de ces sommets la droite conjuguée harmonique de la tangente à la conique C par rapport aux deux côtés.

II.

De l'identité

$$C_3^2 - \Gamma C^2 = xyzx'y'z'$$

on peut déduire une autre identité plus générale : soit

$$\Delta = \alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

l'équation d'une droite quelconque et posons

$$C_3 + C\Delta = \Sigma_3,$$

$$C_3 - C\Delta = \Sigma'_3,$$

$$\Gamma - \Delta^2 = Q.$$

L'identité peut s'écrire

$$\Sigma_3 \Sigma'_3 - QC^2 = xyzx'y'z'.$$

Or l'équation $\Sigma_3 = 0$ représente une cubique *quelconque* circonscrite aux triangles T et T' . D'où cette conclusion :

Toute cubique Σ_3 qui passe par les sommets de deux triangles inscrits à une conique coupe en outre leurs côtés en six points situés sur une conique Q bitangente à la conique Γ inscrite aux deux triangles.

Il convient de donner une démonstration directe de ce théorème, ainsi que de l'identité fondamentale. Soient deux triangles inscrits à une conique C , et Σ_3 une cubique quelconque passant par leurs six sommets. Il résulte du théorème d'Abel que les six autres points d'intersection de Σ_3 , avec les côtés, sont situés sur une conique : soient, en effet, a, b, c, a', b', c' les arguments elliptiques des sommets sur la cubique et $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ ceux des autres points d'intersection de Σ_3 avec les côtés. Des relations

$$a + b + c + a' + b' + c' = 0,$$

$$\alpha + b + c = 0,$$

$$\beta + c + a = 0,$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$\gamma' + a' + b' = 0,$$

on déduit de suite

$$\alpha + \beta + \gamma + \alpha' + \beta' + \gamma' = 0 \quad (1).$$

Soit $Q = 0$ l'équation de cette conique et considérons les courbes du sixième degré

$$QC^2 + \lambda xyzx'y'z' = 0,$$

λ désignant un paramètre variable. Elles ont dix-huit points d'intersection avec Σ_3 fixes; si l'on choisit λ de manière à donner un point d'intersection de plus, la courbe se décompose en deux cubiques Σ_3 et Σ'_3 , et l'on a

$$\Sigma_3 \Sigma'_3 - QC^2 = \lambda xyzx'y'z'.$$

D'ailleurs, la cubique Σ'_3 est manifestement circonscrite aux deux triangles, de même que Σ_3 et, par suite, il existe une identité de la forme

$$\Sigma_3 - \Sigma'_3 = 2C\Delta.$$

Dès lors il suffit de poser

$$\Sigma_3 + \Sigma'_3 = 2C_3,$$

$$Q + \Delta^2 = \Gamma$$

pour obtenir l'identité

$$C_3^2 - \Gamma C^2 = \lambda xyzx'y'z'.$$

III.

Aux familles de courbes tracées sur la surface de Kummer on peut faire correspondre par projection des familles de courbes inscrites à l'hexagone qui forme le contour apparent de la surface. Considérons en particulier la famille linéaire des courbes d'ordre $N = 4m$ découpées sur la surface de Kummer par les surfaces d'ordre m .

Leur équation hyperelliptique s'obtient en annulant une fonction $\theta(u, v)$ d'ordre $2m$, paire, de caractéristique nulle : leur

(1) On vérifie aisément que cette conique ne peut pas se décomposer en deux droites. Cette circonstance se présente, au contraire, lorsque l'on considère un hexagone au lieu de deux triangles.

genre est $p = 2m^2 + 1$, il est égal au nombre de leurs paramètres. En projection nous obtenons une famille de courbes inscrites à l'hexagone, de degré N et de genre p , dépendant de p paramètres (et non de $p - 1$), ce qui constitue un théorème. Il en serait de même pour toute famille linéaire de courbes tracée sur la surface.

Nous nous bornerons à un exemple particulier en étudiant la famille découpée par les quadriques passant par le centre de projection et par la conique C . Ces quadriques ont pour équation

$$C - \Delta t = 0,$$

en posant

$$\Delta = \alpha x + \beta y + \gamma z$$

et les courbes d'intersection se projettent suivant les quartiques

$$C_1 = C\Gamma + 2C_2\Delta + C\Delta^2 = 0,$$

qui, d'après leur définition même, sont à la fois inscrites et circonscrites aux deux triangles T et T' . Elles dépendent des trois paramètres α, β, γ , ce qui constitue un théorème :

Si deux triangles sont inscrits à une conique, il existe une famille trois fois infinie de quartiques C_1 à la fois inscrites et circonscrites aux deux triangles.

De la forme de l'équation des quartiques C_1 on peut déduire quelques conséquences géométriques. D'après l'identité

$$C_1^2 - \Gamma C^2 = xyzx'y'z',$$

on peut écrire

$$CC_1 = (C_2 + C\Delta)^2 - xyzx'y'z',$$

ce qui prouve que la cubique

$$\Sigma_3 = C_2 + C\Delta = 0$$

passé par les six sommets des triangles et les points de contact des six côtés avec C_1 . Lorsque la quartique C_1 varie, la cubique Σ_3 appartient à une famille linéaire à trois paramètres.

Réciproquement, étant donnée une cubique quelconque Σ_3 circonscrite aux deux triangles, il existe une quartique C_1 circonscrite aux deux triangles et tangente aux côtés en leurs points de rencontre avec Σ_3 .

Les six points de contact de C_1 avec les côtés sont situés sur

une conique Q bitangente à la conique Γ , d'après ce que nous avons vu plus haut. Les coniques C et Q coupent en outre la quartique C_4 en quatre points situés sur la droite $\Delta = 0$, et cette droite est la corde de contact des coniques Q et Γ . Tous ces résultats sont mis en évidence par la forme de l'équation

$$C_4 = C(\Gamma - \Delta^2) + 2\Sigma_3 \Delta.$$

IV.

L'équation des quartiques C_4 renferme huit paramètres : c'est précisément le nombre des paramètres de l'équation d'une quartique générale Σ_4 , lorsqu'on prend pour triangle de référence un triangle inscrit et circonscrit à la quartique

$$\begin{aligned} \Sigma_4 = yz(A_1y + A_2z)^2 + zx(B_1z + B_2x)^2 + xy(C_1x + C_2y)^2 \\ + xyz(Mx + Ny + Pz) = 0. \end{aligned}$$

Dès lors on peut prévoir que l'équation d'une quartique générale Σ_4 peut être identifiée avec celle de C_4 , et que, par suite, les propriétés énoncées plus haut appartiennent à la quartique générale. Nous montrerons effectivement un peu plus loin, par un exemple particulier, que cette identification n'est ni impossible, ni indéterminée. Mais, dans le cas général, l'identification présenterait une certaine difficulté et il sera préférable d'aborder directement l'étude des triangles inscrits et circonscrits à une quartique.

Soient $g_1(\xi)$, $g_2(\xi)$, $g_3(\xi)$ les intégrales abéliennes de première espèce attachées à la courbe C_4 ; nous supposons que les sommes $\Sigma g(\xi)$ relatives à quatre points de la courbe situés en ligne droite sont nulles. Désignons par ξ_1, ξ_2, ξ_3 les sommets, et par η_1, η_2, η_3 les points de contact d'un triangle inscrit et circonscrit :

$$\begin{aligned} 2g_i(\eta_1) + g_i(\xi_2) + g_i(\xi_3) &= 0, \\ 2g_i(\eta_2) + g_i(\xi_3) + g_i(\xi_1) &= 0, \\ 2g_i(\eta_3) + g_i(\xi_1) + g_i(\xi_2) &= 0 \\ (i = 1, 2, 3), \end{aligned}$$

d'où

$$2\Sigma g_i(\xi) + 2\Sigma g_i(\eta) = 0$$

et

$$\Sigma[g_i(\xi) + g_i(\eta)] = \frac{P_i}{2},$$

en désignant par $\frac{P_1}{2}$, $\frac{P_2}{2}$, $\frac{P_3}{2}$ une demi-période.

Il existe 64 demi-périodes, mais elles ne conviennent pas toutes au problème actuel.

En effet, 28 de ces demi-périodes correspondent aux bitangentes de C_4 : si l'on désigne par X_1 , X_2 les points de contact d'une bitangente, on a

$$g_i(X_1) + g_i(X_2) = \frac{\Pi_i}{2} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Dès lors, si les points ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 , η_1 , η_2 , η_3 satisfont aux conditions

$$\Sigma[g_i(\xi) + g_i(\eta)] = \frac{\Pi_i}{2},$$

on en déduit que les huit points ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 , η_1 , η_2 , η_3 , X_1 , X_2 sont situés sur une conique, ce qui ne peut avoir lieu dans le cas actuel.

De là résulte que les triangles inscrits et circonscrits à une quartique se répartissent en 36 groupes seulement ⁽¹⁾.

Ceci posé, soient T , T' deux triangles d'un même groupe : des relations

$$\Sigma[g_i(\xi) + g_i(\eta)] + \Sigma[g_i(\xi') + g_i(\eta')] = 0,$$

il résulte que les six sommets ξ , ξ' et les six points de contact η , η' sont situés sur une cubique.

Soit $\Sigma_3 = 0$ l'équation de cette cubique et considérons les courbes du sixième ordre

$$\Sigma_3^2 + \lambda xyzx'y'z' = 0,$$

λ désignant un paramètre variable. Elles ont un point double en chacun des sommets des triangles T , T' et sont tangentes à C_4 aux six points de contact de C_4 avec les côtés, soit vingt-quatre points d'intersection fixes avec C_4 . Si l'on choisit λ de manière à donner

(1) Il resterait à déterminer le nombre des triangles appartenant à un même groupe.

un point d'intersection de plus, la courbe se décompose en C_1 et une conique C

$$\Sigma_1^2 + \lambda xyzx'y'z' = CC_1,$$

et cette conique est manifestement circonscrite aux deux triangles.

Nous sommes donc conduits aux théorèmes suivants :

Les triangles inscrits et circonscrits à une quartique C_1 se répartissent en 36 groupes. Deux triangles d'un même groupe sont inscrits à une conique C et leurs points de contact avec C_1 sont également situés sur une conique Q . Les quatre autres points d'intersection de C_1 avec les coniques C et Q sont en ligne droite. Enfin les six sommets et les six points de contact sont situés sur une cubique.

Corrélativement :

Les triangles inscrits et circonscrits à une courbe de quatrième classe Γ_1 se répartissent en 36 groupes. Deux triangles d'un même groupe sont inscrits à une conique ; les tangentes à Γ_1 aux sommets de ces deux triangles sont tangentes à une autre conique et ces deux coniques sont bitangentes.

V.

Nous terminerons par une application à un exemple particulier : soit la quartique aux 168 collinéations

$$\Sigma_1 = x^3y + y^3z + z^3x = 0.$$

Le triangle de référence T_0 est un triangle inscrit et circonscrit à la quartique (car les trois sommets sont des points d'inflexion avec les trois côtés pour tangentes d'inflexion). Proposons-nous de déterminer les triangles T inscrits et circonscrits à Σ_1 et appartenant au même groupe que T_0 . Ce problème revient à identifier l'équation de C_1

$$C_1 = C(\Gamma - \Delta^2) + 2\Sigma_1\Delta$$

avec celle de Σ_1 (en conservant les mêmes notations). Soit, en effet, $a_ib_ic_i$, $m_in_ip_i$, $\alpha_i\beta_i\gamma_i$, λ_i une solution des équations d'iden-

tification : à l'identité

$$(E_i) \quad \Sigma_i = C_i(\Gamma_i - \Delta_i^2) - 2\Sigma_{2i}\Delta_i$$

correspond un triangle T_i inscrit et circonscrit à Σ_i ayant ses sommets sur la conique $C_i = 0$ et ses points de contact sur la conique $\Gamma_i - \Delta_i^2 = 0$. Inversement à tout triangle T_i de même groupe que T_0 correspond une identité (E_i) .

Ceci posé, on trouve de suite, en faisant $x = 0, y = 0, z = 0$,

$$(1) \quad \alpha = m, \quad \beta = n, \quad \gamma = p,$$

et en annulant dans C_i les coefficients des termes en x^2yz, y^2zx, z^2xy ,

$$\begin{aligned} am - bn + cp - \lambda &= 0, \\ am + bn - cp - \lambda &= 0, \\ -am + bn + cp - \lambda &= 0, \end{aligned}$$

d'où l'on conclut

$$(2) \quad am = bn = cp = \lambda.$$

On peut d'ailleurs prendre $\lambda = 1$.

Il reste à égaler dans Σ_i et C_i les coefficients des termes en x^3y, y^3z, z^3x , d'où

$$(3) \quad \begin{cases} cm^2 = 1, \\ an^2 = 1, \\ bp^2 = 1. \end{cases}$$

La résolution du système (1) (2) (3) est immédiate

$$\begin{aligned} \alpha &= m = \omega, \\ \beta &= n = \omega^2, \\ \gamma &= p = \omega^2, \\ a &= \frac{1}{m} = \omega^6, \\ b &= \frac{1}{n} = \omega^3, \\ c &= \frac{1}{p} = \omega^3, \end{aligned}$$

ω étant une racine septième de l'unité.

La solution $\omega = 1$ conduit à l'identité (E_1) :

$$(E_1) \quad \begin{cases} x^2y + y^2z + z^2x \\ = (x+y+z)(x^2y + y^2z + z^2x + xyz) - (xy + yz + zx)^2. \end{cases}$$

On vérifie aisément que les six autres identités (E_i) se déduisent de celle-là par les transformations

$$\frac{x}{X} = \frac{y}{\omega^2 Y} = \frac{z}{\omega Z}.$$

L'équation E_1 met en évidence quelques propriétés géométriques de la quartique Σ_4 . Les coniques $C = 0$ et $\Gamma - \Delta^2 = 0$ étant confondues, les points de contact des côtés du triangle T_1 sont confondus avec ses sommets : ceux-ci sont donc trois points d'inflexion de Σ_4 ayant les trois côtés pour tangentes d'inflexion. Ainsi le groupe de triangles considéré comprend les huit triangles suivant lesquels se répartissent les vingt-quatre points d'inflexion de la quartique Σ_4 .

D'autre part la droite

$$\Delta = x + y + z = 0$$

est bitangente à la quartique en ses points de rencontre avec la conique

$$C = xy + yz + zx = 0$$

et la cubique

$$\Sigma_3 = x^2y + y^2z + z^2x + xyz = 0$$

est tangente à la quartique aux six points d'inflexion, sommets des triangles T_0 et T_1 .

Donc :

Les huit triangles suivant lesquels se répartissent les points d'inflexion de la quartique

$$x^2y + y^2z + z^2x = 0$$

jouissent des propriétés suivantes : deux quelconques de ces triangles T_i , T_k ont leurs sommets situés sur une conique C_{ik} et leurs côtés tangents à une conique Γ_{ik} .

Les coniques C_{ik} et Γ_{ik} sont bitangentes et leurs points de contact sont les points de contact de la quartique avec une de

ses bitangentes Δ_{ik} . Il y a 28 combinaisons de deux triangles T_i, T_k s'associant respectivement aux 28 bitangentes de la quartique.

Enfin, il existe 28 cubiques Σ_{ik} tangentes à la quartique aux six points d'inflexion formant deux triangles T_i, T_k .

REMARQUES SUR CERTAINES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES;

Par M. S. SANIELEVICI.

M. Laisant a montré (*Bulletin de la Société mathématique*, t. XX, p. 117) que toute fonction de la forme

$$u = u_{\alpha_1} + u_{\alpha_2} + \dots + u_{\alpha_p},$$

u_{α_i} étant une fonction homogène de degré α_i des variables $x_1, x_2, \dots, x_m$, vérifie, si l'on pose

$$u^{(k)} = \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{(k)} u,$$

une équation aux dérivées partielles d'ordre p

$$(1) \quad \alpha_0 u^{(p)} + \alpha_1 u^{(p-1)} + \dots + \alpha_p u = 0,$$

où $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ sont des coefficients constants.

La démonstration résulte immédiatement du théorème d'Euler; en effet, on a

$$\begin{aligned} u &= u_{\alpha_1} + \dots + u_{\alpha_p}, \\ u^{(1)} &= \alpha_1 u_{\alpha_1} + \dots + \alpha_p u_{\alpha_p}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$u^{(p)} = \alpha_1(\alpha_1-1)\dots(\alpha_1-p+1)u_{\alpha_1} + \dots + \alpha_p(\alpha_p-1)\dots(\alpha_p-p+1)u_{\alpha_p},$$

et l'on pourra éliminer les u_{α} . L'équation résultante

$$(2) \quad \begin{vmatrix} u & 1 & \dots & 1 \\ u^{(1)} & \alpha_1 & \dots & \alpha_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u^{(p)} & \alpha_1(\alpha_1-1)\dots(\alpha_1-p+1) & \dots & \alpha_p(\alpha_p-1)\dots(\alpha_p-p+1) \end{vmatrix} = 0$$

est évidemment de la forme (1).

Réciproquement, étant donnée une équation telle que (1), M. Laisant démontre que son intégrale est une somme de p fonctions homogènes, dont on déterminera les degrés en identifiant le coefficient de $u^{(k)}$ ($k = 0, 1, \dots, p$) dans (1) et (2). Cette identification conduit à une équation de degré p , dont les racines seront les degrés d'homogénéité cherchés.

M. Laisant n'a pas examiné le cas où cette équation a des racines multiples. On peut compléter ses résultats *en ramenant les équations aux dérivées partielles de la forme (1) à des équations différentielles linéaires à coefficients constants*. En même temps nous montrerons que cette méthode s'étend à une infinité d'autres classes d'équations aux dérivées partielles.

Désignons par δu le symbole opératoire $u^{(1)}$, et posons

$$\delta^2 u = \delta(\delta u), \quad \dots, \quad \delta^n u = \delta(\delta^{n-1} u).$$

Il est aisé de voir que $\delta^n u$ est une combinaison linéaire de $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, ..., $u^{(n)}$.

En effet, M. Laisant montre que l'on a

$$\delta u^{(k)} = k u^{(k)} + u^{(k+1)}.$$

On aura donc successivement

$$\begin{aligned} \delta^2 u &= u^{(1)} + u^{(2)}, \\ \delta^3 u &= u^{(1)} + 3 u^{(2)} + u^{(3)}, \\ &\dots \end{aligned}$$

et réciproquement

$$\begin{aligned} u^{(2)} &= \delta^2 u - \delta u, \\ u^{(3)} &= \delta^3 u - 3 \delta^2 u + 2 \delta u, \\ &\dots \end{aligned}$$

Soit maintenant u une fonction homogène de degré α ; il est clair que l'on aura

$$(3) \quad \delta u = \alpha u, \quad \delta^2 u = \alpha^2 u, \quad \dots, \quad \delta^n u = \alpha^n u.$$

L'effet de l'opération δ sur une fonction homogène est donc le même que celui de la différentiation sur une fonction exponentielle.

Par conséquent, étant donnée une équation aux dérivées par-

tielles d'ordre p de la forme

$$(4) \quad \alpha_0 u^{(p)} + \alpha_1 u^{(p-1)} + \dots + \alpha_p u = 0,$$

on pourra l'écrire

$$(5) \quad \delta^p u + b_1 \delta^{p-1} u + \dots + b_p u = 0,$$

et l'on suivra, pour en trouver les intégrales, la méthode qu'on emploie dans la recherche des intégrales d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants. On substituera à u une fonction homogène de degré inconnu α et l'on aura à résoudre une équation *caractéristique*

$$\alpha^p + b_1 \alpha^{p-1} + \dots + b_p = 0,$$

qui fournira les degrés d'homogénéité des p parties de u , si toutes les racines de cette équation sont simples.

D'ailleurs, on peut ramener *effectivement* l'équation (5) à une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Il suffit de faire le changement de variables

$$u_1 = \log x_1 \quad u_2 = \frac{x_2}{x_1}, \quad \dots, \quad u_n = \frac{x_n}{x_1}.$$

Une fonction homogène $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de degré m prendra ainsi la forme $e^{mu_1} f(1, u_2, \dots, u_n)$; et le symbole δ se réduira à une simple dérivée. On voit en effet facilement que l'on a

$$\delta = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n} = \frac{\partial}{\partial u_1}$$

et plus généralement

$$\delta^k = \frac{\partial^k}{\partial u_1^k}.$$

L'équation (5) devient donc simplement

$$(6) \quad \frac{\partial^p u}{\partial u_1^p} + b_1 \frac{\partial^{p-1} u}{\partial u_1^{p-1}} + \dots + b_p u = 0,$$

et, si α est une racine d'ordre m de multiplicité de l'équation caractéristique de (5) ou de (6), l'intégrale correspondante sera

$$e^{\alpha u_1} (c_0 + c_1 u_1 + c_2 u_1^2 + \dots + c_{m-1} u_1^{m-1}),$$

$c_0, c_1, \dots$ étant des fonctions de $u_2, u_3, \dots, u_n$; c'est-à-dire

$$C_0 + C_1 \log x_1 + \dots + C_{m-1} (\log x_1)^{m-1},$$

$C_0, C_1, \dots$ étant des fonctions homogènes de degré α en $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Le succès de la méthode est dû à l'emploi de ce que Sophus Lie appelle les *variables canoniques*. En effet, le symbole δ n'est autre chose que le symbole d'une *transformation homothétique infinitésimale*. Une fonction homogène u admet le groupe homothétique, en ce sens que l'on a $\delta^\alpha u = \alpha^\alpha u$ (α est le degré d'homogénéité); par conséquent, si l'on remplace le groupe homothétique par le groupe semblable de translation, au moyen du changement de variables indiqué, le symbole doit se réduire au symbole d'une translation infinitésimale $\frac{\partial}{\partial u_1}$ et la fonction doit se réduire à une exponentielle par rapport à u_1 .

On conclut immédiatement de cette remarque que la méthode précédente peut être appliquée aux équations aux dérivées partielles de la forme (5), quel que soit le symbole linéaire δ .

Prenons, par exemple, le symbole d'une rotation infinitésimale plane $x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}$, ou $qx - py$. L'équation aux dérivées partielles

$$(7) \quad x^2 t - 2xys + y^2 r - (px + qy) + a(qx - py) + bz = 0$$

peut s'écrire

$$\delta^2 z + a \delta z + bz = 0,$$

si l'on pose

$$\delta z = qx - py.$$

Si donc on introduit les variables canoniques, qui sont ici les coordonnées polaires ρ et ω , on aura

$$\delta z = \frac{\partial z}{\partial \omega}, \quad \delta^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial \omega^2}$$

et l'équation (7) se réduira simplement à

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \omega^2} + a \frac{\partial z}{\partial \omega} + bz = 0.$$

Soient α et β les racines de l'équation caractéristique; l'intégrale générale de (7) sera

$$z = f(x^2 + y^2) e^{\alpha \arctan \frac{y}{x}} + \varphi(x^2 + y^2) e^{\beta \arctan \frac{y}{x}},$$

f et φ étant deux fonctions arbitraires.

Il est clair que les exemples peuvent être multipliés indéfiniment. Seulement, ce qui fait l'intérêt de la classe particulière considérée par M. Laisant, c'est que les symboles δ^n sont, dans ce cas, des combinaisons linéaires des seuls symboles $u^{(n)}$, ce qui n'a pas lieu en général.

REMARQUES SUR LA QUESTION DES PRINCIPES DE L'ANALYSIS SITUS;

Par M. COMBEBIAC.

Les axiomes doivent exprimer les propriétés fondamentales des concepts indéfinissables logiquement (les propriétés des autres découlent de leurs définitions), c'est-à-dire doivent avoir pour effet de *classer* ces concepts dans des catégories préalablement conçues; les théories fondées sur ces axiomes deviennent alors des applications de théories plus générales. C'est ainsi que diverses branches des mathématiques se présentent comme des applications, savoir : l'Analyse mathématique, de l'étude de certains ensembles ordonnés; la Géométrie projective, de celle de certains ensembles de lignes; la Géométrie métrique, de celle de certains groupes de transformations ponctuelles.

Seule la question des principes de l'*Analysis situs* conserve encore quelque obscurité, bien qu'il ne soit pas douteux que cette branche de la Géométrie doit être rattachée à une théorie générale des variétés numériques. On se propose, en rapprochant quelques résultats dus à la théorie des ensembles, de préciser la position de cette question et peut-être aussi de fournir une indication pour la poursuite de sa solution.

I.

L'IDÉE D'ORDRE COMPLEXE.

M. G. Cantor ⁽¹⁾ avait manifesté l'intention d'étudier, en plus

⁽¹⁾ G. CANTOR, *Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis*, traduction française par Marotte, p. 24; Hermann, Paris, 1904.

des ensembles *simplement ordonnés*, des ensembles ordonnés d'ordre deux, trois, etc. Une telle généralisation de l'idée d'ordre vise évidemment les variétés à plusieurs dimensions. Bien que rien n'ait encore été publié à ce sujet, il est possible de préciser, tout au moins, la manière dont une théorie générale de l'ordre fournirait à l'*Analysis situs* son fondement.

A s'en tenir aux types d'ordre simple usuels, l'idée d'ordre se présente comme la notion commune à certaines représentations numériques d'un même ensemble; c'est ainsi que l'ordre inhérent à un continu à une dimension est commun à une infinité de représentations numériques de cet ensemble, qui se déduisent les unes des autres au moyen de transformations biunivoques et continues, c'est-à-dire définies par des fonctions numériques continues, uniformes et à inverses uniformes. La théorie de l'ordre a donc pour effet de rendre l'étude des continus à une dimension indépendante de leurs représentations numériques et permet de se passer, pour cette étude, de l'intervention de tout système de coordonnées.

L'idée d'ordre complexe aurait le même rôle à jouer par rapport aux continus à n dimensions, c'est-à-dire que l'ordre complexe inhérent à l'un de ces continus doit représenter ce qu'ont de commun les systèmes de coordonnées de cet ensemble qui se déduisent les uns des autres au moyen de transformations biunivoques et continues. Cet ordre peut évidemment être conçu indépendamment des systèmes de coordonnées qui le caractérisent; les diverses particularités que peuvent présenter les continus donneraient lieu alors à divers types d'ordre complexe analogues aux types d'ordre simple distingués par M. G. Cantor.

L'*Analysis situs* a pour objet l'étude de la continuité géométrique, c'est-à-dire des propriétés inhérentes aux représentations habituelles de l'espace sur la variété numérique complète à trois dimensions. Quelles que soient les notions intuitives qui entrent comme éléments constitutants dans celle de la continuité géométrique, les propriétés qui font l'objet de l'*Analysis situs* résultent du fait que cette continuité définit, pour l'espace ponctuel, un ordre complexe du même type que celui de la variété numérique complète à trois dimensions.

La nature logique de l'*Analysis situs* est donc bien spécifiée;

cette science constitue une application de la théorie d'un certain type d'ordre complexe.

II.

LA NOTION DE VOLUME.

Une proposition ayant pour but de classer l'*Analysis situs* ne peut évidemment exprimer en rien des qualités de l'espace lui-même (sauf sa puissance) et ne peut intéresser que les notions qui ont été réunies sous le terme assez vague de continuité géométrique. Il importe tout d'abord de réduire l'idée de cette continuité à des notions à la fois plus intuitives et plus précises.

Dans tout ensemble ayant la puissance du continu et rapporté à un système de n coordonnées il existe des ensembles *continus par rapport à ce système de coordonnées*. Ces ensembles jouissent de la même propriété par rapport à tous les systèmes de coordonnées qui se déduisent les uns des autres par transformations biunivoques et continues, c'est-à-dire qui déterminent la même notion de continuité (le même ordre complexe). Ces ensembles peuvent être appelés les *segments* relatifs à l'ordre considéré, et il est facile de se rendre compte qu'ils déterminent complètement, à leur tour, l'ordre correspondant.

Les segments déterminés par la continuité géométrique sont évidemment les volumes. L'axiome fondamental de l'*Analysis situs* peut donc être pris sous la forme suivante :

A. — *Les volumes sont les segments relatifs à un ordre complexe du même type que celui qui est inhérent à la variété numérique complète à trois dimensions.*

Cette proposition a pour effet de classer la notion de volume (1)

(1) Mais non de la définir. Il n'est peut-être pas inutile d'observer, à ce propos, que, bien que les définitions comportent un haut degré d'arbitraire, elles doivent néanmoins satisfaire à certaines conditions grammaticales; c'est ainsi que les deux termes d'une définition, savoir la dénomination, d'une part, et les propriétés en cause, d'autre part, doivent s'appliquer au même objet, et il ne saurait être licite de dire, par exemple : j'applique l'adjectif *droite* à toute ligne appartenant à un ensemble jouissant de telles et telles propriétés, car tout qualificatif du substantif *ligne* doit exprimer une qualité des lignes, c'est-à-dire déterminer une répartition des lignes en deux ensembles formés, l'un des lignes qui possèdent la qualité visée, l'autre de celles qui ne la possèdent pas.

dans une catégorie préalablement conçue et définie en fonction des concepts mathématiques généraux (en admettant que l'on soit parvenu à définir le type d'ordre visé indépendamment des concepts numériques); elle constitue donc un axiome, dans la véritable acception du mot.

Il est intéressant d'observer que les volumes ne sont pas les seuls ensembles de points qui jouissent de la propriété spécifiée. En effet, si l'on applique aux divers points de l'espace une transformation ponctuelle biunivoque mais discontinue, les volumes deviennent des ensembles de points, qui ne sont pas des volumes mais qui possèdent, en tant qu'ensembles de points, les mêmes propriétés que les volumes, c'est-à-dire qu'ils constituent les segments d'un nouveau dispositif ordinal semblable à celui qui est déterminé par la continuité géométrique. De même les lignes seraient ainsi transformées en ensembles simplement ordonnés qui leur sont semblables et qui jouent dans le nouveau dispositif le même rôle que les lignes dans l'ancien.

L'*Analysis situs* se présente donc comme une application d'une théorie plus générale et à laquelle il est difficile de refuser le qualificatif *géométrique*, puisqu'elle conserve la notion de point.

III.

LES SEGMENTS D'UN DISPOSITIF ORDINAL.

Les remarques précédentes ont pour effet de ramener la question des principes de l'*Analysis situs* à la résolution de ce problème : édifier une théorie générale de l'ordre.

Tandis que la notion d'ordre simple est une des plus nettes qui soient fournies par l'intuition et tandis que ses propriétés sont des plus faciles à concevoir et à énoncer, il est loin d'en être de même pour la notion d'ordre complexe. On peut essayer d'aborder celle-ci indirectement.

Comme généralisation de ce qui a été observé pour les variétés numériques, tout ordre simple ou complexe donne lieu à des *segments*, qui le déterminent complètement. (Dans le cas d'un ordre simple, ils sont définis par la condition de contenir, chacun, tous les éléments compris entre deux quelconques de ses propres éléments.) On peut dès lors se demander si l'on n'aurait pas

quelque facilité à fonder une théorie générale de l'ordre en adoptant comme notion fondamentale celle de segment. Cette voie présenterait l'avantage, en ce qui concerne la Géométrie, de prendre son point de départ dans les données intuitives elles-mêmes.

A cet effet, il serait tout d'abord nécessaire de déterminer : 1° les conditions auxquelles doivent satisfaire des ensembles pour constituer les segments d'un dispositif ordinal; 2° les propriétés de ces segments qui caractérisent les diverses catégories à distinguer dans les dispositifs ordinaux (dispositifs à une, deux, etc. dimensions, dispositifs compacts ou disjoints, fermés ou ouverts, limités ou illimités, etc.). On signale seulement, à titre d'indication, trois propriétés qui doivent s'appliquer, semble-t-il, aux segments d'un dispositif ordinal quelconque.

Deux segments qui ont des éléments communs forment, par leur réunion, un segment. (C'est une propriété essentielle de l'idée de continuité.)

On peut toujours diviser un segment en deux autres contenant respectivement deux éléments distincts arbitrairement choisis dans le segment primitif.

Si deux segments s et s' sont contenus dans un troisième, celui-ci contient également un segment σ tel que les ensembles (s, σ) et (s', σ) , formés respectivement par la réunion de σ avec s et s' , constituent des segments.

IV.

L'UNITÉ DES MATHÉMATIQUES.

La Géométrie peut être établie tout entière sans mettre en jeu d'autres concepts que ceux qui ressortissent à l'*Analysis situs*; ceux-ci permettent en effet de définir et, par conséquent, d'étudier les catégories auxquelles appartiennent les autres concepts géométriques; on peut en effet énoncer les axiomes de la Géométrie projective et de la Géométrie métrique (considérées comme indépendantes l'une de l'autre) sous la forme suivante :

P. — *Les lignes droites sont des lignes sans point double,*

s'étendant à l'infini dans les deux sens et formant un ensemble qui jouit des propriétés suivantes :

Une des lignes de l'ensemble est déterminée par deux quelconques de ses points ;

Toutes les lignes de l'ensemble qui s'appuient sur deux d'entre elles concourantes sont situées sur une même surface ;

Par un point extérieur à une ligne de l'ensemble on ne peut mener à cette ligne qu'une seule ligne asymptotique appartenant à l'ensemble.

M. — *Les déplacements sans déformation sont des transformations ponctuelles formant un groupe métrique archimédien et dont les lignes axiales présentent la propriété de l'unicité de l'asymptotique.* On doit entendre par groupes métriques les groupes semblables soit au groupe des déplacements sans déformation, soit au groupe projectif continu conservant une sphère réelle ou imaginaire à centre réel ; les groupes archimédiens sont ceux de ces groupes pour lesquels la surface invariante (transformée d'un plan ou d'une sphère réelle) est reportée à l'infini. Bien entendu, l'on doit adopter, pour les groupes métriques, une définition indépendante des concepts métriques ; mais il suffit, pour cela, d'exprimer géométriquement les propriétés caractéristiques indiquées par Sophus Lie Φ et qui, pour les groupes métriques archimédiens, se réduisent à la suivante ⁽¹⁾ :

Pour les transformations du groupe qui laissent fixe un point quelconque de l'espace, le lieu des transformés d'un autre point quelconque est une surface fermée qui passe par le second point et entoure le premier.

Les principes de l'*Analysis situs* sont donc ceux de la Géométrie tout entière, et l'on voit qu'une théorie générale de l'ordre réaliserait l'unité *logique* des Mathématiques, l'Analyse numérique et la Géométrie devenant alors des applications de cette théorie.

Enfin, on constate que l'espace se voit dépouillé, au profit d'autres concepts, de toutes les qualités qui lui étaient attribuées en propre, à l'exception de celles qui appartiennent à tous les ensembles ayant la puissance du continu.

⁽¹⁾ G. COMBEIAC, *Théorie géométrique des groupes métriques* (Enseignement mathématique, 1905).

EXTRAIT DES STATUTS ET DU RÈGLEMENT.

La Société mathématique de France a pour objet l'avancement et la propagation des études de Mathématiques pures et appliquées. Elle y concourt par ses travaux et ses publications. Elle a son siège à Paris.

La Société se compose de sociétaires perpétuels, de membres résidents et de membres non résidents, en nombre illimité.

Sont considérés comme résidents les membres qui ont à Paris leur domicile ou leurs occupations professionnelles.

Les Étrangers peuvent faire partie de la Société.

Les conditions à remplir, pour être membre de la Société, sont les suivantes : 1° avoir été présenté par deux de ses membres et agréé par le Conseil d'administration ou par le Bureau agissant en vertu d'un mandat du Conseil; 2° avoir obtenu, à l'une des séances qui ont suivi la présentation, les suffrages de la majorité des membres présents; 3° avoir versé un droit d'admission de *dix francs*; 4° payer une cotisation annuelle dont le montant est de *vingt francs* pour les membres résidents, et de *quinze francs* pour les membres non résidents.

La cotisation annuelle peut toujours être rachetée par une somme de *trois cents francs*, versée dans les conditions fixées par le règlement administratif de la Société.

Ce versement confère le titre de *sociétaire perpétuel*.

La cotisation annuelle est payée au commencement de chaque exercice dont l'origine est fixée au 1^{er} novembre de chaque année.

Les nouveaux membres doivent payer la totalité de la cotisation de l'exercice en cours, quelle que soit l'époque de leur admission.

La Société tient des séances ordinaires deux fois par mois; elle prend trois mois de vacances, en août, septembre et octobre.

Pour assister aux séances, les personnes étrangères à la Société doivent être présentées par l'un de ses membres.

La Société publie par livraisons un Recueil annuel qui a pour titre : *Bulletin de la Société mathématique de France*, et qui contient, avec un extrait des procès-verbaux des séances, des Notes et Mémoires sur les Mathématiques pures ou appliquées, ayant pour auteurs des membres de la Société, et présentant quelque originalité au point de vue de la méthode ou des résultats.

Les livraisons du *Bulletin* sont adressées à tous les membres de la Société, au fur et à mesure de leur publication. Toutefois, dans le cas où un sociétaire se met en retard dans le paiement de sa cotisation, l'envoi du *Bulletin* est suspendu pour lui, jusqu'à ce qu'il ait acquitté l'arriéré.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6°).

HUMBERT (G.), Membre de l'Institut, Professeur à l'École Polytechnique.
— *Cours d'Analyse professé à l'École Polytechnique*; 2 volumes grand in-8 se vendant séparément :

TOME I : *Calcul différentiel. Principes du calcul intégral. Applications géométriques*; avec 111 figures; 1902..... 16 fr.

TOME II : *Complément du calcul des intégrales. Fonctions analytiques et équations différentielles*; avec 91 figures; 1904..... 16 fr.

TABLE DES MATIÈRES

(FASCICULE III).

	Pages.
Comptes rendus des séances.....	133
[D 5 c] HADAMARD. — Sur le principe de Dirichlet.....	133
[L ¹ 16 e] DE MONTCHEUIL. — Les anticaustiques du paraboloïde hyperbolique équilatère.....	139
[L ¹ 17 d, K 14 g] FONTENÉ (G.). — Sur l'extension à l'espace du théorème des polygones de Poncelet par des polyèdres de genre un	153
[R 1 d a] RUDZKI (M.-P.). — Note sur la chute des corps pesants..	163
[D 4 a] PETROVITCH (M.). — Sur certaines transcendentes entières.	165 +
[L ¹ 14 a, M ¹ 5 h]. REMY (L.). — Sur quelques théorèmes de Géométrie plane liés à la surface de Kummer.....	177
[H 9 f] SANIKLEVICI. — Remarques sur certaines équations linéaires aux dérivées partielles.....	187
[Q b] COMBEBIAC. — Remarques sur la question des principes de l'Analysis situs.....	191

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6°).

FONTENÉ (H.), Agrégé des Sciences mathématiques, Professeur au Collège Rollin. — **L'Hyperespace à $(n-1)$ dimensions. Propriétés métriques de la corrélation générale.** Grand in-8, avec fig.; 1892. 5 fr.

PETROVITCH (M.), Professeur à l'Université de Belgrade. — **La Mécanique des phénomènes fondée sur les analogies.** In-8 écu (20 x 13) de 96 pages avec 114 figures; 1906. Cartonné..... 2 fr.

GOURSAT (Edouard), Professeur à la Faculté des Sciences de Paris. — **Cours d'Analyse mathématique.** 2 volumes grand in-8 (25 x 16) se vendant séparément.

TOME I: Dérivées et différentielles. Intégrales définies. Développements en séries. Applications géométriques. Volume de vi-620 pages, avec 52 figures; 1902..... 20 fr.

TOME II: Théorie des fonctions analytiques. Équations différentielles. Équations aux dérivées partielles. Éléments de calcul des variations. Volume de vi-640 pages, avec 95 figures; 1905..... 20 fr.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE

PUBLIÉ

PAR LES SECRÉTAIRES.

S'adresser, pour la rédaction, à M. RAFFY, rue Pierre-Nicole, 7, Paris, 5^e;
pour la distribution, à M. GRÉVY, rue Claude-Bernard, 71, Paris, 5^e.

TOME XXXIV. — FASCICULE IV.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
A LA SORBONNE.

1906

MM. les Membres de la Société sont priés d'adresser leur cotisation à M. *Claude-Lafontaine* banquier, rue de Trévise, n° 32, à Paris, Trésorier de la Société.

On s'abonne et l'on trouve les Volumes déjà publiés au siège de la Société et à la Librairie Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, Paris.

Les séances de la Société mathématique ont lieu les premier et troisième jeudis de chaque mois à 9 heures du soir.

Depuis le 1^{er} mars 1900 les séances de la Société ont lieu dans une salle de la Faculté des Sciences (entrée place de la Sorbonne, escalier tout au bout de la galerie, deuxième étage à droite).

Les Membres de la Société ont dû recevoir une carte, portant le timbre du Secrétariat, leur donnant accès à la Bibliothèque de l'Université, et fournissant à ce sujet les renseignements nécessaires: ceux qui ne l'auraient pas reçue sont priés d'en informer le Secrétariat.

La correspondance peut être adressée, soit à la Faculté des Sciences, place de la Sorbonne, soit au domicile de l'un des secrétaires, de préférence à M. Grévy, sauf ce qui concerne la rédaction du Bulletin, qui doit être adressé de préférence à M. Raffy.

AVIS.

Dans sa séance du 15 mars 1906, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé qu'à l'avenir tout Membre de la Société qui voudra compléter sa collection du *Bulletin* aura le droit personnel de le faire, une seule fois pour chacun des volumes publiés avant son admission, aux prix suivants :

- 3 francs le volume pour chacun des trente premiers tomes;
- 6 francs le volume pour chacun des tomes suivants, ce dernier prix devant être réduit à 4 francs pour les acheteurs de *dix volumes* au moins.

Dans sa séance du 28 février 1900, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé qu'à l'avenir tout Membre de la Société, auteur d'un travail *quelconque* inséré dans le Bulletin et désirant en obtenir des tirages à part, **devra en faire la demande en retournant l'épreuve corrigée.**

Si le nombre demandé ne dépasse pas *cinquante*, les frais du tirage à part seront faits par la Société.

Conformément à des décisions prises par le Conseil et par la Commission d'impression :

1^o Le *Bulletin*, depuis le Tome XXVII, paraît tous les trois mois;

2^o Les auteurs de tous les travaux destinés au *Bulletin* sont **instamment priés** d'inscrire en tête de leurs manuscrits la classification que leur assigne, d'après le sujet traité, l'*Index du Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*;

3^o Ils sont également invités à ne pas dépasser, autant que possible, la proportion de **une figure** pour quatre pages de texte imprimé.

SUR LA REPRÉSENTATION UNIFORME DES COURBES TRANSCENDANTES ;

Par M. GEORGES RÉMOUNDOS.

1. Il est bien connu que les coordonnées des points des courbes algébriques de genre *zéro* et *un* peuvent s'exprimer par des fonctions uniformes d'un paramètre, méromorphes dans tout le plan ; M. Picard a démontré qu'une telle représentation uniforme est impossible pour les courbes algébriques de genre supérieur à *un*, qui exigeraient des transcendentes uniformes d'une nature beaucoup plus compliquée avec des singularités essentielles formant un ensemble continu ou un ensemble parfait discontinu.

M. Poincaré a démontré qu'il est toujours possible de faire une représentation uniforme d'une fonction multiforme quelconque (*Bulletin de la Société mathématique*, t. XI). Son théorème consiste en ce que, étant donnée une telle fonction $u = \varphi(z)$, nous pouvons trouver une troisième variable t , telle que u et z puissent s'exprimer uniformément en fonction de t par les formules

$$(1) \quad u = H(t), \quad z = M(t).$$

Le problème de la possibilité de la représentation uniforme d'une équation quelconque

$$(2) \quad f(z, u) = 0$$

étant donc résolu par l'affirmative, la première question, qui se présente tout naturellement, concerne la nature et la complication des singularités des fonctions uniformes $H(t)$ et $M(t)$ qui constituent la représentation uniforme.

Il est, bien entendu, supposé que l'équation (2) définit une fonction $u = \varphi(z)$ analytique. En me plaçant dans le cas où cette équation est transcendante par rapport à l'une des deux variables z et u ou bien à toutes les deux, je me propose de signaler un résultat intéressant, qui découle de ceux que j'ai obtenus dans ma thèse (1) sur l'extension du théorème de M. Picard aux fonctions multiformes.

(1) *Sur les zéros d'une classe de fonctions transcendentes* [Thèse de doctorat de l'Université de Paris (Gauthier-Villars et *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*)].

2. Les fonctions $H(t)$ et $M(t)$ peuvent, *a priori*, présenter des singularités essentielles de toutes sortes. Si ces points sont isolés, autour de chacun d'eux il ne saurait y avoir plus de deux valeurs exceptionnelles, et cela d'après le théorème classique de M. Picard sur les valeurs d'une fonction uniforme dans le voisinage d'un point singulier essentiel isolé; il en résulte que, dans ce cas, le nombre des valeurs *exceptionnelles générales* ne sera jamais supérieur à deux. Une valeur u_0 sera dite *exceptionnelle générale* pour une fonction $u = \sigma(t)$, lorsque l'équation

$$u_0 = \sigma(t)$$

n'admet qu'un nombre fini de racines dans *tout le plan*.

Cette notion est nécessaire lorsqu'il s'agit d'une fonction qui présente plusieurs points singuliers essentiels.

Le cas, dans lequel les fonctions uniformes $H(t)$ et $M(t)$ ne présentent pas de points singuliers *isolés*, est celui qui nous intéresse surtout ici, parce que, dans ce cas, l'ensemble des valeurs exceptionnelles générales pourrait être quelconque (continu ou discontinu) pour une fonction uniforme arbitrairement prise; il pourrait former des lignes, des aires embrassant une partie ou la totalité du plan des u , etc.

L'étude de cet ensemble, dont la nature peut nous fournir des renseignements intéressants sur la nature des fonctions $H(t)$ et $M(t)$, qui constituent la représentation uniforme de la fonction multiforme $u = \varphi(t)$, fera l'objet des considérations que j'exposerai dans les paragraphes suivants.

J'ai déjà abordé cette question dans ma thèse (p. 49, Chap. III) et je me propose de compléter ici les remarques que j'y ai faites d'une façon très abrégée. Nous commençons par donner quelques définitions.

3. Nous dirons qu'une valeur u_0 de u est *exceptionnelle* dans le voisinage d'un ensemble (T) ⁽¹⁾ de points du plan t par rapport à une fonction $u = \sigma(t)$, lorsque l'équation

$$\sigma(t) = u_0$$

(¹) Les points de cet ensemble sont supposés singuliers essentiels.

n'admet qu'un nombre fini de racines à l'intérieur de tout contour C renfermant tous les points de l'ensemble (T) et aucun autre point singulier essentiel de la fonction $\sigma(t)$ étranger à l'ensemble (T) .

Cette définition n'est pas du tout vague dans le cas où l'ensemble (T) possède des points à l'infini et il n'est pas difficile de concevoir les aires ⁽¹⁾ qui renferment *tous* les points de (T) à l'exclusion de tout autre point singulier essentiel étranger à (T) . Le point du plan u correspondant à u_0 sera appelé aussi exceptionnel. Nous distinguons trois cas :

- α'. L'ensemble de ces points exceptionnels du plan u est ou bien fini ou bien dénombrable *isolé* (c'est-à-dire il n'est dense nulle part);
- β'. Le même ensemble est dense dans diverses portions du plan u , mais il n'embrasse pas tout le plan; ou bien il est parfait discontinu;
- γ'. L'ensemble est dense partout et embrasse tout le plan; c'est-à-dire son ensemble dérivé est formé de tous les points du plan.

Dans le premier cas, nous dirons que la fonction $\sigma(t)$ est indéterminée dans le voisinage de l'ensemble (T) avec une *indétermination complète*. Dans le deuxième cas, nous dirons qu'il y a une *indétermination incomplète*. Dans le troisième cas, le degré de l'indétermination est un peu vague et il est difficile de la caractériser d'une façon sommaire, puisqu'il peut se présenter des circonstances diverses pour l'ensemble des valeurs exceptionnelles, qui peut être dénombrable aussi bien que continu. A ce cas se ramène le cas de la non-indétermination, où l'ensemble des valeurs u_0 pour lesquelles l'équation

$$u_0 = \sigma(z)$$

admet un nombre fini de branches dans le voisinage de l'ensemble T (c'est-à-dire dans une portion du plan telle que nous l'avons spécifiée plus haut), ne contient aucun élément.

(1) On évitera ici d'employer le mot *contour*. (Voir la remarque du n° 6.)

Dans cette définition, nous supposons, bien entendu, qu'il s'agit des ensembles que nous pouvons isoler des autres points singuliers; autrement, la définition n'aurait pas de sens.

M. Painlevé a déjà employé des dénominations pareilles dans une étude sur l'indétermination d'une fonction multiforme dans le voisinage d'un point singulier essentiel. [Voir : *Sur les singularités des fonctions analytiques et, en particulier, des fonctions définies par les équations différentielles* (Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris, 1900). Le lecteur pourra aussi lire avec profit la thèse de M. Painlevé : *Sur les lignes singulières des fonctions analytiques*, Gauthier-Villars, 1887.]

Le cas le plus intéressant pour le but que nous poursuivons est celui où l'ensemble (T) est continu, parce qu'il est très probable que les fonctions uniformes ne peuvent présenter qu'une indétermination complète dans le voisinage d'un point appartenant à un ensemble parfait discontinu. C'est ce que M. Zoretti a essayé de démontrer dans sa remarquable thèse (Gauthier-Villars et *Journal de M. Jordan*, 1905). La chose reste encore douteuse.

4. Cela posé, supposons d'abord que l'équation (2) soit algébrique (polynome) en u de degré n et *transcendante* entière en z et remarquons que toute valeur exceptionnelle générale de la fonction $u = H(t)$ sera aussi exceptionnelle pour la fonction multiforme $u = \varphi(z)$ (voir ma thèse, *loc. cit.*), qui n'a qu'un nombre fini de branches. Or, je démontre dans ma thèse que cette dernière fonction ne saurait jamais avoir plus de $2n$ valeurs exceptionnelles, l'infini compris; il en sera donc de même des valeurs exceptionnelles générales de $u = H(t)$.

Supposons encore que $u = H(t)$ admette des ensembles continus singuliers (points isolés, lignes, aires) essentiels $T_1, T_2, \dots, T_m, \dots$ et appelons $U_1, U_2, \dots, U_m, \dots$ les ensembles de points exceptionnels du plan u correspondant respectivement au voisinage des $T_1, T_2, \dots, T_m, \dots$; on a le théorème suivant :

I. *L'ensemble des points communs aux ensembles $U_1, U_2, \dots, U_m, \dots$ est fini et le nombre de ses éléments ne saurait dépasser $2n$.*

Le cas nouveau est celui où tous les ensembles T_i sont continus *proprement dits*, c'est-à-dire lorsqu'il n'y a pas de points singu-

liers essentiels isolés; dans le cas contraire, le théorème était évident. Nous en déduisons le corollaire suivant :

COROLLAIRE. — *Si les singularités essentielles de la fonction $u = H(t)$ ne forment qu'un ensemble continu ⁽¹⁾ T (une ligne ou une aire), dans le voisinage de cet ensemble il y aura une indétermination complète de la fonction $u = H(t)$, le nombre des valeurs exceptionnelles étant au plus égal à $2n$. Nous ne pouvons pas en dire autant pour la fonction $z = M(t)$.*

Passons maintenant au cas où $f(z, u)$ désigne une fonction transcendante entière par rapport aux variables z et u , toutes les deux, et rappelons-nous le théorème général établi dans ma thèse (p. 43) et énoncé comme il suit :

Les ensembles (E) et (ϵ) des valeurs exceptionnelles de la fonction multiforme $u = \varphi(z)$ et de son inverse $z = \Psi(u)$ sont ou bien finis ou bien dénombrables avec un seul point limite à l'infini (par conséquent isolés, pas denses).

Faisons sur la fonction $z = M(t)$ la même hypothèse que sur $u = H(t)$ et appelons $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \dots, \Sigma_i, \dots$ les ensembles continus ou points isolés de singularités essentielles de la fonction $z = M(t)$ et $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_i, \dots$ les ensembles de points exceptionnels du plan z correspondant respectivement aux voisinages des $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \dots, \Sigma_i, \dots$

La remarque que les ensembles U_i font partie de l'ensemble (E) et les ensembles Z_i font partie de (ϵ) nous conduit au théorème suivant :

II. *Les points communs des ensembles U_i forment un ensemble ou bien fini ou bien dénombrable isolé avec un point limite à l'infini. Il en est de même des ensembles Z_i , ce qui distingue essentiellement ce cas du cas précédent, où $f(z, u)$ était un polynôme par rapport à u .*

COROLLAIRE. — *Si les singularités essentielles des fonctions $H(t)$ et $M(t)$ ne forment qu'un ensemble continu (une ligne*

(¹) Je m'attache ici surtout au cas où l'ensemble (T) est continu. Cette restriction n'a pas du tout des motifs essentiels, puisque ces résultats s'étendent d'eux-mêmes à tous les ensembles non isolés.

ou une aire), dans le voisinage de cet ensemble il y aura une indétermination complète des fonctions $H(t)$ ou $M(t)$. Ceci s'annoncerait encore sous la forme suivante :

« Il est impossible de satisfaire à l'équation $f(z, u) = 0$, $f(z, u)$ désignant une transcendante entière par rapport à z et u , par des fonctions uniformes $u = H(t)$ et $z = M(t)$ ayant un ensemble continu *unique* de singularités essentielles d'une indétermination incomplète. Il en sera de même lorsqu'il n'y aura aucune indétermination dans le voisinage de cet ensemble. »

§. Les considérations précédentes nous fournissent des renseignements sur les valeurs des fonctions $H(t)$ et $M(t)$ dans le voisinage d'une ligne singulière ou d'une aire singulière, prises dans leur ensemble. Mais il serait intéressant de savoir ce qui peut se passer dans le voisinage d'un point quelconque de l'ensemble continu de singularités.

Pour fixer les idées, supposons que la fonction $H(t)$ admette une ligne singulière essentielle (L) et n'ait aucun point essentiel en dehors de cette ligne. D'après le dernier corollaire, il y aura une indétermination complète dans le voisinage de la ligne, prise dans son ensemble; mais, si nous considérons un point quelconque de la ligne dans son voisinage (c'est-à-dire à l'intérieur d'un cercle arbitrairement petit décrit de ce point comme centre), il peut bien y avoir une indétermination incomplète ou bien la fonction pourra y être déterminée.

Nous pouvons compléter les résultats de ce travail par la remarque suivante :

Il y aura indétermination non seulement le long de toute la ligne (L), mais encore dans le voisinage de segments de la ligne arbitrairement petits (aussi petits que l'on voudra).

En effet, nous pouvons toujours diviser la ligne (L) en une infinité dénombrable ⁽¹⁾ de segments de longueur égale à ϵ , ϵ étant arbitrairement petit. S'il n'y avait pas d'indétermination dans le voisinage d'aucun de ces segments, l'ensemble des valeurs exceptionnelles dans chacun de ces voisinages embrassant tout le plan

⁽¹⁾ Ou bien en un nombre fini de segments.

des u , sauf un ensemble dénombrable de points isolés, il en serait de même pour le voisinage de toute la ligne (L).

Pour nous en rendre compte, appelons $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n, \dots$ les divers segments et $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots$ les ensembles de valeurs non exceptionnelles correspondant respectivement au voisinage de ces segments.

Il est clair que, si l'on exclut du plan des u l'ensemble

$$s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n + \dots,$$

qui est dénombrable ou fini, la partie restante du plan serait tout exceptionnelle le long de la ligne (L). Ainsi la fonction $H(t)$ admettrait le long de la ligne entière (L) un ensemble continu de valeurs exceptionnelles, ce qui serait absurde d'après le corollaire du paragraphe 4.

Les raisonnements employés pour cette démonstration reposent sur la proposition suivante :

Pour qu'une valeur u_0 ne soit pas exceptionnelle le long de toute la ligne (L), il suffit qu'elle ne le soit pas pour un des segments l_i .

Cette condition n'est évidemment pas nécessaire.

6. Je termine ce travail par une petite remarque au sujet de la définition donnée au commencement du paragraphe 3.

Pour éviter le mot *contour*, qui entraînerait une certaine ambiguïté, surtout dans le cas où l'ensemble (T) contient des points à l'infini, nous pouvons procéder comme suit :

La valeur u_0 sera dite *exceptionnelle* dans le voisinage de l'ensemble T, lorsque l'équation

$$u_0 = \sigma(t)$$

n'admet qu'un nombre fini de racines dans une portion du plan t quelconque, contenant ⁽¹⁾ tous les points de l'ensemble (T) et aucun autre point singulier essentiel de la fonction $\sigma(t)$.

Weierstrass et M. Freedholm ⁽²⁾ ont formé des séries repré-

⁽¹⁾ En d'autres termes, les points de l'ensemble (T) appartiennent à cette portion du plan, tandis que les autres points singuliers essentiels n'en font pas partie.

⁽²⁾ Voir : *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 24 mars 1890 et *Traité d'Analyse* de M. Picard, t. II, p. 70-71.

sentant des fonctions qui ne peuvent pas être étendues analytiquement au delà du cercle de convergence et *convergentes* sur la circonférence de ce cercle, qui est, par conséquent, une ligne singulière essentielle pour ces fonctions. Il est clair qu'elles ne présentent aucune indétermination ni dans le voisinage d'un arc de la circonférence arbitrairement petit, ni le long de toute la circonférence. *Il est donc impossible, d'après les résultats exposés dans ce travail, qu'elles se prêtent à la représentation uniforme d'une fonction multiforme rentrant dans la classe étudiée ici.*

Il est remarquable que ces résultats soient dus à la transcendance de l'équation (2) par rapport à l'une, au moins, des variables z et u ; nous avons ainsi une spécification des fonctions de la représentation uniforme d'une équation transcendante (2) sans en avoir aucune pour les équations algébriques de genre supérieur à un .

7. En corrigeant les épreuves, j'ajoute la remarque suivante : Le théorème du paragraphe 5 entraîne ce fait intéressant qu'il y aura un point, au moins, de la ligne qui sera point d'*indétermination*, au sens classique du mot; c'est-à-dire que l'ensemble des valeurs, non exceptionnelles dans un cercle arbitrairement petit entourant ce point, ne sera pas *dénombrable isolé*. En effet, l'existence d'un segment d'indétermination de longueur ϵ entraînera celle d'un autre segment d'indétermination compris dans le premier et de longueur $\epsilon_1 < \epsilon$ et ainsi de suite; nous aurons une suite indéfinie de segments de longueurs $\epsilon, \epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n, \dots$, tendant vers zéro et dont chacun fait partie du précédent; il est clair que ces segments tendront vers un point limite, dans le voisinage duquel l'indétermination sera certaine. Pour s'en rendre compte, il n'y a qu'à remarquer que, si l'équation

$$u_0 = H(t)$$

admet un nombre *fini* de racines à l'intérieur d'un cercle entourant ce point $t = t_0$, il en sera de même de tout autre cercle faisant partie du premier.

Nous avons donc le théorème suivant :

Si les singularités essentielles des fonctions $H(t)$ et $M(t)$ forment une ligne singulière ou un ensemble fini de lignes singulières, il y aura toujours, au moins, un point d'indétermination.

**SUR LES POLYNOMES A COEFFICIENTS ET A VARIABLE
HYPERCOMPLEXES;**

Par M. LÉON AUTONNE.

I.

Dans une Communication récente (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 28 mai 1906), intitulée : *Sur les propriétés qui, pour les fonctions d'une variable hypercomplexe, correspondent à la monogénéité*, j'ai énoncé diverses propositions relatives aux variables et aux fonctions hypercomplexes. La théorie détaillée, avec les démonstrations, est donnée dans un Mémoire, de même titre que la Communication, qui doit paraître dans le *Journal de Mathématiques*, de M. Jordan.

Je me sers notamment de la terminologie et des notations de M. Frobenius, telles que l'éminent algébriste les donne dans sa *Theorie der hyperkomplexen Grössen* (*Sitzungsberichte de l'Académie de Berlin*, pour avril 1903).

La théorie générale conduit, en ce qui concerne les polynomes à coefficients et à variables hypercomplexes, à diverses propositions, que je développe ci-après.

Rappelons d'abord les théorèmes sur lesquels on s'appuiera. Pour les démonstrations, on renverra aux publications précitées.

II.

1°. Prenons un groupe *simple* (ϵ) d'ordre $n = r^2$. Une quantité hypercomplexe x de (ϵ) est

$$(1) \quad x = \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} x_{\alpha} \quad \} \alpha = 1, 2, \dots, n \}$$

où les n coordonnées x_{α} de x sont des nombres scalaires (c'est-à-dire réels ou complexes, ordinaires). Les n symboles ϵ_{α} ont une multiplication (associative, mais non commutative) définie par la formule $\} \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, n \}$

$$(2) \quad \epsilon_{\beta} \epsilon_{\gamma} = \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} a_{\alpha\beta\gamma},$$

où les $\alpha_{\alpha\beta\gamma}$ sont n^3 constantes scalaires. Si, pour $x = \Sigma \varepsilon x$, $y = \Sigma \varepsilon y$, $z = \Sigma \varepsilon z$, on a, dans le groupe (ε) , $x = yz$, il viendra, eu égard à (2),

$$\sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} x_{\alpha} = \left(\sum_{\beta} \varepsilon_{\beta} y_{\beta} \right) \left(\sum_{\gamma} \varepsilon_{\gamma} z_{\gamma} \right) = \sum_{\beta\gamma} \varepsilon_{\beta} \varepsilon_{\gamma} y_{\beta} z_{\gamma} = \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} \sum_{\beta\gamma} \alpha_{\alpha\beta\gamma} y_{\beta} z_{\gamma}$$

d'où la formule fondamentale

$$(3) \quad x_{\alpha} = \sum_{\beta\gamma} \alpha_{\alpha\beta\gamma} y_{\beta} z_{\gamma}.$$

2°. Au lieu des x_{α} et ε_{α} on peut introduire des coordonnées $x_{\lambda\mu}$ et des symboles $\varepsilon_{\lambda\mu}$ à double indice ($\lambda, \mu = 1, 2, \dots, r$; $r^2 = n$), tels que les formules (2) deviennent

$$(4) \quad \varepsilon_{\lambda\mu} \varepsilon_{\rho\nu} = 0, \quad \text{pour} \quad \mu \neq \rho, \quad \varepsilon_{\lambda\mu} \varepsilon_{\mu\nu} = \varepsilon_{\lambda\nu}$$

Le groupe (ε) est isomorphe sans hémiedrie aux groupes des matrices r -aires

$$(x) = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{r1} & \dots & x_{rr} \end{pmatrix};$$

si $x = yz$, on a $(x) = (y)(z)$, et, réciproquement,

$$(5) \quad x_{\lambda\mu} = \sum_{\rho} y_{\lambda\rho} z_{\rho\mu}, \quad \lambda, \mu, \rho = 1, 2, \dots, r.$$

Les coordonnées à double indice $x_{\lambda\mu}$ seront dites *spéciales*; elles sont d'ailleurs liées aux x_{α} par des relations

$$\sum_{\alpha} b_{\alpha\lambda\mu} x_{\alpha} = x_{\lambda\mu}, \quad b_{\alpha\lambda\mu} = \text{const. scalaire}, \\ \alpha = 1, 2, \dots, n; \quad \lambda, \mu = 1, 2, \dots, r.$$

3°. Avec les n variables scalaires x_{α} formons la *variable hypercomplexe*

$$(6) \quad x = \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} x_{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n.$$

L'expression

$$(7) \quad X = \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} X_{\alpha}(x_1, \dots, x_n)$$

sera dite *fonction* de la variable hypercomplexe x .

Avec M. Frobenius, je désignerai par

$f(x)$, une fonction scalaire des n variables scalaires x_α ,

$f((x))$, une fonction de la variable hypercomplexe x .

En coordonnées spéciales (2^0), il viendra $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, \dots, r$;
 $n = r^2$;

$$(8) \quad x = \sum_{\beta\gamma} \varepsilon_{\beta\gamma} x_{\beta\gamma}, \quad X = \sum_{\alpha\delta} \varepsilon_{\alpha\delta} X_{\alpha\delta}(x).$$

4°. Posons $x_{\beta\gamma} = z_{\gamma\beta}$; prenons les $n^2 = r^4$ dérivées partielles

$$\frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial z_{\gamma\beta}},$$

rangeons-les suivant les lignes d'indices $\alpha\delta$ et les colonnes d'indices $\gamma\beta$. On aura la matrice jacobienne des X par rapport aux z .
 Nommons-la H .

Disposons les $\alpha\delta$ et les $\gamma\beta$ suivant la suite

$$11, 12, \dots, 1r; 21, 22, \dots, 2r; r1, r2, \dots, rr.$$

Les r valeurs des α décomposent H en r bandes horizontales, de r lignes chacune. Les r valeurs de γ définissent de même r bandes verticales de r colonnes chacune. H est ainsi décomposée en r^2 matrices partielles $\theta_{\alpha\gamma}$, suivant le schema

$$H = \begin{pmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} & \dots & \theta_{1r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \theta_{r1} & \theta_{r2} & \dots & \theta_{rr} \end{pmatrix} = \{ \theta_{\alpha\gamma} \};$$

la dérivée partielle $\frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial z_{\gamma\beta}}$ est, dans la matrice $\theta_{\alpha\gamma}$, l'élément de ligne δ et de colonne β .

5°. J'introduis maintenant la matrice n -aire $W = \{ \theta'_{\alpha\gamma} \}$, laquelle diffère de H par la *transposition* de chaque matrice partielle $\theta_{\alpha\gamma}$, c'est-à-dire par l'*échange* des deux indices β et δ . Si l'on pose

$$w_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial z_{\gamma\beta}},$$

les $n^2 = r^4$ éléments $w_{\alpha\beta\gamma\delta}$ de la matrice W sont disposés suivant les lignes $\alpha\beta$ et les colonnes $\gamma\delta$.

H et W se définissent ainsi réciproquement d'une façon complète.

Quand on ne prend plus de coordonnées spéciales, H et W se définissent encore mutuellement sans ambiguïté. $\omega_{\lambda\mu}$ étant dans W l'élément de ligne λ et de colonne μ , $\{\lambda, \mu = 1, 2, \dots, n\}$, on a $\{\rho, \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n\}$.

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_\beta} = \sum_{\lambda\mu} \omega_{\lambda\mu} [\alpha\beta]_{\lambda\mu}, \\ [\alpha\beta]_{\lambda\mu} = \sum_{\rho} \alpha_{\alpha\lambda\rho} \alpha_{\rho\beta\mu}. \end{cases}$$

les α étant les constantes scalaires des formules (2).

On remarque aussi que

$$(10) \quad \varepsilon_{\lambda}\varepsilon_{\beta}\varepsilon_{\mu} = \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} [\alpha\beta]_{\lambda\mu}.$$

6°. Je n'insisterai pas sur les propriétés, assez remarquables, de la matrice W. On les trouvera dans mes publications précitées. Je passe de suite au problème, objet de la présente Note.

III.

7°. Je désigne (3°) par :

$P_m(x)$, un polynome de degré m , à coefficients scalaires et aux n variables scalaires $x_1, \dots, x_n$;

$p_m(x)$, un polynome $P_m(x)$ homogène.

L'expression

$$A_m((x)) = a_0 x a_1 x \dots a_{m-1} x a_m,$$

aux $m+1$ coefficients hypercomplexes $a_0, \dots, a_m$, est dite un monome en x de degré m .

Une somme de monomes, de degrés $m' \leq m$, sera un polynome $\mathcal{Q}_m((x))$. Si tous les monomes ont le même degré m , $\mathcal{Q}_m((x))$ deviendra homogène et s'écrira

$$\mathfrak{P}_m((x)).$$

On a évidemment, pour coordonnées de la quantité hyper-complexe $\mathfrak{P}_m((x))$, des expressions $p_m(x)$ ci-dessus. La quantité $\mathcal{Q}_m(x)$ aura pour coordonnées des expressions $P_m(x)$.

8°. Voici maintenant la question que je vais résoudre dans la présente Note :

Réciproquement à ce qui précède, une expression hyper-complexe X , dont les coordonnées sont des $P_m(x)$, est-elle toujours un polynome $\mathfrak{P}_m((x))$?

On démontrera que la réponse est : *oui, et d'une infinité de façons.*

9°. Soit donc

$$(11) \quad X = \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} m X_{\alpha}(x),$$

où les $X_{\alpha}(x)$ sont des $P_m(x)$ (7°). Comme un polynome quelconque est toujours une somme de polynomes homogènes, il suffira, pour la démonstration du théorème, de supposer que les $X_{\alpha}(x)$ sont des $p_m(x)$ (7°). On a à chercher si X peut être effectivement un $\mathfrak{P}_m((x))$ (7°).

10° Le théorème d'Euler donne $\{\alpha, \beta, \lambda, \mu, \rho, \tau = 1, 2, \dots, n\}$, eu égard aux formules (9) et (10),

$$(12) \quad X = \sum_{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha} x_{\beta} \frac{\partial X_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} = \sum_{\alpha\beta\lambda\mu} \epsilon_{\alpha} x_{\beta} \omega_{\lambda\mu} [\alpha\beta]_{\lambda\mu} = \sum_{\beta\lambda\mu} \epsilon_{\lambda} \epsilon_{\beta} \epsilon_{\mu} x_{\beta} \omega_{\lambda\mu}.$$

Décomposons la matrice n -aire $W \equiv [\omega_{\lambda\mu}]$ en un produit de deux matrices n -aires, $W = UV'$,

$$(13) \quad U = [u_{\lambda\tau}], \quad V = [v_{\mu\tau}], \quad V' = [v_{\tau\mu}], \quad W = UV' = \left[\sum_{\tau} u_{\lambda\tau} v_{\tau\mu} \right].$$

La formule (12) donne

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} X &= \sum_{\beta\lambda\mu\tau} \epsilon_{\lambda} \epsilon_{\beta} \epsilon_{\mu} x_{\beta} u_{\lambda\tau} v_{\tau\mu} \\ &= \sum_{\tau} \left(\sum_{\lambda} \epsilon_{\lambda} u_{\lambda\tau} \right) \left(\sum_{\beta} \epsilon_{\beta} x_{\beta} \right) \left(\sum_{\mu} \epsilon_{\mu} v_{\tau\mu} \right) = \sum_{\tau} u_{\tau} x v_{\tau}, \end{aligned} \right.$$

en désignant par u_{τ} et v_{τ} les quantités hypercomplexes.

$$(15) \quad u_{\tau} = \sum_{\lambda} \epsilon_{\lambda} u_{\lambda\tau}, \quad v_{\tau} = \sum_{\mu} \epsilon_{\lambda} v_{\mu\tau}.$$

11°. Prenons pour V une matrice quelconque, mais à déterminant $|V| \neq 0$ et à éléments $v_{\mu\tau}$ scalaires et constants; alors

$$(16) \quad U = WV'^{-1}.$$

Les coefficients $w_{\lambda\mu}$ de W sont des polynômes $p_{m-1}(x)$; la formule (16) montre qu'il en est de même pour les $u_{\lambda\tau}$. Chacune des n quantités hypercomplexes u_{τ} est donc de même nature que X , mais le degré m a diminué d'une unité. On pourra donc écrire

$$u_{\tau} = \sum_{\tau_1} u_{\tau_1} x v_{\tau_1} \quad \} \tau_1 = 1, 2, \dots, n \}$$

On donnera encore aux coordonnées de v_{τ_1} des valeurs constantes; les coordonnées de u_{τ_1} seront alors des polynômes homogènes $p_{m-2}(x)$ et ainsi de suite.

Tout compte fait, on pourra écrire finalement

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = \sum_{\tau_1 \dots \tau_m} a_{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_m} \prod_i (x v_{\tau_i}) \\ \} i = 1, 2, \dots, m; \quad \tau_i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right.$$

où les n quantités hypercomplexes v_{τ_i} ont pour coordonnées n^2 constantes scalaires arbitraires, à déterminant $\neq 0$.

$$a_{\tau_1 \dots \tau_m} = \text{const. hypercomplexe.}$$

12°. La formule (17) montre que X est la somme de n^m monomes

$$a_{\tau_1 \dots \tau_m} ((x)) \quad (7^a)$$

c'est-à-dire que X est un polynome

$$p_m((x)),$$

où les quantités v_{τ_i} peuvent être choisies d'une infinité de façons. C'est ce qui est annoncé au 8°.

13°. La formule (17) peut être simplifiée. Nommons E la matrice n -aire unité. On peut faire, au calcul du 11°,

$$V = V' = E, \quad v_{\mu\tau} = 0, \quad v_{\tau\tau} = 1;$$

d'où

$$v_{\tau} = z_{\tau}, \quad X = \sum_{\tau} u_{\tau} x z_{\tau}$$

et ainsi de suite.

Alors (17) devient

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = \mathfrak{P}_m((x)) = \sum_{\tau_1 \dots \tau_i \dots \tau_m} a_{\tau_1 \dots \tau_i \dots \tau_m} x^{\varepsilon_{\tau_1}} x^{\varepsilon_{\tau_2}} \dots x^{\varepsilon_{\tau_i}} \dots x^{\varepsilon_{\tau_m}} \\ \tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_m = 1, 2, \dots, n \end{array} \right.$$

14°. Les coordonnées de l'hypercomplexe X sont des polynomes $p_m(x)$ à coefficients scalaires b et à variables scalaires $x_1, \dots, x_n$. Il est facile d'établir des relations mutuelles entre les constantes scalaires b et les constantes hypercomplexes a des formules (17) et (18). Le calcul est plus court quand on emploie les coordonnées spéciales (2°) $x_{\xi\eta}$, $\{\xi, \eta = 1, 2, \dots, r; n = r^2\}$ et les symboles à double indice $\varepsilon_{\xi\eta} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$, de façon que

$$x = \sum_{\xi\eta} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} x_{\xi\eta} \text{ [et analogue de la formule (4)] ;}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ \nu \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \nu \end{pmatrix}.$$

15°. Dans la formule (18) faisons

$$\varepsilon_{\tau_i} = \varepsilon_{\lambda_i} \mu_i = \begin{pmatrix} \lambda_i \\ \mu_i \end{pmatrix}; \quad x = \sum_{\xi_i \eta_i} x_{\xi_i \eta_i} \begin{pmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{pmatrix} = \dots = \sum_{\xi_i \eta_i} x_{\xi_i \eta_i} \begin{pmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{pmatrix} = \dots$$

Désignons le coefficient $a_{\tau_1 \dots \tau_m}$ par

$$a \begin{pmatrix} \lambda_1 \dots \lambda_i \dots \lambda_m \\ \mu_1 \dots \mu_i \dots \mu_m \end{pmatrix};$$

mettons en évidence les coordonnées scalaires de l'hypercomplexe a , en écrivant

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} a \begin{pmatrix} \lambda_1 \dots \lambda_m \\ \mu_1 \dots \mu_m \end{pmatrix} = \sum_{\alpha\beta} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} a \begin{pmatrix} \lambda_1 \dots \lambda_m \\ \mu_1 \dots \mu_m \mid \beta \end{pmatrix}, \\ \alpha, \beta, \lambda_i, \mu_i, \xi_i, \eta_i = 1, 2, \dots, r; \quad n = r^2 \end{array} \right.$$

La formule (18) devient

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{P}_m((x)) = \sum_{\xi_i \eta_i \dots \xi_m \eta_m} x_{\xi_i \eta_i} \dots x_{\xi_m \eta_m} a \begin{pmatrix} \lambda_1 \dots \lambda_m \\ \mu_1 \dots \mu_m \mid \beta \end{pmatrix} \\ \Omega = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_i \\ \mu_i \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} \xi_m \\ \eta_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_m \\ \mu_m \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

que

$$\eta_1 = \lambda_1, \dots, \eta_m = \lambda_m, \\ \xi_1 = \xi_2, \dots, \xi_{m-1} = \xi_m,$$

$$\mu_1 = \xi_2, \dots, \mu_{m-1} = \xi_m, \quad \tau_i = \lambda_i.$$

La formule (20) devient

$$\sum \binom{\alpha}{\eta_m} x_{\xi_1 \eta_1} \dots x_{\xi_m \eta_m} a \left(\begin{matrix} \eta_1 \dots \eta_{m-1} \eta_m \\ \xi_2 \dots \xi_m \quad \mu_m \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \alpha \\ \xi_1 \end{matrix} \right).$$

Autre part

$$X = \mathfrak{P}_m((x)) = \sum_{\alpha \eta_m} \binom{\alpha}{\eta_m} X_{\alpha \eta_m}(x; b),$$

ce qui donne l'identification des deux expressions, de $\mathfrak{P}_m((x))$:
a. b. dans $X_{\alpha \eta_m}$, du produit

$$\Xi = x_{\xi_1 \eta_1} \dots x_{\xi_m \eta_m}$$

comme des constantes scalaires

$$a \left(\begin{matrix} \eta_1 \dots \eta_{m-1} \eta_m \\ \xi_2 \dots \xi_m \quad \mu_m \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \alpha \\ \xi_1 \end{matrix} \right),$$

valables à toutes les combinaisons des indices ξ et η qui donnent
 le même produit Ξ .

Il est évident qu'on peut annuler identiquement le polynôme
 $\mathfrak{P}_m((x))$ sans avoir besoin d'égaliser à zéro chacun des coefficients
 hypercomplexes a .

(16). Toutes les présentes recherches se résument dans une proposition finale unique :

THÉORÈME. — *Pour qu'une quantité X hypercomplexe soit, par rapport à la variable hypercomplexe x , un polynôme de degré m , à coefficients hypercomplexes,*

il faut et il suffit que :

les coordonnées de X soient, par rapport aux coordonnées de x , des polynômes de degré m , à coefficients scalaires.

**SUR LES NOMBRES TRANSCENDANTS DONT LE DÉVELOPPEMENT
EN FRACTION CONTINUE EST QUASI-PÉRIODIQUE ⁽¹⁾,
ET SUR LES NOMBRES DE LIOUVILLE;**

Par M. EDMOND MAILLET.

I.

Je me propose ici de montrer que les racines positives des équations du deuxième degré, dont les coefficients sont des polynômes à coefficients entiers formés avec un nombre transcendant $I > 0$ de Liouville, sont, dans des cas étendus, des fractions continues quasi-périodiques. Il en est toujours ainsi quand l'ordre du développement en fraction continue de ce nombre de Liouville est assez grand ⁽²⁾. I étant un de ces derniers nombres et positif, on peut le choisir de façon que $\sqrt{I}$ soit d'ordre au plus égal à $(2, 0)$ dans la première classification des fractions continues, et $(1, 1)$ dans la deuxième.

J'indique aussi : 1° des résultats relatifs à la représentation q -imale des nombres de Liouville dans le système de numération de base q entière; 2° l'impossibilité que e soit racine d'une équation dont les coefficients sont des polynômes en I à coefficients entiers, I étant un nombre de Liouville d'ordre assez grand; 3° des cas où a^I (a entier) et I^I sont transcendants.

II.

Soit I un nombre de Liouville réel positif, $I_m = P_m Q_m^{-1}$ sa $m^{\text{ième}}$ réduite. On peut écrire

$$(1) \quad |I - I_m| = Q_m^{-\varphi_m}, \quad \varphi_m > 2;$$

par définition, I est tel que φ_m est aussi grand qu'on veut pour

⁽¹⁾ Je suis obligé de renvoyer à mon *Introduction à la théorie des nombres transcendants et des propriétés arithmétiques des fonctions* (Paris, Gauthier-Villars; 1906) que je désignerai dans ce qui suit par la notation : *Introd. transc.* Toutefois, on n'a pas absolument besoin de s'y reporter pour le théorème I.

⁽²⁾ Ceci me donne une occasion d'esquisser une classification des suites de quantités d'ordre infini (*Introd. transc.*, Chap. I, p. 10)

une infinité de valeurs de m . Je considère une de ces valeurs; soit $\varepsilon_m = \sqrt{I} - \sqrt{I_m}$; on a, pour m assez grand,

$$|\varepsilon_m| = \frac{|I - I_m|}{\sqrt{I} + \sqrt{I_m}} < (\sqrt{I})^{-1} |I - I_m| < \mu Q_m^{-2m}, \quad \mu \text{ constante.}$$

Je suppose que I_m ne soit pas un carré (on sait qu'il existe une infinité de nombres de Liouville I jouissant de cette propriété; voir *Introd. transc.*, note II, et *Comptes rendus*, 2 juillet 1906, p. 27). On a

$$\sqrt{I_m} = \sqrt{P_m Q_m} \cdot Q_m^{-1} = \sqrt{\Lambda_m} \cdot Q_m^{-1}, \quad \Lambda_m = P_m Q_m,$$

où Λ_m n'est pas un carré. On sait ⁽¹⁾ que, si le développement en fraction continue de $\sqrt{I_m}$ est

$$Q_m^{-1} \sqrt{\Lambda_m} = a_0 + 1 : a_1 + 1 : a_2 + \dots,$$

cette fraction continue est périodique, $a_n < 2\sqrt{\Lambda_m} < \lambda Q_m$ et la période a au plus $2\Lambda_m < \lambda_1 Q_m^2$ termes, λ et λ_1 étant des constantes; le premier terme périodique est a_0 ou a_1 ; un des termes de la période est ≥ 2 , sans quoi il faudrait $\sqrt{I_m} - a_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, comme on le voit de suite.

Soit $i_n = p_n q_n^{-1}$ la $n^{\text{ième}}$ réduite de $\sqrt{I_m}$; on a, d'après une propriété connue [Serret, ou *Introd. transc.*, Chap. I, form. (13)].

$$|\sqrt{I_m} - i_n| < q_n^{-1} q_{n+1}^{-1}$$

et

$$|\sqrt{I} - i_n| < q_n^{-1} q_{n+1}^{-1} + \mu Q_m^{-2m} < (2q_n^2)^{-1},$$

si, comme on le vérifie facilement,

$$\frac{q_{n-1}}{6} q_n^{-2} > \mu Q_m^{-2m}, \quad a_{n+1} \geq 2,$$

Il suffit alors pour cela, m étant assez grand,

$$(2) \quad q_n^2 < Q_m^{2m},$$

condition que je suppose avoir lieu; par suite (Serret, p. 19, ou *Introd. transc.*, Chap. I, p. 5) i_n et, bien entendu, i_{n-1} , i_{n-2} , ...

(¹) SERRET, *Algèbre supérieure*, 5^e édition, t. I, p. 45 à 55. Paris, Gauthier-Villars; 1885.

sont des réduites de $\sqrt{I}$. Mais

$$q_n < 2^{n+1} a_0 a_1 \dots a_n < 2^{n+1} (2 \sqrt{A_m})^{n+1} < (2 \lambda Q_m)^{n+1};$$

(2) aura lieu *a fortiori* si l'on a

$$(3) \quad (2 \lambda Q_m)^{2n+2} < Q_m^{2n} < Q_m^{2m}, \quad 4n < \varphi_m.$$

Soit n' la plus grande valeur de n satisfaisant à la dernière inégalité; $n' A_m^{-1}$ et φ_m étant supposés assez grands, je considère les $E \left(\frac{n'}{2 A_m} \right)$ premières périodes de $\sqrt{I_m}$; la dernière d'entre elles contient un quotient $a_{n+1} \geq 2$, pour lequel n satisfait à (3) et i_n est réduite de $\sqrt{I}$; $\sqrt{I}$ a au moins en commun avec $\sqrt{I_m}$ les quotients $a_0, a_1, \dots, a_n$ et les

$$E \left(\frac{n'}{2 A_m} \right) - 1 \geq \frac{n'}{2 A_m} - 2$$

premières périodes de $\sqrt{I_m}$. Or

$$4n' + 4 \geq \varphi_m, \quad n' \geq \frac{\varphi_m - 4}{4}, \quad \frac{n'}{2 A_m} - 2 \geq \frac{\varphi_m - 4}{4 \lambda_1 Q_m^2} - 2.$$

Il suffira que l'on ait, pour une infinité de valeurs de m ,

$$(4) \quad \varphi_m \geq \alpha_m Q_m^2,$$

où α_m est une fonction positive croissante de m , pour que $\sqrt{I}$ présente, dans son développement en fraction continue, une infinité de suites $s_1, s_2, \dots, s_p, \dots$ formées chacune par la répétition, un nombre k_p de fois pour s_p , d'une même période de quotients incomplets, k_p croissant indéfiniment avec p . Ces fractions continues peuvent encore être appelées *quasi-périodiques* ⁽¹⁾; s_p présente évidemment un caractère spécial, puisqu'il contient $s_1, s_2, \dots, s_{p-1}$. Donc :

THÉORÈME I. — *I étant un nombre de Liouville convenable, sans être le carré d'un nombre de Liouville, $\sqrt{I}$ est une fraction continue quasi-périodique.*

Avant de chercher des généralisations, il convient de carac-

(¹) *Introd. transc.*, Chap. VII, p. 131 et suiv.

tériser avec plus de précision la nature des nombres de Liouville satisfaisant au théorème I.

On peut se proposer, à propos du développement des irrationnelles positives en fractions continues et des classifications corrélatives (*Introd. transc.*, notes I et II, et *Comptes rendus*, 2 juillet 1906, p. 26), une série de problèmes du genre de ceux-ci : *Y a-t-il, au moins dans certains cas, une relation entre l'ordre de deux irrationnelles et celui de la somme, de la différence, du produit, du quotient, d'une fonction rationnelle à coefficients entiers de ces irrationnelles?* Il y a des problèmes analogues pour un nombre quelconque d'irrationnelles (1, 2, 3, ...).

J'ai déjà donné des solutions de ces questions dans des cas étendus ⁽¹⁾; en particulier, l'ordre de $(pI + q)(p'I + q')^{-1}$, où p, q, p', q' sont entiers, $pq' - p'q \neq 0$, est le même que celui de I dans les deuxième et troisième classifications. A ce point de vue, il peut être intéressant de chercher s'il y a quelque relation entre l'ordre de l'irrationnelle I considérée au théorème I et celui de $\sqrt{I}$. Je reprends les mêmes notations.

On sait qu'un nombre de Liouville est d'ordre au moins égal à $(2, 0)$ dans la première classification. Je vais d'abord montrer que, *parmi les nombres de Liouville satisfaisant au théorème I, il y en a d'ordre quelconque au moins égal à $(3, \epsilon)$.*

En effet, soit $I = c_0 + 1 : c_1 + 1 : c_2 + \dots$. On a

$$(Q_s Q_{s+1})^{-1} > |I - I_s| = Q_s^{-\varphi_s}, \quad \varphi_s \log Q_s > \log (Q_s Q_{s+1});$$

pour que I satisfasse au théorème I il suffit, d'après (4),

$$\log Q_{s+1} > Q_s^{2+\epsilon},$$

pour une infinité de valeurs de s (ϵ, ϵ' fixes, positifs, aussi petits qu'on veut). Or

$$c_0 c_1 \dots c_s < Q_s < 2^{s+1} c_0 c_1 \dots c_s,$$

ou, si γ_s est la plus grande des quantités $c_0, c_1, \dots, c_s$,

$$\gamma_s < Q_s < (2\gamma_s)^{s+1};$$

⁽¹⁾ *Introd. transc.*, loc. cit. et Chap. III.

il suffit donc que l'on ait, pour une infinité de valeurs de s ,

$$(5) \quad \log \gamma_{s+1} > (2\gamma_s)^{(s+1)(2+\varepsilon)}, \quad \text{ou} \quad \log \gamma_{s+1} > \gamma_s^{(2+\eta)s},$$

($\eta > 0$ analogue à ε).

En particulier, quand I est d'ordre (k, ρ) , avec $k \geq 3$, dans la première classification, si c_{s+1} est *quotient principal* (*Introd. transc.*, Chap. I, p. 10), la condition sera toujours satisfaite pourvu que

$$(5 \text{ bis}) \quad \log c_{s+1} \geq (\rho - \varepsilon') e_{k-1}(s+1) > \gamma_s^{(2+\eta)s},$$

ε' comme ε , ce qui donne une limite supérieure de γ_s toujours acceptable quand $k \geq 3$ (¹).

On voit toutefois que les nombres de Liouville ainsi obtenus, c'est-à-dire satisfaisant à (5 bis), sont particuliers; par exemple, quand tous les quotients incomplets sont principaux,

$$e_k(s)^{\rho-\varepsilon'} < \gamma_s < Q_s < (2\gamma_s)^{s+1} < 2^{s+1} e_k(s)^{(s+1)(\rho+\varepsilon')};$$

(4) exige $\varphi_m > Q_m^2$, et, puisque

$$(2Q_m Q_{m+1})^{-1} < |I - I_m| = Q_m^{\varphi_m},$$

$$Q_m^{\varphi_m} < 2Q_m Q_{m+1}, \quad \log Q_{m+1} > Q_m,$$

$$(m+2) \log 2 + (m+2)(\rho + \varepsilon') e_{k-1}(m+1) > e_k(m)^{\rho-\varepsilon'};$$

si $k \geq 3$, il faut *a fortiori*

$$\log[2(m+2)(\rho + \varepsilon')] + e_{k-2}(m+1) > (\rho - \varepsilon') e_{k-1}(m) = (\rho - \varepsilon') e_{k-2}(e^m),$$

ce qui est impossible pour $k \geq 3$ et m assez grand. On ne sait donc plus si le théorème I s'applique ici, puisque (4) n'a pas lieu.

Ce dernier raisonnement n'est valable que lorsque k est fini. Quand I est d'ordre $+\infty$ (*Introd. transc.*, Chap. I, p. 10), il suffit d'ébaucher une extension de notre classification des irrationnelles pour arriver à un critère simple et général.

Une suite S de quantités positives $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ est dite d'ordre plus petit que $+\infty$ ou que ∞ quand on peut toujours trouver un nombre k , tel que

$$c_n = e_{k_1}(n)^{\rho_n},$$

(¹) On trouve des résultats analogues dans la deuxième classification quand $(k, \rho) > (2, 1)$.

ρ_n restant limité supérieurement. Je suppose que cette circonstance ne puisse se présenter; j'écris $c_n = e_{k_n}(n)\rho_n$, en choisissant pour la suite des entiers $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$ des nombres déterminés comme il suit : je compare c_n avec

$$\dots, \log n = e_{-1}(n), \quad n = e_0(n), \quad e^n = e_1(n), \quad e_2(n) = e^{e_1(n)}, \quad \dots;$$

soit i la plus grande valeur de l'indice telle que

$$(6) \quad e_i(n) < c_n \leq e_{i+1}(n);$$

je prendrai *provisoirement* $k_n = i + 1$, d'où $\rho_n \leq 1$. Quand S est d'ordre infini, on ne peut assigner aucune limite supérieure aux k_n . Je puis alors classer la suite Σ des k_n comme j'ai classé celle des c_n : elle sera d'ordre fini ou infini. Si elle est d'ordre infini, j'opérerai sur elle comme je l'ai fait sur les c_n ; et ainsi de suite ⁽¹⁾.

Sans insister davantage, je me contenterai de déduire de là un corollaire du théorème I. La condition (5) exige seulement pour une infinité de valeurs de s , si l'on change s en $s - 1$,

$$\log c_s > \gamma_{s-1}^{(2+\eta)(s-1)}, \quad \log \log c_s > (2 + \eta)(s - 1) \log \gamma_{s-1}.$$

Soit encore I d'ordre infini, $c_n = e_{k_n}(n)\rho_n$, et la suite des k_n d'ordre $> (0, 1)$; par définition, il y a une infinité de valeurs de n telles que $k_n \geq n^{1+\epsilon}$ (ϵ fixe positif) et que $k_n - k_j \geq 3$ quel que soit $j < n$, puisque $n^{1+\epsilon} > 3n$. Si s est une de ces valeurs, on aura, d'après (6),

$$c_s > e_{k_s-1}(s), \quad \gamma_{s-1} < e_{k_s-3}(s),$$

et il suffira, pour que (5) ait lieu,

$$e_{k_s-2}(s) > (2 + \eta_1)(s - 1) e_{k_s-4}(s).$$

Posant

$$x = e_{k_s-4}(s) > (2 + \eta_1)(s - 1),$$

il suffira $e^x > x^2$, ce qui a lieu pour x ou s assez grand. La condition (5) est satisfaite pour une infinité de valeurs de s ; donc :

⁽¹⁾ Ce que je viens de faire correspond à la première classification des irrationnelles; on peut en faire autant pour la deuxième. Enfin, on pourrait essayer d'étendre ceci aux fonctions entières et attaquer aussi la classification des fonctions entières d'ordre transfini. Je ne m'en occuperai pas pour le moment.

COROLLAIRE I. — Soit I l'irrationnelle positive

$$c_0 + 1 : c_1 + 1 : c_2 + \dots,$$

d'ordre infini, qui est alors un nombre transcendant de Liouville; je pose $c_n = e_{k_n}(n)^{p_n}$, où k_n est le plus petit nombre entier positif ou négatif tel que $c_n \leq e_{k_n}(n)$.

Si la suite des quantités k_n ou la fraction continue $1 : k_1 + 1 : k_2 + \dots$ est d'ordre $> (0, 1)$ dans une quelconque ⁽¹⁾ des classifications des irrationnelles, $\sqrt{I}$ est toujours un nombre de Liouville ou une fraction continue quasi-périodique.

J'établirai encore ce résultat :

COROLLAIRE II. — Parmi les nombres $\sqrt{I}$ du théorème I, il y en a d'ordre au plus égal à $(2, 0)$ dans la première classification et à $(1, 1)$ dans la deuxième.

Je reprends les suites $s_1, s_2, \dots, s_p, \dots$ de périodes du théorème I. La suite s_p correspondant à i_n contient au moins $\frac{n'}{2}$ quotients complets tous $< 2\sqrt{A_m} < \lambda Q_m$, et

$$n' \geq \frac{\varphi_m - 4}{4} \geq \frac{\varphi_m}{5}.$$

Je suppose maintenant que (4) ait lieu pour toute valeur de m assez grande. On a

$$Q_{m+1} < Q_m^{\varphi_m-1}, \quad \log Q_{m+1} < (\varphi_m - 1) \log Q_m.$$

Dans $\sqrt{I}$ il y a une série de quotients incomplets α_{j_m} de rang supérieur à $\frac{n'}{2} \geq \frac{\varphi_m}{10}$, appartenant à s_{p+1} , et tels que

$$\alpha_{j_m} < \lambda Q_{m+1} < \lambda Q_m^{\varphi_m-1};$$

tous ces précédents sont *a fortiori* $< \lambda Q_{m+1}$.

J'admets, par exemple, que $\log a_n > n^{1+\varepsilon}$, pour une infinité de valeurs de n , c'est-à-dire que $\sqrt{I}$ soit d'ordre plus grand que $(1, 1)$ dans la deuxième classification : l'inégalité ci-dessus pour α_{j_m} s'ap-

(1) Car les ordres $(0, \rho)$ sont les mêmes dans les deux classifications.

plique aux quotients d'indice j_m de s_{p+1} ; on peut alors trouver une infinité de valeurs de m telles que

$$\left(\frac{\varphi_m}{10}\right)^{1+\varepsilon} < j_m^{1+\varepsilon} < \log a_{j_m} < \log \lambda + (\varphi_m - 1) \log Q_m < 3\varphi_m \log \varphi_m,$$

car ici $Q_m < \varphi_m$, d'après (4). On est conduit à une impossibilité pour m assez grand, et, dès lors, $\sqrt{I}$ est d'ordre $\leq (1, 1)$ dans la deuxième classification.

Lorsque $\log a_n > e^{en}$ pour une infinité de valeurs de n , la conclusion est *a fortiori* analogue, et $\sqrt{I}$ est d'ordre $\leq (2, 0)$ dans la première classification ⁽¹⁾.
C. Q. F. D.

III.

Extensions des idées précédentes. — On arrive encore à des fractions continues quasi-périodiques en considérant une racine positive X de

$$(7) \quad LX^2 - 2MX + N = 0,$$

où L, M, N sont des polynômes à coefficients entiers formés avec un même nombre I de Liouville convenable ⁽²⁾, et sont par suite des nombres correspondants de I (*Introd. transc.*, Chap. III).

Soient L_m, M_m, N_m les valeurs obtenues remplaçant I par I_m dans L, M, N , et X_m la valeur approchée de X correspondante, satisfaisant à

$$(8) \quad L_m X_m^2 - 2M_m X_m + N_m = 0;$$

⁽¹⁾ On peut se poser dès lors cette question bien intéressante, et susceptible d'extensions d'après ce qui suit : $\sqrt{I}$ peut-il avoir tous ses quotients incomplets limités, quand I est un nombre de Liouville?

⁽²⁾ Certains des nombres L, M, N peuvent être rationnels. On peut supposer plus généralement que L, M, N sont des nombres de Liouville *correspondants particuliers* (*Intr. transc.*, Chap. III, p. 33-34), c'est-à-dire *ici* des nombres de Liouville ainsi définis : soit I l'un d'eux; pour une infinité de valeurs de m , les mêmes pour tous les nombres considérés, les dénominateurs Q'_m de la $m^{\text{ième}}$ réduite sont de la forme $Q'_m \sigma_m$, où σ_m est positif et limité supérieurement et inférieurement et $Q'_{m+1} > Q'_m \sigma_m$ (σ' fixe > 0 , $\varphi_m > \alpha$, si grand que soit α dès que m est assez grand). Les raisonnements et conclusions sont à peu près les mêmes. Le théorème II reste encore vrai quand L, M, N sont des nombres correspondants non particuliers, c'est-à-dire satisfaisant à des conditions un peu moins précises, analogues à (1) : je n'insiste pas.

m et φ_m étant supposés assez grands pour une infinité de valeurs de m , on a encore pour ces valeurs

$$(9) \quad |X - X_m| < \lambda' Q_m^{-\tau_m}$$

(λ' constante, τ_m positif limité supérieurement et inférieurement), et L_m, M_m, N_m sont des réduites de L, M, N (*Introd. transc.*, Chap. III). X_m est un nombre rationnel ou une irrationnelle quadratique.

Si X_m est rationnel, (8) est réductible, et $A_m = M_m^2 - L_m N_m$ est le carré d'un nombre rationnel.

Si ceci a lieu pour une infinité de valeurs de m ,

$$LX = M \pm \sqrt{A}, \quad A = M^2 - LN;$$

le nombre rationnel ou de Liouville A possède une infinité de réduites A_m qui sont des carrés parfaits, et, par suite, A est le carré d'un nombre rationnel ou d'un nombre de Liouville correspondant à I (*Introd. transc.*, Chap. III, p. 44); de même, ML^{-1} et $\sqrt{A}L^{-1}$ sont des nombres rationnels ou des nombres de Liouville correspondant à I , par suite aussi X et, d'ailleurs, (7) est réductible, en ce sens que son premier membre est un produit de deux facteurs linéaires dont les coefficients sont ⁽¹⁾ des nombres de Liouville correspondant à I ou des nombres rationnels.

Je suppose qu'il n'en soit pas ainsi : dès que m est assez grand, pour les valeurs de m considérées, $A'_m = M_m^2 - L_m N_m$ n'est pas le carré d'un nombre rationnel ; par suite, X_m est une irrationnelle dont le développement en fraction continue est périodique

$$X_m = a_0 + 1 : a_1 + 1 : a_2 + \dots$$

On a par exemple

$$L_m = \frac{f(P_m, Q_m)}{f_1(P_m, Q_m)} \quad (f, f_1 \text{ polynomes}).$$

Chassant les dénominateurs de L_m, M_m, A'_m dans X_m , on met

(¹) On pourrait aussi abréger le langage en considérant l'ensemble H des nombres rationnels et des nombres de Liouville correspondant à I , et dire que (7) est *réductible dans* H , qu'il est le produit de deux facteurs linéaires à coefficients rationnels dans H , etc. [comp. *Introd. transc.*, Chap. III, p. 33, note (1)].

X_m sous la forme

$$X_m = M'_m L'_m{}^{-1} \pm \sqrt{A'_m} L'_m{}^{-1},$$

ou M'_m, L'_m, A'_m sont des entiers $\leq Q_m^{\theta}$, θ constante > 0 . Dès lors, pour la partie périodique du développement de X_m en fraction continue, $a_n < 2Q_m^{\theta}$, la période de X_m a au plus $2A'_m < 2Q_m^{2\theta}$ termes. Quant au nombre ν_m des termes de la partie non périodique, soit $i_n = p_n q_n^{-1}$ la $n^{\text{ième}}$ réduite de X_m ; ce nombre ν_m est au plus égal ⁽¹⁾ à n_1 , si n_1 est le plus petit entier tel que

$$q_{n_1} > \sqrt{L'_m}.$$

Or ⁽²⁾, en général, $q_n > 2^{\frac{n-1}{2}}$. Soit n_2 le plus petit entier tel que

$$2^{\frac{n_2-1}{2}} \geq Q_m^{\theta} \geq \sqrt{L'_m}; \quad 2^{\frac{n_2-3}{2}} < Q_m^{\theta};$$

on a

$$\nu_m \leq n_1 \leq n_2 < \frac{2\theta \log Q_m}{\log 2} + 3 < Q_m^{\theta}.$$

Ceci posé,

$$|X_m - i_n| < q_n^{-1} q_{n+1}^{-1},$$

et, d'après (9),

$$|X - i_n| < q_n^{-1} q_{n+1}^{-1} + \lambda' Q_m^{-\varphi_m \tau_m}.$$

Si la période de X_m renferme un quotient incomplet ≥ 2 , le raisonnement s'achève comme au théorème I; la condition analogue à (2) est encore suffisante; quand φ_m est au moins égal à une certaine puissance θ' de Q_m pour une infinité de valeurs de m , X est encore une fraction continue *quasi-périodique*.

Je suppose au contraire que la période ne renferme que des quotients égaux à 1, c'est-à-dire un seul terme, égal à 1. Si $a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}$ appartiennent à la partie périodique, avec mes notations (*Introd. transc.*, Chap. I, p. 4),

$$X_m = \frac{p_n x_{n+1} + p_{n-1}}{q_n x_{n+1} + q_{n-1}}, \quad x_{n+1} = \frac{q_{n-1} X_m - p_{n-1}}{-q_n X_m + p_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

$$q_n < 2q_{n-1},$$

⁽¹⁾ On le voit en complétant un passage de l'*Algèbre supérieure* de Serret (*loc. cit.*, p. 43).

⁽²⁾ *Introd. transc.*, Chap. III, p. 42.

et

$$\frac{5}{6}(1+\sqrt{5}) > \frac{q_n}{q_{n-1}} x_{n+1} = \frac{q_{n-1} + q_{n-2}}{q_{n-1}} x_{n+1} = \frac{X_m - i_{n-1}}{i_n - X_m} > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (1),$$

$$|X_m - i_{n-1}| < |i_n - X_m| (1+\sqrt{5})^{\frac{5}{6}}, \quad |i_n - X_m| < \frac{2}{1+\sqrt{5}} |X_m - i_{n-1}|,$$

$$\begin{aligned} q_n^{-1} q_{n-1}^{-1} &> |i_n - i_{n-1}| \\ &= |i_n - X_m| + |X_m - i_{n-1}| > |X_m - i_{n-1}| \left(1 + \frac{6}{5(1+\sqrt{5})}\right) \\ &= |X_m - i_{n-1}| \frac{7+3\sqrt{5}}{10}, \end{aligned}$$

$$|X_m - i_n| < q_n^{-1} q_{n-1}^{-1} \frac{10}{7+3\sqrt{5}}.$$

En choisissant la parité de n de façon que $X_m - i_n$ et $X - X_m$ soient de signes contraires, on a, quand une condition analogue à (2) a lieu,

$$|X - i_n| < q_n^{-1} q_{n-1}^{-1} \frac{10}{7+3\sqrt{5}} < \frac{10}{7+3\sqrt{5}} \frac{2}{3} q_n^{-2} < \frac{q_n^{-2}}{2},$$

comme on le voit de suite ; donc i_n est encore réduite de X . On suppose, bien entendu, des conditions analogues à (3) et (4) satisfaites. Le raisonnement s'achève comme au théorème I, avec des simplifications, la période n'ayant ici qu'un terme.

On conçoit d'ailleurs très bien l'existence de pareilles fractions continues quasi-périodiques, forcément mixtes, où les suites $s_1, s_2, \dots, s_p, \dots$ sont toutes formées de périodes d'un terme unique ; mais ici s_{p-1} appartiendra à la partie non périodique correspondant à la suite s_p .

Finalement, on conclut :

THÉORÈME II. — Soit X une racine positive de

$$(7) \quad LX^2 - 2MX + N = 0,$$

où L, M, N sont des polynômes à coefficients entiers formés

(1) En effet,

$$q_{n+1} = q_n + q_{n-1} < 2q_n, \quad q_n > \frac{q_{n+1}}{2}, \quad q_{n-1} > \frac{q_n}{2}, \quad q_{n+1} > \frac{3}{2} q_n,$$

$$\frac{3}{2} < \frac{q_{n+1}}{q_n} = 1 + \frac{q_{n-1}}{q_n} < \frac{5}{3}.$$

avec un même nombre de Liouville, ou, plus généralement, des nombres rationnels ou correspondants particuliers de Liouville ⁽¹⁾.

Quand ces nombres de Liouville sont convenablement choisis ⁽²⁾, X est un nombre rationnel ou quadratique, un nombre de Liouville, ou une fraction continue quasi-périodique, les trois cas étant effectivement possibles.

Remarque I. — Soit R un nombre rationnel ou un nombre de Liouville correspondant de I, L, M, N ; XR et $X \pm R$ sont racines d'équations analogues à (7), dont les racines positives ont mêmes propriétés; d'ailleurs, quand X est une fraction continue quasi-périodique sans être un nombre de Liouville, ni XR , ni $X \pm R$ ne sont ici des nombres de Liouville; c'est-à-dire que ce sont des fractions continues quasi-périodiques. De même X^p , où p est un entier quelconque, sera un nombre de Liouville ou une fraction continue quasi-périodique; plus généralement il en sera de même pour un polynôme en X dont les coefficients sont des nombres rationnels ou des nombres de Liouville correspondant à I, L, M, N ⁽³⁾.

Remarque II. — On peut montrer qu'en dehors des fractions continues quasi-périodiques racines des équations (7), où L, M, N sont des nombres correspondants de Liouville tels que, pour une infinité de valeurs de m , $|L - L_m|, |M - M_m|, |N - N_m|$ sont plus petits que $Q_m^{-\theta_1 \varphi_m}$, avec $\varphi_m \geq Q_m^{\theta'}$ (θ_1, θ' fixes > 0), il y a d'autres fractions continues quasi-périodiques qui sont des nom-

⁽¹⁾ Au sens de la note ⁽²⁾, début du § III.

⁽²⁾ C'est le cas quand L, M, N sont des polynômes à coefficients entiers formés avec I , et que I satisfait aux conditions du corollaire I du théorème I; la condition (5) est en effet ici remplacée simplement par

$$\log \gamma_{i+1} > \gamma_i^{\omega_2} \quad (\omega \text{ constante convenable } > 0),$$

et les calculs sont à peu près les mêmes que pour le corollaire I. Pour les nombres de Liouville I qui satisfont à ce corollaire, le théorème II est applicable. L, M, N étant des polynômes en I à coefficients entiers.

⁽³⁾ R satisfait aux conditions mentionnées à la fin de la note ⁽²⁾, début du § III. On peut encore se demander si X peut avoir tous ses quotients incomplets limités.

bres transcendants. Je me contenterai d'indiquer cet exemple (1) : les fractions continues $\xi = b_0 + 1 : b_1 + 1 : b_2 + \dots$ quasi-périodiques, où les périodes commencent toutes à b_1 , quand b_{λ_n} , dernier terme de la période de la $n^{\text{ème}}$ suite s_n de périodes, et λ_n , nombre des termes de cette période, croissent indéfiniment avec n , de façon que $b_m \leq \theta'' m$ (θ'' constante). Grâce à cette dernière condition, on est sûr que ξ n'est pas un nombre de Liouville ; c'est d'ailleurs un nombre transcendant si $s_n \lambda_n^{-1}$ croît suffisamment vite avec n .

IV.

En terminant, je mentionnerai encore les résultats suivants que l'on obtient en appliquant à l'équation (1, bis) de notre *Introd. transc.* (Chap. VII, p. 130) des raisonnements et calculs semblables à ceux qui accompagnent les équations (5) et (6) ci-dessus et qui aboutissent au corollaire I du théorème I :

Soit I l'irrationnelle positive $c_0 + 1 : c_1 + 1 : c_2 + \dots$ d'ordre $> (3, 0)$ dans la première classification des fractions continues ou $> (2, 1)$ dans la deuxième. Quand l'ordre est (k, p) non infini, si les quotients incomplets principaux sont suffisamment espacés et les quotients précédents suffisamment petits par rapport à eux, la représentation q^{imale} (2) de I dans le système de numération de base q est quasi-périodique.

Quand l'ordre est infini et que I satisfait aux conditions du corollaire I du théorème I, la représentation q^{imale} de I est quasi-périodique.

Tous les nombres I, pour lesquels j'ai montré plus haut que $\sqrt{I}$ est une fraction continue quasi-périodique, ont leur représentation q^{imale} quasi-périodique (3).

Il résulte de là en particulier la certitude que les nombres de

(1) Pour la démonstration, on s'appuiera sur *Introd. transc.*, Chap. VII, particulièrement sur l'équation irréductible (3.), qui coïncide alors avec une des équations (8).

(2) Il m'est arrivé aussi de dire ailleurs plus simplement, mais moins correctement : décimale dans le système de base q .

(3) Une condition suffisante de quasi-périodicité de cette représentation est en effet $\varphi_m > Q_m$, pour une infinité de valeurs de m , condition qui est une conséquence de (4).

Liouville d'ordre infini considérés au corollaire I du théorème I ont des analogies tout à fait profondes avec les nombres rationnels. Pour les nombres de Liouville d'ordre fini, il y a encore beaucoup d'analogies ; mais jusqu'ici il n'est pas établi qu'elles soient aussi intimes.

J'énoncerai encore ces propriétés :

Le nombre e , base des logarithmes népériens, ne peut être racine d'aucune équation algébrique dont les coefficients sont des nombres de Liouville correspondants, tels que [note (2), début du § III] $\varphi_m > Q_m^{\alpha_m}$, $\lim \alpha_m = \infty$, pour $m = \infty$. C'est en particulier le cas quand les coefficients sont des polynômes en I à coefficients entiers, I satisfaisant aux conditions du corollaire I du théorème I.

La démonstration n'est qu'une modification d'une démonstration classique ⁽¹⁾ (JORDAN, *Cours d'Analyse lithographié de l'École Polytechnique*).

a^1 (a entier) et 1^1 sont transcendants quand I est un nombre de Liouville tel que, pour une infinité de valeurs de m , $\varphi_m \geq Q_m$ ou $\varphi_m \geq \alpha_m Q_m$ (α_m comme ci-dessus) respectivement ⁽²⁾ ; c'est le cas quand I satisfait aux conditions du corollaire I du théorème I.

Je finirai en indiquant des cas étendus où un quotient convergent de produits infinis est un nombre transcendant de Liouville.

Soit $I = \frac{a_1 a_2 \dots a_n \dots}{b_1 b_2 \dots b_n \dots}$ un pareil quotient, où les a_n et les b_n

⁽¹⁾ En cours d'impression, j'ajouterai qu'une démonstration analogue permet d'établir la propriété plus générale suivante, qui a des extensions :

Soient $J_1, \dots, J_v, I_1, \dots, I_v$ des fractions rationnelles à coefficients entiers réels ou imaginaires formées avec un même nombre de Liouville I réel ou imaginaire d'ordre assez grand : les I_n ayant des valeurs distinctes et les $J_n \neq 0$, on n'a

aucune identité de la forme $\sum_{n=1}^v J_n e^{I_n} = 0$. — Conséquences : $e^{I\sqrt{-1}}$ et $\sin I$ sont

transcendants ; si e^x est algébrique > 0 , x est une fraction continue d'ordre limité ; $\log \text{nép } y$, où y est algébrique > 1 , est une fraction continue d'ordre limité.

⁽²⁾ On se base sur des relations analogues à (5₁) et (6₁) de notre *Introd. transc.* Chap. VII, p. 134.

sont des entiers réels ou imaginaires, et $c_n = a_n - b_n$. Les c_n étant donnés, si la croissance des $|b_n|$ est suffisamment rapide ou encore, si l'ordre de la fonction, supposée entière, $\sum_1 b_n^{-1} x^n$ est suffisamment petit, I est un nombre transcendant de Liouville.

Exemple : $0 < |c_n| \leq \gamma$ nombre fixe, $b_n = E[c_k(n)^{\rho + \varepsilon_n}]$, où k entier ≥ 3 , $\rho > 0$, $\lim \varepsilon_n = 0$ pour $n = \infty$.

La démonstration se déduit de l'identité

$$I = 1 + c_1 b_1^{-1} + c_2 b_2^{-1} I_1 + \dots + c_n b_n^{-1} I_{n-1} + \dots,$$

où

$$I_n = P_n Q_n^{-1}, \quad P_n = a_1 a_2 \dots a_n, \quad Q_n = b_1 b_2 \dots b_n.$$

On a

$$I - I_n = c_{n+1} b_{n+1}^{-1} I_n + c_{n+2} b_{n+2}^{-1} I_{n+1} + \dots,$$

et il suffit de faire en sorte que $|I - I_n| < |Q_n|^{-\alpha}$ pour une infinité de valeurs de n si grand que soit α .

SUR LES REPRÉSENTATIONS NUMÉRIQUES DES ENSEMBLES;

Par M. COMBEBIAC.

Lorsqu'un ensemble M ayant, comme l'espace ponctuel, la puissance du continu, est rapporté à un système de n coordonnées, celui-ci détermine n infinités ou faisceaux d'ensembles qui jouissent des propriétés suivantes : chaque ensemble a la puissance du continu ; chacun des faisceaux (dont les éléments sont constitués par ces ensembles) a également la puissance du continu ; un élément quelconque de M appartient à un et à un seul ensemble de chaque faisceau ; n ensembles pris respectivement dans les n faisceaux ont toujours un et un seul élément commun. Réciproquement, si l'on a déterminé, dans l'ensemble M , n faisceaux d'ensembles satisfaisant à ces conditions, il suffit évidemment, pour rapporter M à un système de n coordonnées, de réaliser une application de chacun des faisceaux sur le continu numérique, ce qui est toujours possible, et d'une infinité de manières, puisque chaque faisceau a la puissance du continu.

Pour se faire une idée du degré d'indétermination que comporte la définition d'un pareil système, on peut le concevoir comme engendré par le procédé exposé ci-dessous.

On peut répartir les éléments de M dans des ensembles M_i ayant tous la puissance du continu et constituant eux-mêmes les éléments d'un ensemble (ou faisceau) $\{M_i\}$, ayant également la puissance du continu; c'est ce qui est réalisé, pour l'espace, par une infinité simple de surfaces convenablement choisies. Les ensembles M_i ayant tous la même puissance, on peut répartir les éléments de M dans des ensembles M_j formés, chacun, en prenant un et un seul élément de chaque ensemble M_i . On obtient ainsi deux faisceaux $\{M_i\}$ et $\{M_j\}$ tels que tout élément de M appartient toujours à un et à un seul ensemble de chacun des faisceaux et que deux ensembles pris dans des faisceaux différents ont toujours un et un seul élément commun. Si l'on détermine, pour chacun des faisceaux, une représentation numérique simple, l'ensemble M se trouve rapporté à un système de deux coordonnées. Il est à observer que le faisceau ordonné $\{M_i\}$ [ou $\{M_j\}$] détermine, sur chacun des ensembles M_j (ou M_i), un ordre simple du type caractérisé par le continu numérique.

On peut poursuivre l'opération en appliquant à un ensemble M_i du faisceau $\{M_i\}$ le même traitement qu'à l'ensemble M ; on répartit ainsi les éléments de M_i , d'une part, dans des ensembles $M_{i,k}$ et, d'autre part, dans des ensembles $M_{i,k'}$, qui jouissent, par rapport à M_i , des mêmes propriétés que les ensembles M_i et M_j par rapport à M . En réunissant les éléments de tous les ensembles M_j qui ont des éléments communs avec un même ensemble $M_{i,k}$, on forme un ensemble M_k , et le faisceau $\{M_k\}$ des ensembles déterminés par ce procédé jouit des mêmes propriétés que le faisceau $\{M_i\}$ et le faisceau $\{M_j\}$. On définirait de même, au moyen des ensembles $M_{i,k'}$, un faisceau $\{M_{k'}\}$ jouissant de ces mêmes propriétés. On reconnaît enfin que trois ensembles appartenant respectivement aux trois faisceaux $\{M_i\}$, $\{M_k\}$ et $\{M_{k'}\}$ ont toujours un et un seul élément commun. Si l'on définit pour ces trois faisceaux, qui ont la puissance du continu, des représentations numériques simples, l'ensemble M se trouve rapporté à un système de trois coordonnées. Chacun des ensembles M_j est l'intersection de deux ensembles appartenant respectivement aux faisceaux $\{M_k\}$

et $\{M_k\}$ et est ordonné par les ensembles du faisceau $\{M_i\}$.

Le procédé exposé ci-dessus peut évidemment être répété indéfiniment.

La notion du nombre de dimensions n'est pas spéciale aux types d'ordre continu; elle peut, notamment, être étendue aux types d'ordre *partout disjoints*, c'est-à-dire à ceux dans lesquels la notion de continuité est remplacée par celle de *contiguïté*. C'est ainsi que tout ensemble dénombrable peut être disposé suivant des tableaux à double entrée, triple entrée, etc. Le procédé à employer est le même que pour les ensembles ayant la puissance du continu. On peut en faire l'application à l'ensemble des nombres entiers positifs.

On doit d'abord répartir ces nombres dans des ensembles dénombrables constituant eux-mêmes les éléments d'un ensemble dénombrable; ce résultat peut être obtenu, par exemple, en écrivant un nombre quelconque N sous la forme

$$N = (2j - 1) 2^{i-1},$$

où $2j - 1$ est le produit des facteurs premiers impairs qui entrent dans la formation de N , et en réunissant tous les nombres N pour lesquels la valeur de i est la même; on peut aussi obtenir une répartition semblable en réunissant les éléments pour lesquels le nombre j est le même. Si l'on range respectivement les ensembles M_i et M_j ainsi obtenus suivant l'ordre de grandeur de leurs indices, les nombres naturels se trouvent disposés dans un tableau à double entrée, et, par suite, l'ensemble de ces nombres est rapporté à un système de deux coordonnées i et j à valeurs entières. On peut poursuivre l'application du procédé en décomposant chacun des ensembles M_i comme il a été fait pour M ; il suffit pour cela d'écrire le nombre impair $2j - 1$, qui détermine les éléments de chacun de ces ensembles, sous la forme

$$2j - 1 = P(k) 2^{k'-1},$$

où $P(k)$ désigne le $k^{\text{ième}}$ (par ordre de grandeur) des nombres non divisibles par 2 ou par 3. Les nombres i , k et k' constituent alors, pour l'ensemble des nombres naturels, un système de trois coordonnées.

SUR L'INTERPRÉTATION MÉCANIQUE DES TRANSFORMATIONS DE CONTACT INFINITÉSIMALES;

Par M. E. VESSIOT.

Lie a indiqué brièvement, en divers passages de sa *Géométrie des transformations de contact*, que la propagation d'un mouvement ondulatoire, conformément à la loi d'Huyghens, était l'image d'un groupe de transformations de contact à un paramètre, c'est-à-dire d'une transformation de contact infinitésimale. Il nous a paru intéressant d'exposer cette idée avec les développements qu'elle comporte. Nous avons raisonné dans l'espace à trois dimensions, et indiqué comment les résultats obtenus peuvent s'étendre à l'espace à n dimensions. Voici les principaux de ces résultats.

Le mode de propagation supposé est défini par un système de ∞^3 surfaces d'onde caractéristiques, associées aux ∞^3 points (x, y, z) de l'espace; chacune d'elles représente la forme limite vers laquelle tend la surface, lieu des points atteints au bout du temps dt par un ébranlement produit au point (x, y, z) correspondant. Supposons l'origine des coordonnées transportée en ce point, et l'équation d'un plan tangent à cette surface prise sous la forme

$$(1) \quad pX + qY - Z - w = 0,$$

de sorte que (p, q, w) sont des coordonnées tangentielles courantes pour cette surface. Le système des surfaces caractéristiques est alors défini par une équation de la forme

$$(2) \quad w = W(x, y, z, p, q).$$

Et l'on peut dire que cette équation définit le mode de propagation.

Si l'on imagine une onde origine quelconque, les formes successives de l'onde variable qui en résulte sont les transformées de l'onde origine par les diverses transformations d'un groupe de transformations de contact à un paramètre t , qui représente le temps; et ce groupe est défini par les équations classiques :

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial W}{\partial p}, & \frac{dy}{dt} = \frac{\partial W}{\partial q}, & \frac{dz}{dt} = p \frac{\partial W}{\partial p} + q \frac{\partial W}{\partial q} - W, \\ \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial W}{\partial x} - p \frac{\partial W}{\partial z}, & \frac{dq}{dt} = -\frac{\partial W}{\partial y} - q \frac{\partial W}{\partial z}, \end{cases}$$

où W est la fonction qui figure dans l'équation tangentielle de la surface caractéristique.

En intégrant ce système (3) on déterminera complètement le mode de propagation considéré. Mais on peut aussi le déterminer en cherchant les familles d'ondes, c'est-à-dire la famille des ondes successives issues d'une onde origine arbitraire. Une telle famille sera donnée par une équation

$$(4) \quad t = f(x, y, z),$$

de sorte qu'on a à trouver une fonction t des variables indépendantes (x, y, z) ; elle est définie par l'équation aux dérivées partielles

$$(5) \quad \frac{\partial t}{\partial z} W \left(x, y, z, -\frac{\frac{\partial t}{\partial x}}{\frac{\partial t}{\partial z}}, -\frac{\frac{\partial t}{\partial y}}{\frac{\partial t}{\partial z}} \right) + 1 = 0,$$

dont l'intégration est donc équivalente à l'intégration du système (3).

De là découle une théorie géométrique extrêmement simple des équations aux dérivées partielles du premier ordre, comprenant aussi bien la théorie des intégrales complètes et le théorème de Jacobi que la théorie des caractéristiques. La seule particularité de l'équation (5) est de ne pas contenir explicitement la fonction inconnue t .

On arrive à des résultats plus symétriques en supposant l'équation du plan tangent à la surface caractéristique prise sous la forme

$$(6) \quad \alpha Z + \beta Y + \gamma X - 1 = 0.$$

L'équation tangentielle est alors de la forme

$$(7) \quad \Pi(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = 1,$$

où l'on peut toujours supposer que Π est homogène de degré un en α, β, γ . Cette équation (7), en posant

$$(8) \quad \frac{\partial t}{\partial x} = \alpha, \quad \frac{\partial t}{\partial y} = \beta, \quad \frac{\partial t}{\partial z} = \gamma,$$

est aussi l'équation aux dérivées partielles des familles d'ondes; et

les équations du groupe de transformations de contact prennent la forme homogène connue, analogue à celle des équations canoniques d'Hamilton,

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \Pi}{\partial x}, & \frac{dy}{dt} = \frac{\partial \Pi}{\partial y}, & \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \Pi}{\partial z}, \\ \frac{dx}{dt} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, & \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, & \frac{dz}{dt} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}. \end{cases}$$

L'intervention du groupe de transformations de contact dans la théorie ondulatoire conduit à considérer les trajectoires de la propagation, qui seront définies par le système (3), par exemple, en y considérant p, q comme des inconnues auxiliaires. On définit ces trajectoires directement par un système différentiel analogue aux équations de Lagrange en mécanique, en définissant les surfaces d'ondes caractéristiques par leur équation ponctuelle générale

$$(10) \quad \Omega(x, y, z, X, Y, Z) = 1,$$

où l'on peut supposer que Ω est homogène de degré *un* en X, Y, Z . Le système différentiel des trajectoires est alors

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x'} \right) - \frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y'} \right) - \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial z'} \right) - \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0, \end{cases}$$

avec l'équation de condition

$$(12) \quad \Omega(x, y, z, x', y', z') = 1.$$

Il exprime que la variation de l'intégrale

$$(13) \quad \int \Omega(x, y, z, dx, dy, dz)$$

est nulle, et que le temps t est précisément la valeur correspondante

$$(14) \quad t = \int \Omega(x, y, z, dx, dy, dz)$$

de cette intégrale. On peut, du reste, interpréter l'intégrale (13),

prise le long d'un arc de courbe quelconque, comme le temps que mettrait un ébranlement à se propager d'une extrémité à l'autre de cet arc, en suivant la courbe.

Nous avons ainsi une interprétation géométrique d'un problème très général de calcul des variations. La condition classique pour le minimum s'énonce alors sous la forme suivante : Soit M un point quelconque d'une trajectoire ; ce point est l'origine d'une onde élémentaire infiniment petite

$$(15) \quad \Omega(x, y, z, dx, dy, dz) = dt;$$

la trajectoire, en partant de M, devra percer cette onde élémentaire en un point où elle a ses deux courbures de même signe, et où elle tourne sa concavité du côté de M. Les arcs de trajectoires correspondent donc toujours à un minimum dans la durée de la propagation lorsque les surfaces d'onde caractéristiques ont leurs courbures toujours du même signe, et tournent toujours leur concavité vers leurs origines respectives. Ceci, bien entendu, sous la réserve que l'arc considéré ne contienne pas de couples de points conjugués (au sens de Weierstrass).

La théorie précédente éclaire donc d'un jour bien intéressant, non seulement les divers aspects de la théorie des équations aux dérivées partielles, mais encore ses rapports avec le calcul des variations.

Elle interviendra utilement dans toutes les questions où intervient la variation d'une intégrale (13); brachistochrones, équilibre des fils, lignes géodésiques, problème général de la dynamique, etc. Dans ces divers cas, elle redonne intuitivement les théorèmes analogues aux théorèmes de Thomson et Tait; car ils expriment seulement que les arcs de trajectoires compris entre deux ondes d'une même famille correspondent à des temps égaux; et qu'en chaque point d'une onde, la direction de la trajectoire est liée à celle du plan tangent à l'onde par la relation géométrique qui résulte des trois premières formules (3) ou (9).

Lie avait indiqué ⁽¹⁾ le fait que l'intégration de l'équation aux dérivées partielles de la Mécanique

$$(16) \quad \left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial S}{\partial x_n}\right)^2 - 2U(x_1, \dots, x_n) - 2h = 0,$$

⁽¹⁾ *Leipziger Berichte*, t. XLI, p. 145.

revient à la détermination du groupe de transformations de contact qui a pour fonction caractéristique

$$(17) \quad \frac{\sqrt{p_1^2 + \dots + p_n^2}}{\sqrt{2(U + h)}}.$$

Nous retrouvons ce résultat sous une forme plus générale, et avec sa véritable origine, qui est dans le principe de la moindre action.

Si la force vive d'un système $\frac{2T(x_1, \dots, x_n | dx_1, \dots, dx_n)}{dt^2}$ ne dépend que des coordonnées du système, et non du temps, et s'il en est de même de la fonction des forces $U(x_1, \dots, x_n)$, les trajectoires sont les mêmes que pour le mode de propagation ondulatoire dans lequel la surface d'onde caractéristique a pour équation ponctuelle générale

$$(18) \quad 2\sqrt{U(x_1, \dots, x_n) T(x_1, \dots, x_n | X_1, \dots, X_n)} = 1;$$

mais ce qui correspond au temps τ de ce mode de propagation, ce n'est pas en général le temps t du mouvement dynamique, mais l'action

$$(19) \quad \tau = 2 \int \sqrt{U(x_1, \dots, x_n) T(x_1, \dots, x_n, dx_1, \dots, dx_n)},$$

de sorte que l'on a

$$(20) \quad dt = \frac{d\tau}{2U(x_1, \dots, x_n)}.$$

On suppose dans cet énoncé que l'on a donné une valeur fixe à la constante des forces vives, et qu'on l'a fait entrer dans la fonction U , de sorte que l'équation des forces vives serait

$$(21) \quad T(x_1, \dots, x_n | dx_1, \dots, dx_n) = U(x_1, \dots, x_n) dt^2.$$

Cette identité de forme entre les trajectoires des problèmes de dynamique et de certains problèmes de propagation ondulatoire est certainement curieuse, quoique la différence dans la loi suivant laquelle sont parcourues les trajectoires lui ôte de son intérêt. Le parallèle classique entre la théorie de l'émission et la théorie des onduations en peut être considéré comme un cas particulier, si l'on suppose que dans la théorie de l'émission les corpuscules lu-

mineux obéissent à des lois analogues à celles de notre dynamique.

Nous étudierons, dans un autre travail, les conséquences à tirer de ce parallélisme général pour l'intégration des équations de la Mécanique. Il y aura lieu également d'étudier le problème de la réflexion, et la propagation d'un ébranlement dans un milieu dont la nature varie avec le temps. Nous avons voulu nous limiter, dans cette note, aux faits les plus simples.

I. — ONDES ET TRANSFORMATIONS DE CONTACT.

1. Considérons un milieu élastique bien défini; et supposons qu'un ébranlement de nature déterminée se propage dans ce milieu. Nous admettons d'abord que, si cet ébranlement s'est produit à l'origine en un point isolé A du milieu, au bout de chaque temps t il atteint tous les points d'une surface $\Phi_{A,t}$ dont la forme est déterminée pour chaque point A et pour chaque durée t .

Nous admettons ensuite que, si l'ébranlement se produit à l'origine sur toute une courbe C, ou sur toute une surface S, il atteint au bout de chaque temps t tous les points de la multiplicité M enveloppe des surfaces $\Phi_{A,t}$ correspondant aux divers points de C, ou de S (respectivement).

Si nous appelons *onde* le lieu des points atteints par l'ébranlement à un même instant, C ou S est l'onde origine, et M est ce qu'est devenue, au bout du temps t , cette onde origine. Et le principe que nous admettons peut s'appeler le *principe de l'onde enveloppe*.

Il s'interprète immédiatement, dans la théorie des transformations de contact. Le système des surfaces $\Phi_{A,t}$ définit en effet, pour chaque valeur de t , une transformation de contact T_t , et M est la transformée de l'onde origine (C ou S) par cette transformation.

Donc à chaque milieu élastique et à chaque nature d'ébranlement pouvant se produire dans ce milieu correspond une famille de transformations de contact T_t , de telle sorte que toute onde origine devient, au bout du temps t , une onde nouvelle qui est la transformée de l'onde origine par la transformation T_t .

Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées d'un point quelconque A, et x, y, z les coordonnées courantes. La surface $\Phi_{A,t}$ ayant pour

équation

$$(1) \quad \Phi(x, y, z | x_0, y_0, z_0 | t) = 0,$$

cette équation définit, comme l'on sait, la transformation de contact T_t , en lui adjoignant les équations

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + p \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, & \frac{\partial \Phi}{\partial y} + q \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_0} + p_0 \frac{\partial \Phi}{\partial z_0} = 0, & \frac{\partial \Phi}{\partial y_0} + q_0 \frac{\partial \Phi}{\partial z_0} = 0. \end{cases}$$

2. Admettons de plus que les ébranlements considérés se propagent conformément au *principe d'Huyghens*, c'est-à-dire que l'onde origine Σ_0 , étant devenue au bout d'un temps quelconque t une certaine onde Σ , continue à se propager comme si cette onde Σ était, à partir de cet instant, l'onde origine.

Cela revient à dire que la transformation de contact $T_{t+t'}$ est identique au produit $T_t T_{t'}$, c'est-à-dire que les transformations de contact T_t forment un groupe à un paramètre, ayant t pour paramètre canonique.

Dès lors, sous les hypothèses faites, à chaque milieu élastique et à chaque nature d'ébranlements pouvant se propager dans ce milieu correspond une transformation de contact infinitésimale $\mathfrak{E}$, et toute onde existant à un instant quelconque se modifie successivement suivant les transformations de contact T_t du groupe à un paramètre qu'engendre $\mathfrak{E}$.

Suivant les résultats de Lie, bien connus, si $W(x, y, z, p, q)$ est la fonction caractéristique de $\mathfrak{E}$, M_t s'obtient en intégrant entre 0 et t , avec les valeurs initiales x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 , les équations

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial W}{\partial p}, & \frac{dy}{dt} = \frac{\partial W}{\partial q}, & \frac{dz}{dt} = p \frac{\partial W}{\partial p} + q \frac{\partial W}{\partial q} - W, \\ \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial W}{\partial x} - p \frac{\partial W}{\partial z}, & \frac{dq}{dt} = -\frac{\partial W}{\partial y} - q \frac{\partial W}{\partial z}. \end{cases}$$

La fonction W est donc caractéristique pour le milieu et la nature des ébranlements considérés.

Elle est liée aux considérations géométriques suivantes. Reprenons la surface $\Phi_{\lambda, t}$ et construisons son homothétique, par rapport au centre A d'homothétie et au rapport d'homothétie $\frac{1}{t}$. Lorsque t

tend vers zéro, cette homothétique tend vers une forme limite Ψ_A , que nous appellerons *la surface caractéristique du milieu, ayant A pour origine*, parce que le système de ces surfaces Ψ_A définit, comme nous allons le voir, le mode de propagation d'ébranlements considérés.

En effet, $\Phi_{A,t}$ a pour équations, en posant

$$W_0 = W(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0),$$

et considérant p_0, q_0 comme des paramètres,

$$x = x_0 + t \frac{\partial W_0}{\partial p_0} + \dots,$$

$$y = y_0 + t \frac{\partial W_0}{\partial q_0} + \dots,$$

$$z = z_0 + t \left(p_0 \frac{\partial W_0}{\partial p_0} + q_0 \frac{\partial W_0}{\partial q_0} - W_0 \right) + \dots,$$

les termes non écrits étant d'ordre supérieur en t . L'homothétique considérée aura pour équations

$$x = x_0 + \frac{\partial W_0}{\partial p_0} + \dots,$$

$$y = y_0 + \frac{\partial W_0}{\partial q_0} + \dots,$$

$$z = z_0 + p_0 \frac{\partial W_0}{\partial p_0} + q_0 \frac{\partial W_0}{\partial q_0} - W_0 + \dots,$$

les termes non écrits contenant le facteur t . La surface Ψ_A est donc représentée, *en transportant les axes au point A*, par les équations

$$(4) \quad X = \frac{\partial W_0}{\partial p_0}, \quad Y = \frac{\partial W_0}{\partial q_0}, \quad Z = p_0 \frac{\partial W_0}{\partial p_0} + q_0 \frac{\partial W_0}{\partial q_0} - W_0.$$

Si l'on différentie par rapport à p_0, q_0 , on en conclut

$$p_0 dX + q_0 dY - dZ = 0,$$

et par suite $p_0, q_0, -1$ sont les coefficients de direction du plan tangent à Ψ_A au point X, Y, Z qui a pour coordonnées curvilignes p_0, q_0 . Et l'équation du plan tangent est

$$(5) \quad p_0 X + q_0 Y - Z - W_0 = 0.$$

La fonction caractéristique W correspond donc à l'équation tangentielle de la surface caractéristique Ψ_A du milieu, en ce sens que, si l'équation du plan tangent à la surface d'origine A est, en transportant les axes en A ,

$$(6) \quad p_0 X + q_0 Y - Z - w_0 = 0,$$

l'équation tangentielle est

$$(7) \quad w_0 = W(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0),$$

où x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées du point A . Les surfaces Ψ_A définissent donc entièrement la fonction W , et, par conséquent, le mode de propagation des ébranlements considérés, dans le milieu considéré.

On peut encore substituer à la surface Ψ_A son homothétique prise avec A pour centre d'homothétie et dt pour rapport d'homothétie; c'est ce que nous appellerons l'onde élémentaire qui a A pour origine. Ses équations, toujours avec A pour origine des coordonnées, sont :

$$X = \frac{\partial W_0}{\partial p_0} dt, \quad Y = \frac{\partial W_0}{\partial q_0} dt, \quad Z = \left(p_0 \frac{\partial W_0}{\partial p_0} + q_0 \frac{\partial W_0}{\partial q_0} - W_0 \right) dt.$$

Si A' est le point de cette onde élémentaire, pour lequel le plan tangent a pour coefficients de direction $p_0, q_0, -1$, les composantes du vecteur AA' sont les différentielles dx_0, dy_0, dz_0 pour l'élément de contact $E(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$.

Pour avoir les différentielles dp_0, dq_0 , il suffit de chercher l'élément de contact commun à toutes les ondes élémentaires ayant pour origines des points infiniment voisins de A dans l'élément de contact E . L'onde élémentaire d'origine A ayant pour équations

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{\partial W(x_0, y_0, z_0, p, q)}{\partial p} dt, \\ y &= y_0 + \frac{\partial W(x_0, y_0, z_0, p, q)}{\partial q} dt, \\ z &= z_0 + \left[p \frac{\partial W(x_0, y_0, z_0, p, q)}{\partial p} \right. \\ &\quad \left. + q \frac{\partial W(x_0, y_0, z_0, p, q)}{\partial q} - W(x_0, y_0, p, q) \right] dt, \end{aligned}$$

nous aurons, pour trouver cet élément de contact caractéristique, les équations

$$0 = \delta x_0 + \delta \frac{\partial W(x_0, y_0, z_0, p, q)}{\partial p} dt,$$

$$0 = \delta y_0 + \delta \frac{\partial W(x_0, y_0, z_0, p, q)}{\partial q} dt,$$

$$0 = \delta z_0 + \delta \left[p \frac{\partial W(x_0, \dots, p, q)}{\partial p} + q \frac{\partial W(x_0, \dots, p, q)}{\partial q} - W(x_0, \dots, p, q) \right] dt,$$

$$0 = p_0 \delta x_0 + q_0 \delta y_0 - \delta z_0,$$

d'où l'on conclut, δx_0 et δy_0 étant arbitraires,

$$p_0 - p - \left[\frac{\partial W(x_0, \dots, p, q)}{\partial x_0} + p_0 \frac{\partial W(x_0, \dots, p, q)}{\partial z_0} \right] dt = 0,$$

$$q_0 - q - \left[\frac{\partial W(x_0, \dots, p, q)}{\partial y_0} + q_0 \frac{\partial W(x_0, \dots, p, q)}{\partial z_0} \right] dt = 0.$$

On voit donc que p, q tendent vers p_0, q_0 , lorsque dt tend vers zéro, et que les parties principales de $p - p_0, q - q_0$ sont précisément données par les mêmes équations qui définissent les différentielles dp, dq dans les équations (3).

L'interprétation géométrique des équations (3) au moyen de l'onde élémentaire est ainsi complète.

On peut encore dire, d'après les principes des approximations successives, que *la propagation de l'ébranlement se fait par ondes élémentaires successives*, dt étant alors infiniment petit.

3. On peut remplacer les équations (3) de la propagation des ondes par des équations plus symétriques, analogues aux *équations canoniques d'Hamilton*. Il suffit de mettre l'équation tangentielle de la surface caractéristique Ψ_A sous une forme symétrique.

Nous écrirons dans ce qui suivra x, y, z pour les coordonnées de A; et p, q à la place de p_0, q_0 . Le plan tangent courant de Ψ_A étant

$$(8) \quad pX + qY - Z - w = 0,$$

son équation tangentielle était

$$(9) \quad w = W(x, y, z, p, q).$$

Prenons le plan tangent sous la forme

$$(10) \quad \alpha X + \beta Y + \gamma Z - w = 0,$$

et son équation tangentielle pourra s'écrire

$$(11) \quad w = \Pi(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma),$$

où Π sera homogène et du premier degré en α, β, γ . On aura de plus les formules d'identification

$$(12) \quad p = -\frac{\alpha}{\gamma}, \quad q = -\frac{\beta}{\gamma}, \quad w = -\frac{w}{\gamma},$$

$$(13) \quad \pi(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = -\gamma W\left(x, y, z, \frac{-\alpha}{\gamma}, \frac{-\beta}{\gamma}\right),$$

$$(14) \quad W(x, y, z, p, q) = \Pi(x, y, z, p, q, -1).$$

On en conclut immédiatement, vu l'homogénéité de Π et de ses dérivées,

$$(15) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial \Pi}{\partial \beta}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \Pi}{\partial \gamma};$$

et, par un calcul facile,

$$(16) \quad \frac{\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \Pi}{\partial x}}{\alpha} = \frac{\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \Pi}{\partial y}}{\beta} = \frac{\frac{dz}{dt} + \frac{\partial \Pi}{\partial z}}{\gamma} = \frac{\frac{dw}{dt}}{w}.$$

Le dernier rapport s'obtient par combinaison des autres, en tenant compte de l'homogénéité de Π , de l'équation (11) et des équations (15).

Pour obtenir des formules simples, on s'imposera la condition

$$(17) \quad w = 1,$$

ce qui donnera les équations

$$(18) \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \beta}, \quad \frac{dz}{dt} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \gamma},$$

avec la condition

$$(19) \quad \Pi(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = 1.$$

Cette dernière équation demeure l'équation tangentielle de Ψ_A , l'équation du plan tangent s'écrivant désormais

$$(20) \quad \alpha X + \beta Y + \gamma Z - 1 = 0.$$

Les équations annoncées sont les équations (15) et (18), où il faut observer que Π est homogène de degré 1 en α, β, γ . Elles devront être intégrées en tenant compte de (19). Mais il faut remarquer que l'intégrale première $\Pi = \text{const.}$ résulte de (15) et (18), et que l'on pourrait remplacer l'hypothèse $\varpi = 1$ par l'hypothèse plus générale $\varpi = \text{const.}$, sans altérer les calculs précédents. La seule particularité qui subsiste réellement est donc relative à l'homogénéité de Π .

Remarquons enfin que, à cause de cette homogénéité, la condition (19) se remplace par

$$(21) \quad \alpha dx + \beta dy + \gamma dz - dt = 0,$$

qui résulte aussi de l'interprétation géométrique de $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$; car ce n'est alors que l'équation (20) du plan tangent à Ψ_A .

4. On peut encore se débarrasser de l'hypothèse relative à l'homogénéité de Π . Supposons en effet que, l'équation du plan tangent courant à la surface caractéristique Ψ_A étant toujours supposée écrite sous la forme

$$(20) \quad \alpha X + \beta Y + \gamma Z - 1 = 0,$$

l'équation tangentielle de cette surface soit donnée sous une forme quelconque

$$(22) \quad \Psi(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

Cette équation est équivalente à (19), qui s'en tirerait en résolvant par rapport à ϖ l'équation (22) rendue homogène, c'est-à-dire

$$(23) \quad \bar{\Psi} = \Psi\left(x, y, z, \frac{\alpha}{\varpi}, \frac{\beta}{\varpi}, \frac{\gamma}{\varpi}\right) = 0,$$

et en faisant $\varpi = 1$ dans l'équation (11) ainsi obtenue.

On en conclut que, moyennant (23), on a identiquement

$$d\Pi = \frac{-\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} dx - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial y} dy - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial z} dz - \frac{1}{\varpi} \left[\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \left(\frac{\alpha}{\varpi}\right)} d\alpha + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \left(\frac{\beta}{\varpi}\right)} d\beta + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \left(\frac{\gamma}{\varpi}\right)} d\gamma \right]}{-\frac{1}{\varpi^2} \left[\alpha \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \left(\frac{\alpha}{\varpi}\right)} + \beta \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \left(\frac{\beta}{\varpi}\right)} + \gamma \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \left(\frac{\gamma}{\varpi}\right)} \right]};$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi}{\partial x} &= \bar{M} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x}, & \frac{\partial \Pi}{\partial y} &= \bar{M} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial y}, & \frac{\partial \Pi}{\partial z} &= \bar{M} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial z}, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} &= \frac{\bar{M}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \left(\frac{\alpha}{\bar{\omega}}\right)}, & \frac{\partial \Pi}{\partial \beta} &= \frac{\bar{M}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \left(\frac{\beta}{\bar{\omega}}\right)}, & \frac{\partial \Pi}{\partial \gamma} &= \frac{\bar{M}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \left(\frac{\gamma}{\bar{\omega}}\right)}, \\ \frac{1}{\bar{M}} &= \frac{1}{\bar{\omega}^2} \left[\alpha \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \left(\frac{\alpha}{\bar{\omega}}\right)} + \beta \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \left(\frac{\beta}{\bar{\omega}}\right)} + \gamma \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \left(\frac{\gamma}{\bar{\omega}}\right)} \right].\end{aligned}$$

Et, dans l'hypothèse (17), c'est-à-dire (19), c'est-à-dire (22), on a donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi}{\partial x} &= M \frac{\partial \Psi}{\partial x}, & \frac{\partial \Pi}{\partial y} &= M \frac{\partial \Psi}{\partial y}, & \frac{\partial \Pi}{\partial z} &= M \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} &= M \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}, & \frac{\partial \Pi}{\partial \beta} &= M \frac{\partial \Psi}{\partial \beta}, & \frac{\partial \Pi}{\partial \gamma} &= M \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma}, \\ \frac{1}{M} &= \alpha \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} + \beta \frac{\partial \Psi}{\partial \beta} + \gamma \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma}.\end{aligned}$$

De sorte que le système (15), (18), (19) peut se remplacer par le système

$$(24) \quad \frac{dx}{\frac{\partial \Psi}{\partial x}} = \frac{d\beta}{\frac{\partial \Psi}{\partial \beta}} = \frac{d\gamma}{\frac{\partial \Psi}{\partial \gamma}} = \frac{dx}{\frac{\partial \Psi}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial \Psi}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial \Psi}{\partial z}} = d\tau;$$

$$(22) \quad \Psi(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = 0;$$

$$(25) \quad dt = \left(\alpha \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} + \beta \frac{\partial \Psi}{\partial \beta} + \gamma \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma} \right) d\tau;$$

dont l'intégration revient à celle du système (24), (22), de forme entièrement analogue à celle du système (15), (18), (19), et à une quadrature. Et, dans ces équations, la fonction Ψ est absolument quelconque.

Mais, si l'on y remplaçait l'équation (22) par une autre, de la forme

$$\Psi(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = \text{const.},$$

on n'obtiendrait plus la représentation du même groupe de transformations de contact. Tandis que, au numéro précédent, remplacer (19) par une équation $\Pi = \text{const.}$ revient à remplacer seu-

lement t par kt , où k est une constante; ce qui n'altère pas le groupe de transformations de contact considéré.

Au point de vue géométrique, le système des surfaces caractéristiques $\Psi = h$ (où k est constant) est essentiellement différent de celui des surfaces (22); tandis que le système des surfaces $\Pi = k$ a même forme que celui des surfaces $\Pi = 1$.

Remarquons encore que l'équation (25) peut se remplacer par l'équation

$$(21) \quad \alpha dx + \beta dy + \gamma dz - dt = 0.$$

Ce qui résulte aussi de l'intégration géométrique des quantités $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, comme au numéro précédent.

On pourrait supposer, en particulier, que l'équation (22) soit de la forme

$$\Psi = G(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) - 1 = 0,$$

G étant homogène de degré m en α, β, γ ; on a alors le système canonique

$$(24 \text{ bis}) \quad \begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \frac{\partial G}{\partial \alpha}, & \frac{dy}{d\tau} = \frac{\partial G}{\partial \beta}, & \frac{dz}{d\tau} = \frac{\partial G}{\partial \gamma}, \\ \frac{d\alpha}{d\tau} = -\frac{\partial G}{\partial x}, & \frac{d\beta}{d\tau} = -\frac{\partial G}{\partial y}, & \frac{d\gamma}{d\tau} = -\frac{\partial G}{\partial z}; \end{cases}$$

avec la condition

$$(22 \text{ bis}) \quad G(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = 1,$$

et, pour déterminer le temps, la formule simple

$$(25 \text{ bis}) \quad dt = m d\tau.$$

On pourra donc remplacer τ par t sans altérer le groupe de transformations de contact; et l'on pourra aussi, pour les raisons expliquées plus haut, supprimer la condition (22 bis). Tout cela revenant à changer seulement l'unité de temps.

II. — PROBLÈMES D'INTÉGRATION.

5. Le problème d'intégration de la théorie précédente consiste à déterminer la propagation d'une onde quelconque connaissant le système des surfaces caractéristiques, c'est-à-dire le système des

ondes élémentaires correspondant à chaque point de milieu.

Ce problème sera résolu si l'on détermine les équations finies du groupe de transformations de contact qui correspond au mode de propagation considéré, c'est-à-dire si l'on intègre le système (3). Soient, en effet,

$$(26) \quad \begin{cases} x = \mathcal{X}(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 | t), \\ y = \mathcal{Y}(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 | t), \\ z = \mathcal{Z}(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 | t), \\ p = \mathcal{P}(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 | t), \\ q = \mathcal{Q}(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 | t), \end{cases}$$

les équations ainsi obtenues, où $t = 0$ correspond à la transformation identique. Si l'onde origine est donnée, on pourra supposer que ses éléments de contact $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ sont donnés en fonction de deux paramètres, et, en portant ces expressions dans les formules (26), on aura l'onde qui en résulte au bout du temps t .

Mais on peut prendre la question autrement en cherchant directement les *familles d'ondes*, c'est-à-dire l'ensemble des ondes issues successivement d'une même onde origine. L'équation générale d'une telle famille peut être supposée mise sous la forme

$$(27) \quad f(x, y, z) = t,$$

et tout revient à chercher les fonctions f correspondantes.

Si nous associons à l'équation (27) le système

$$(28) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + p \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + q \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

de manière à obtenir le système qui définit l'ensemble des éléments de contact de l'onde origine, la condition nécessaire et suffisante qui détermine f s'obtiendra en écrivant que ce système (27), (28) est invariant par la transformation infinitésimale

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial p} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial q} \frac{\partial F}{\partial y} + \left(p \frac{\partial W}{\partial p} + q \frac{\partial W}{\partial q} - W \right) \frac{\partial F}{\partial z} \\ - \left(\frac{\partial W}{\partial x} + p \frac{\partial W}{\partial z} \right) \frac{\partial F}{\partial p} - \left(\frac{\partial W}{\partial y} + q \frac{\partial W}{\partial z} \right) \frac{\partial F}{\partial q}. \end{aligned}$$

Comme cette transformation change toute multiplicité en une

multiplicité, il suffira d'opérer sur l'équation (27). On vérifierait, du reste, par un calcul direct, que les conditions qu'on obtiendrait en opérant sur les équations (28) sont des conséquences de celle que nous allons obtenir.

Nous écrivons donc que

$$\frac{\partial W}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial q} \frac{\partial f}{\partial y} + \left(p \frac{\partial W}{\partial p} + q \frac{\partial W}{\partial q} - W \right) \frac{\partial f}{\partial z} - 1 = 0$$

est une conséquence des équations (27), (28), ce qui se réduit à l'équation

$$(29) \quad \frac{\partial f}{\partial z} W \left(x, y, z, -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}, -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \right) + 1 = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante cherchée est donc que f soit une intégrale de cette équation aux dérivées partielles (29).

Les considérations précédentes nous fournissent alors tous les faits essentiels relatifs à l'intégration de cette équation.

D'abord elle admet une solution, et une seule, telle que l'équation (27) se réduise, pour $t = 0$, à l'équation d'une surface donnée; ce qui caractérise le degré de généralité de l'intégrale générale de (29).

Ensuite, l'intégration de (29) résulte de celle du système (3), puisque, si l'on remplace dans les équations (26) x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 par les fonctions de deux paramètres u, v correspondant à une onde origine arbitraire, il n'y a qu'à résoudre par rapport à t , en éliminant u et v , les trois premières équations (26) pour obtenir la solution générale (12) cherchée. On peut, par exemple, prendre l'onde origine

$$(30) \quad \begin{cases} x_0 = \frac{\partial \theta}{\partial u}, & y_0 = \frac{\partial \theta}{\partial v}, & z_0 = u \frac{\partial \theta}{\partial u} + v \frac{\partial \theta}{\partial v} - \theta, \\ p_0 = u, & q_0 = v, \end{cases}$$

θ étant une fonction arbitraire de u et v seulement.

6. On voit aussi qu'inversement l'intégration de l'équation aux dérivées partielles (29) entraîne celle du système (3) qui lui est associé. Car, pour avoir le mouvement d'un élément de contact quelconque, il suffira de prendre deux ondes origines qui aient

en commun ce seul élément de contact. Les ondes qui en résulteront auront constamment en commun un élément de contact, qui, pour chaque valeur de t , sera la position de l'élément de contact initial considéré.

Pour pouvoir appliquer cette méthode, il suffit même de connaître ∞^3 familles d'ondes; car, parmi les ∞^3 ondes origines, il y en aura une passant par un élément de contact E_0 arbitrairement donné, que l'on pourra considérer comme commun à cette onde origine et à deux autres ondes origines infiniment voisines convenablement choisies.

Supposons, à cet effet, que l'on connaisse une intégrale de (29), dépendant *essentielllement* de deux constantes arbitraires non additives. Soit $f(x, y, z, a, b)$ cette intégrale. Les ∞^3 ondes origines à considérer seront définies par l'équation

$$(31) \quad f(x, y, z, a, b) = c;$$

le point de contact de l'une d'elles, avec deux ondes infiniment voisines (du même système) quelconques, s'obtient en adjoignant à cette équation (31) les deux équations

$$(32) \quad \frac{\partial f}{\partial a} = a', \quad \frac{\partial f}{\partial b} = b',$$

et l'élément de contact commun est défini par (31), (32) et

$$(33) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + p \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + q \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Pour passer de là à la position de cet élément au bout du temps t , il n'y a qu'à remplacer l'équation (31) par l'équation

$$(34) \quad f(x, y, z, a, b) = c + t,$$

qui donne ce que sont devenues alors les ∞^3 ondes (31).

En résumé, l'intégrale générale du système (3) est donnée par

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x, y, z, a, b) = c + t, \\ \frac{\partial f}{\partial a} = a', \quad \frac{\partial f}{\partial b} = b', \\ \frac{\partial f}{\partial x} + p \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + q \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \end{array} \right.$$

où les cinq constantes a, b, c, a', b' doivent être déterminées par les conditions initiales.

Enfin, comme une onde origine quelconque pourra être considérée comme l'enveloppe de ∞^2 ondes origines (31) convenablement choisies

$$f(x, y, z, a, b) = \chi(a, b),$$

qui deviennent, au bout du temps t ,

$$(36) \quad f(x, y, z, a, b) = \chi(a, b) + t,$$

la solution générale de l'équation (29) s'obtiendrait en tirant a et b des équations

$$(37) \quad \frac{\partial f}{\partial a} - \frac{\partial \chi}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial b} - \frac{\partial \chi}{\partial b} = 0,$$

et en portant les valeurs trouvées dans (36); la fonction χ étant alors une fonction arbitraire,

7. En reprenant les notations des n^{os} 3 et 4, on peut remplacer l'équation aux dérivées partielles (29) par une équation quelconque ne contenant pas la fonction inconnue.

L'identité (14) donne

$$W\left(x, y, z, -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}, -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}\right) = \Pi\left(x, y, z, -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}, -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}, -1\right),$$

et, à cause de l'homogénéité de Π , l'équation (29) se réduit à

$$(38) \quad \Pi\left(x, y, z, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = 1.$$

Pour simplifier les notations, remarquons que trouver une équation de la forme (29) revient à calculer t comme fonction de x, y, z , c'est-à-dire qu'on peut remplacer dans ce qui précède la lettre f par la lettre t ; et, si l'on pose

$$(39) \quad \alpha = \frac{\partial t}{\partial x}, \quad \beta = \frac{\partial t}{\partial y}, \quad \gamma = \frac{\partial t}{\partial z},$$

l'équation (19)

$$(19) \quad \Pi(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = 1$$

est déjà l'équation aux dérivées partielles (38) à laquelle nous sommes arrivés.

Toutes les théories des nos 5, 6 (théorie des caractéristiques et théorie des intégrales complètes) s'appliquent immédiatement à cette équation, en remplaçant le système (3) par le système qu'on en a déduit au n° 3 par changement de variables, c'est-à-dire

$$(40) \quad \frac{dx}{\frac{\partial \Pi}{\partial z}} = \frac{dy}{\frac{\partial \Pi}{\partial \beta}} = \frac{dz}{\frac{\partial \Pi}{\partial \gamma}} = \frac{dz}{-\frac{\partial \Pi}{\partial x}} = \frac{d\beta}{-\frac{\partial \Pi}{\partial y}} = \frac{d\gamma}{-\frac{\partial \Pi}{\partial z}} = dt;$$

auquel il faut adjoindre l'équation de condition (19). L'équation (33) devra aussi être remplacée par les équivalentes

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\alpha} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\beta} = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\gamma}.$$

8. On peut enfin, comme au n° 4, remplacer l'équation (19) par une équation équivalente de forme quelconque

$$(22) \quad \Psi(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

Il n'y aura qu'à remplacer le système (40) par le système (24), (25)

$$(41) \quad \frac{dx}{\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}} = \frac{dy}{\frac{\partial \Psi}{\partial \beta}} = \frac{dz}{\frac{\partial \Psi}{\partial \gamma}} = \frac{dt}{\alpha \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} + \beta \frac{\partial \Psi}{\partial \beta} + \gamma \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma}} = \frac{dz}{-\frac{\partial \Psi}{\partial x}} = \frac{d\beta}{-\frac{\partial \Psi}{\partial y}} = \frac{d\gamma}{-\frac{\partial \Psi}{\partial z}}.$$

Enfin l'équation (21), qui y est implicitement contenue, s'écrit

$$(21) \quad dt = \alpha dx + \beta dy + \gamma dz.$$

et s'accorde entièrement avec les notations (39), pour les dérivées partielles.

9. On voit ainsi comment l'équation générale des surfaces caractéristiques Ψ_A peut s'interpréter comme l'équation aux dérivées partielles des familles d'ondes. On peut expliquer ce fait géométriquement, sans faire appel à la théorie des groupes de transformations invoquée au n° 3.

Écrivons en effet que la surface

$$(42) \quad f(x, y, z) = t + \delta t$$

est tangente à chacune des ondes élémentaires issues des divers points (x_0, y_0, z_0) appartenant à l'onde, à l'instant t , c'est-à-dire tels que l'on ait

$$(43) \quad f(x_0, y_0, z_0) = t.$$

L'équation (42), quand on transporte l'origine en un tel point, devient

$$f(x_0 + X, y_0 + Y, z_0 + Z) = t + \delta t,$$

et le plan tangent en l'un de ses points $X = \delta x, Y = \delta y, Z = \delta z$ est

$$(X - \delta x) \frac{\partial f}{\partial (x_0 + \delta x)} + (Y - \delta y) \frac{\partial f}{\partial (y_0 + \delta y)} + (Z - \delta z) \frac{\partial f}{\partial (z_0 + \delta z)} = 0.$$

L'équation tangentielle de l'onde élémentaire étant, d'autre part,

$$\delta t \Pi(x_0, y_0, z_0, \alpha, \beta, \gamma) - 1 = 0,$$

on a la condition

$$\begin{aligned} \delta t \Pi \left[x_0, y_0, z_0, \frac{\partial f}{\partial (x_0 + \delta x)}, \frac{\partial f}{\partial (y_0 + \delta y)}, \frac{\partial f}{\partial (z_0 + \delta z)} \right] \\ = \delta x \frac{\partial f}{\partial (x_0 + \delta x)} + \delta y \frac{\partial f}{\partial (y_0 + \delta y)} + \delta z \frac{\partial f}{\partial (z_0 + \delta z)}. \end{aligned}$$

Négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier, cette relation devient

$$\delta t \Pi \left(x_0, y_0, z_0, \frac{\partial f}{\partial x_0}, \frac{\partial f}{\partial y_0}, \frac{\partial f}{\partial z_0} \right) = \delta x \frac{\partial f}{\partial x_0} + \delta y \frac{\partial f}{\partial y_0} + \delta z \frac{\partial f}{\partial z_0}.$$

Et comme l'on a aussi

$$f(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y, z_0 + \delta z) = t + \delta t,$$

qui se réduit, en y négligeant aussi les termes d'ordre supérieur au premier, et en tenant compte de (43), à

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y_0} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z_0} \delta z = \delta t,$$

il reste, en définitive,

$$\Pi \left(x_0, y_0, z_0, \frac{\partial f}{\partial x_0}, \frac{\partial f}{\partial y_0}, \frac{\partial f}{\partial z_0} \right) = 1;$$

et, comme le point (x_0, y_0, z_0) est quelconque, c'est précisément l'équation aux dérivées partielles qu'il s'agissait de retrouver.

III. - LES TRAJECTOIRES.

10. Nous appellerons *trajectoire*, dans le mode de propagation considéré, le lieu des positions successives du point faisant partie d'un élément de contact quelconque dans le mouvement de cet élément de contact. Ces trajectoires s'obtiennent donc, par l'intégration du système (3), en considérant p, q comme des inconnues auxiliaires, c'est-à-dire qu'elles sont définies par les trois premières des équations (26). Si l'on tient compte, comme cela a lieu dans ces équations, de la manière dont elles sont décrites, elles dépendent de cinq constantes arbitraires; mais elles forment seulement un système de ∞^1 courbes de l'espace.

On peut les définir par un système différentiel analogue aux *équations de Lagrange* en Dynamique.

Nous introduirons à cet effet l'équation ponctuelle de la surface caractéristique du milieu, c'est-à-dire de la surface Ψ_λ . Soit

$$(44) \quad \Omega(x, y, z, X, Y, Z) = 1$$

cette équation. Nous pouvons supposer que Ω est homogène et du premier degré en X, Y, Z ; on le montrerait en partant d'une forme quelconque de l'équation de cette surface, en la rendant homogène et en résolvant par rapport à la variable d'homogénéité, comme on a fait, dans une circonstance analogue, au n° 4. On est, du reste, naturellement conduit à introduire cette forme particulière d'équation, parce qu'elle donne immédiatement l'équation de l'onde élémentaire qui serait

$$(45) \quad \Omega(x, y, z, X, Y, Z) = dt.$$

Écrivons que cette surface (44) est la même que celle qui est définie, en coordonnées tangentielles, par l'équation (19)

$$(19) \quad U(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = 1.$$

Le plan tangent à (44), en un point quelconque

$$X = x', \quad Y = y', \quad Z = z'.$$

a pour équation

$$(46) \quad X \frac{\partial \Omega}{\partial x'} + Y \frac{\partial \Omega}{\partial y'} + Z \frac{\partial \Omega}{\partial z'} = x' \frac{\partial \Omega}{\partial x'} + y' \frac{\partial \Omega}{\partial y'} + z' \frac{\partial \Omega}{\partial z'},$$

en posant, pour abrégér,

$$\Omega = \Omega(x, y, z, x', y', z');$$

et l'on a

$$\Omega = x' \frac{\partial \Omega}{\partial x'} + y' \frac{\partial \Omega}{\partial y'} + z' \frac{\partial \Omega}{\partial z'} = 1,$$

de sorte que cette équation (46) est simplement

$$X \frac{\partial \Omega}{\partial x'} + Y \frac{\partial \Omega}{\partial y'} + Z \frac{\partial \Omega}{\partial z'} = 1.$$

On obtiendra donc l'équation (19) en posant

$$(47) \quad \alpha = \frac{\partial \Omega}{\partial x'}, \quad \beta = \frac{\partial \Omega}{\partial y'}, \quad \gamma = \frac{\partial \Omega}{\partial z'},$$

et éliminant x', y', z' entre (47) et

$$(48) \quad \Omega(x, y, z, x', y', z') = 1.$$

Par suite, la relation différentielle unique qui résulte de (19), c'est-à-dire

$$(49) \quad \frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz + \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \Pi}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial \Pi}{\partial \gamma} d\gamma = 0,$$

est une conséquence des relations (47), (48) et de celles qu'on en déduit par différentiation totale.

Or, en déduisant de l'équation tangentielle (19) l'équation ponctuelle correspondante, on serait conduit à écrire les relations

$$(50) \quad x' = \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha}, \quad y' = \frac{\partial \Pi}{\partial \beta}, \quad z' = \frac{\partial \Pi}{\partial \gamma}$$

qui sont, par suite, des conséquences de (47) et (48); de sorte que (49) devient

$$(51) \quad \frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz + x' dx + y' dy + z' dz = 0.$$

On tire alors de (47)

$$\begin{aligned} x' dz + y' d\beta + z' d\gamma = & \left(x' \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x' \partial x} + y' \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y' \partial x} + z' \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z' \partial x} \right) dx \\ & + \dots \dots \dots \\ & + \left(x' \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x'^2} + y' \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y' \partial x'} + z' \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z' \partial x'} \right) dx' \\ & + \dots \dots \dots \end{aligned}$$

qui se réduit, à cause du degré d'homogénéité de Ω et de ses dérivées partielles, à

$$x' dz + y' d\beta + z' d\gamma = \frac{\partial \Omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \Omega}{\partial y} dy + \frac{\partial \Omega}{\partial z} dz.$$

Et comme c'est la seule relation différentielle en $dx, dy, dz, dx, d\beta, d\gamma$ que l'on puisse tirer de (47) et (48), elle doit être identique à (51) si l'on tient compte des équations finies (47) et (48); c'est-à-dire que l'on a, comme conséquence du changement des coordonnées tangentielles en coordonnées ponctuelles effectué, les identités

$$(52) \quad \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial y} + \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial z} + \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0.$$

Cela posé, le changement de variables en question se fait immédiatement dans les équations (15), (18), (19). En comparant (15) et (50), on voit qu'il n'y a qu'à poser dans les formules précédentes

$$(53) \quad \frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{dz}{dt} = z'.$$

(Cela résulte d'ailleurs des considérations géométriques du n° 2.) Et les équations (18), comparées à (52) et à (47), donnent le système annoncé

$$(54) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x'} \right) - \frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y'} \right) - \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial z'} \right) - \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

auquel il faut adjoindre l'équation (48)

$$(48) \quad \Omega(x, y, z, x', y', z') = 1.$$

Ainsi se trouvent définies directement les trajectoires; et, si l'on a intégré ce système, on en déduit le mouvement des éléments de contact eux-mêmes au moyen des équations (47). On a donc là une forme nouvelle des équations d'une transformation de contact infinitésimale.

On peut remarquer qu'on déduit des équations (54), en multipliant par x' , y' , z' et ajoutant,

$$\frac{d}{dt} \left(x' \frac{\partial \Omega}{\partial x'} + y' \frac{\partial \Omega}{\partial y'} + z' \frac{\partial \Omega}{\partial z'} \right) - \frac{1}{dt} d\Omega = 0,$$

ce qui est une identité, vu l'homogénéité de Ω . Ces équations se réduisent donc, en réalité, à deux seulement.

11. Si l'on prenait l'équation de Ψ_A sous une forme quelconque équivalente à (44)

$$(55) \quad \Theta(x, y, z, x', y', z') = 0,$$

on aurait, en raisonnant comme au n° 4,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial x} &= L \frac{\partial \Theta}{\partial x}, & \frac{\partial \Omega}{\partial y} &= L \frac{\partial \Theta}{\partial y}, & \frac{\partial \Omega}{\partial z} &= L \frac{\partial \Theta}{\partial z}, \\ \frac{\partial \Omega}{\partial x'} &= L \frac{\partial \Theta}{\partial x'}, & \frac{\partial \Omega}{\partial y'} &= L \frac{\partial \Theta}{\partial y'}, & \frac{\partial \Omega}{\partial z'} &= L \frac{\partial \Theta}{\partial z'}, \\ \frac{1}{L} &= x' \frac{\partial \Theta}{\partial x'} + y' \frac{\partial \Theta}{\partial y'} + z' \frac{\partial \Theta}{\partial z'}. \end{aligned}$$

La première équation (54) deviendrait donc

$$\frac{d}{dt} \left(L \frac{\partial \Theta}{\partial x'} \right) - L \frac{\partial \Theta}{\partial x} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \Theta}{\partial x'} - \frac{\partial \Theta}{\partial x} = - \frac{\frac{dL}{dt}}{L} \frac{\partial \Theta}{\partial x'} = \left(\frac{d}{dt} \log \frac{1}{L} \right) \frac{\partial \Theta}{\partial x'}.$$

On aurait donc à adjoindre à l'équation (55) le système

$$(56) \quad \frac{\frac{d}{dt} \frac{\partial \Theta}{\partial x'} - \frac{\partial \Theta}{\partial x}}{\frac{\partial \Theta}{\partial x'}} = \frac{\frac{d}{dt} \frac{\partial \Theta}{\partial y'} - \frac{\partial \Theta}{\partial y}}{\frac{\partial \Theta}{\partial y'}} = \frac{\frac{d}{dt} \frac{\partial \Theta}{\partial z'} - \frac{\partial \Theta}{\partial z}}{\frac{\partial \Theta}{\partial z'}}.$$

On voit, de plus, que la valeur commune de ces rapports (56)

est

$$\frac{d}{dt} \log \left(x' \frac{\partial \Theta}{\partial x'} + y' \frac{\partial \Theta}{\partial y'} + z' \frac{\partial \Theta}{\partial z'} \right),$$

mais c'est une conséquence de l'équation (55).

Le système différentiel général des trajectoires est donc formé seulement des équations (56) et (55).

Supposons, en particulier, que l'équation (55) soit de la forme

$$(57) \quad \Theta = H(x, y, z, x', y', z') - 1 = 0,$$

H étant homogène de degré m en x', y', z' . On peut toujours faire en sorte qu'il en soit ainsi en prenant pour H une puissance de Ω . On a alors

$$x' \frac{\partial H}{\partial x'} + y' \frac{\partial H}{\partial y'} + z' \frac{\partial H}{\partial z'} = mH$$

et la valeur commune des rapports (56) est zéro. Les équations des trajectoires prennent alors la forme de Lagrange

$$(58) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial x'} - \frac{\partial H}{\partial x} = 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial y'} - \frac{\partial H}{\partial y} = 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial z'} - \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

avec la condition (57). Mais, si $m \neq 1$, on peut supprimer la condition (57). Car, en multipliant les équations (58) par x', y', z' et ajoutant, il vient

$$\frac{d}{dt} \left(x' \frac{\partial H}{\partial x'} + y' \frac{\partial H}{\partial y'} + z' \frac{\partial H}{\partial z'} \right) - \frac{dH}{dt} = (m-1) \frac{dH}{dt} = 0.$$

c'est-à-dire

$$(59) \quad H(x, y, z, x', y', z') = h = \text{const.}$$

Or, remplacer dans l'équation (57) le terme -1 par le terme $-h$ revient à remplacer les surfaces caractéristiques Ψ_A par les surfaces homothétiques (avec un rapport d'homothétie constant) et n'altère pas essentiellement les trajectoires. D'une manière plus

précise, cela revient à remplacer t par $h^{\frac{1}{m}}t$ dans toutes les équations.

Il est clair que, si l'on partait inversement d'un système (58), où H serait une fonction homogène en x', y', z' quelconque, on pourrait toujours l'interpréter comme correspondant à une transformation de contact infinitésimale et le ramener, par suite, à la forme canonique.

12. Revenons aux équations (54); elles ne contiennent le temps qu'en apparence. En effet, $\frac{\partial \Omega}{\partial x'}$, $\frac{\partial \Omega}{\partial y'}$, $\frac{\partial \Omega}{\partial z'}$ sont de degré zéro en x', y', z' ; de sorte qu'on a, par exemple,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x'} = \frac{\partial \Omega(x, y, z, dx, dy, dz)}{\partial(dx)}.$$

Au contraire, $\frac{\partial \Omega}{\partial x}$, $\frac{\partial \Omega}{\partial y}$, $\frac{\partial \Omega}{\partial z}$ sont homogènes de degré un; et l'on a, par exemple,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} dt = \frac{\partial \Omega(x, y, z, dx, dy, dz)}{\partial x};$$

donc, en posant, pour abréger,

$$(57) \quad \bar{\Omega} = \Omega(x, y, z, dx, dy, dz),$$

les équations (54) s'écrivent

$$(58) \quad \left\{ \begin{array}{l} d \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial(dx)} - \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial x} = 0, \\ d \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial(dy)} - \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial y} = 0, \\ d \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial(dz)} - \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial z} = 0. \end{array} \right.$$

Et l'on voit qu'elles définissent les trajectoires, indépendamment de la loi suivant laquelle elles sont décrites. Bien entendu, elles se réduisent à deux équations distinctes seulement.

C'est l'équation (48) qui détermine ensuite la manière dont les trajectoires sont décrites, car elle s'écrit

$$(59) \quad \Omega(x, y, z, dx, dy, dz) = dt.$$

c'est-à-dire que t est donné par la quadrature

$$(60) \quad t = \int \Omega(x, y, z, dx, dy, dz) = \int \bar{\Omega}.$$

13. Les équations (58) donnent une propriété caractéristique des trajectoires; elles expriment, en effet, que la variation de l'intégrale

$$(61) \quad \Theta = \int \Omega(x, y, z, dx, dy, dz)$$

est nulle quand on se déplace sur une trajectoire; et la formule (60) montre que le temps t est justement la valeur correspondante de cette intégrale (61).

Cherchons à interpréter l'intégrale (61) prise entre deux points A et B d'une courbe quelconque. Il suffit pour cela de se représenter cette courbe comme un canal, de diamètre infiniment petit, à l'intérieur duquel l'ébranlement se propage sans frottements. Nous admettrons que, si l'ébranlement atteint à un instant quelconque le point M de cette courbe, de coordonnées x, y, z , au bout du temps dt il atteint le point M' de la courbe qui se trouve sur l'onde élémentaire qui a M pour origine; c'est-à-dire que le temps qu'il met pour aller de M en M' est donné, à un infiniment petit près d'ordre supérieur, par l'équation

$$\Omega(x, y, z, dx, dy, dz) = dt.$$

Alors l'intégrale (61) représente le temps que met l'ébranlement à se propager de A et B en suivant la courbe considérée.

Et les trajectoires sont les courbes pour lesquelles la variation de ce temps (quand on les déforme infiniment peu) est nulle.

Si nous cherchons à quelle condition elles correspondent au temps *minimum*, il nous faudra, suivant la théorie classique de la variation seconde, exprimer que la forme quadratique

$$(62) \quad \sum \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x'^2} \xi^2 + 2 \sum \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y' \partial z'} \eta \zeta$$

est constamment positive, sauf pour les valeurs de la forme

$$\xi = \lambda x', \quad \eta = \lambda y', \quad \zeta = \lambda z'.$$

Nous allons interpréter cette condition géométriquement.

Considérons, à cet effet, en un point quelconque $A(x, y, z)$ d'une trajectoire, la surface Ψ_A caractéristique. La tangente en A à cette trajectoire perce Ψ_A au point P qui a pour coordonnées (l'origine étant transportée en A) x', y', z' ; car on peut supposer que l'on a

$$(63) \quad \Omega(x, y, z, x', y', z') - 1 = 0.$$

Le plan tangent en P à Ψ_A a pour équation (voir n° 10)

$$(64) \quad X \frac{\partial \Omega}{\partial x'} + Y \frac{\partial \Omega}{\partial y'} + Z \frac{\partial \Omega}{\partial z'} - 1 = 0.$$

Cherchons la position d'un point quelconque N de Ψ_A , supposé infiniment voisin de P , par rapport à ce plan tangent. Les coordonnées de N étant $x' + \xi, y' + \eta, z' + \zeta$, il faudra chercher le signe de

$$(x' + \xi) \frac{\partial \Omega}{\partial x'} + (y' + \eta) \frac{\partial \Omega}{\partial y'} + (z' + \zeta) \frac{\partial \Omega}{\partial z'} - 1,$$

qui se réduit, à cause de (63), à

$$(65) \quad \xi \frac{\partial \Omega}{\partial x'} + \eta \frac{\partial \Omega}{\partial y'} + \zeta \frac{\partial \Omega}{\partial z'}.$$

Or, le point N étant sur Ψ_A , on a

$$\Omega(x' + \xi, y' + \eta, z' + \zeta) - 1 = 0,$$

c'est-à-dire, en développant,

$$\Sigma \xi \frac{\partial \Omega}{\partial x'} + \frac{1}{1.2} \left(\Sigma \xi^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x'^2} + 2 \Sigma \eta \xi \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y' \partial x'} \right) + \dots = 0$$

ou encore

$$(66) \quad \Sigma \xi \frac{\partial \Omega}{\partial x'} = - \frac{1}{1.2} \left(\Sigma \xi^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x'^2} + 2 \Sigma \eta \xi \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y' \partial x'} \right) + \dots$$

Si donc la forme (62) est positive, le résultat de substitution est négatif, c'est-à-dire du même signe que pour le point

$$M(X = 0, Y = 0, Z = 0).$$

Les valeurs exceptées $\xi = \lambda x', \eta = \lambda y', \zeta = \lambda z'$ ne corres-

pondent à aucun point N, car la condition

$$\Omega(x' + \lambda x', y' + \lambda y', z' + \lambda z') = 1$$

se réduit, à cause de l'homogénéité de Ω , à

$$1 + \lambda = 1,$$

c'est-à-dire

$$\lambda = 0,$$

ce qui donnerait le point P lui-même.

Si donc la condition analytique du minimum est remplie, la surface Ψ_A a, en P, ses deux courbures de même signe, et tourne sa concavité vers M.

Supposons réciproquement cette condition géométrique remplie. La forme (62) a son discriminant nul, à cause des relations que donne le théorème d'Euler appliqué aux fonctions homogènes de degré zéro $\frac{\partial \Omega}{\partial x'}$, $\frac{\partial \Omega}{\partial y'}$, $\frac{\partial \Omega}{\partial z'}$ (voir n° 10). Si elle était une différence de deux carrés, elle s'annulerait pour deux relations de la forme

$$(67) \quad A\xi + B\eta + C\zeta = 0$$

vérifiées pour $\xi = \lambda x'$, $\eta = \lambda y'$, $\zeta = \lambda z'$, puisque ces valeurs annulent les dérivées partielles de cette forme. Ces relations représentent géométriquement deux plans passant par la droite AP et qui, dans l'hypothèse faite sur la forme de Ψ_A , coupent cette surface suivant des courbes passant en P. Il y aurait donc des points de la surface, infiniment voisins de P, et pour lesquels, en vertu de l'équation (66), leur distance au plan tangent en P serait d'ordre supérieur au second. Or cela est contradictoire avec l'hypothèse de deux courbures de même signe.

La forme (62) ne peut pas non plus se réduire à un carré parfait, car elle s'annulerait de nouveau pour tous les points d'un plan passant par AP, et la même contradiction se présenterait.

La condition géométrique trouvée est donc équivalente à la condition analytique classique.

Nous concluons donc que *les trajectoires sont les courbes suivant lesquelles les ébranlements se propagent le plus rapidement toutes les fois que les ondes élémentaires sont des surfaces ayant en tous leurs points leurs deux courbures de*

même sens, et tournant toujours leur concavité vers leurs origines respectives.

L'application de ce résultat aux divers cas envisagés en Optique serait immédiate. Il est clair que, d'après la théorie du calcul des variations, il n'est vrai qu'en général, c'est-à-dire qu'autant que les arcs de trajectoires considérés ne contiennent pas de couples de foyers (points conjugués de Weierstrass).

14. La propriété des trajectoires de correspondre à l'évanouissement de la variation d'une intégrale subsiste quel que soit le système différentiel qui les définisse.

Le système (15)(18)(19) est fourni par la condition

$$(68) \quad \delta \int \alpha dx + \beta dy + \gamma dz = 0,$$

lorsque α, β, γ sont liés par la condition (19)

$$(19) \quad \Pi(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = 1$$

et que t est donné par (21)

$$(21) \quad dt = \alpha dx + \beta dy + \gamma dz.$$

Le système (3) est donné par la condition équivalente

$$(69) \quad \delta \int \frac{dz - p dx - q dy}{W} = 0$$

avec l'équation qui définit le temps, c'est-à-dire

$$(70) \quad dt = \frac{p dx + q dy - dz}{W}.$$

Mais ces nouvelles formes du théorème, qui se rapprochent de résultats exposés par MM. Yoshiye ⁽¹⁾ et E.-R. Hedrick ⁽²⁾, d'après les idées de M. Hilbert, se prêtent moins bien à une interprétation géométrique simple.

15. Nous insisterons, en vue des applications, sur la propriété des trajectoires, relative aux familles d'ondes, qui résulte de

⁽¹⁾ *Math. Annalen*, t. LVII, p. 185.

⁽²⁾ *Ann. of Math.*, 2^e série, t. IV, p. 141, 157.

l'assimilation de la propagation des ondes à un groupe de transformations de contact. Et, pour rendre les énoncés plus concis, nous introduirons le mode de langage suivant :

Soient A un point quelconque, E un élément de contact de ce point; à cet élément correspond une trajectoire déterminée; nous dirons que la direction de la tangente à la trajectoire est conjuguée à l'élément et aussi que la trajectoire elle-même est conjuguée à l'élément. Si α, β, γ sont les coefficients de direction de la normale à l'élément et x', y', z' ceux de la trajectoire, les conditions qui expriment que la trajectoire est conjuguée à l'élément sont les équations (47) que nous écrirons, en supposant que α, β, γ ne sont ici déterminés, ainsi que x', y', z' , qu'à un facteur près,

$$(71) \quad \frac{\alpha}{\frac{\partial \Omega}{\partial x'}} = \frac{\beta}{\frac{\partial \Omega}{\partial y'}} = \frac{\gamma}{\frac{\partial \Omega}{\partial z'}}.$$

Nous dirons de même que la trajectoire est conjuguée en A à toute surface et à toute courbe admettant l'élément E pour l'un de ses éléments de contact. Dans le cas d'une surface, le fait s'exprimera toujours par les équations (71), où α, β, γ seront coefficients de direction de la normale à la surface. Dans le cas d'une courbe ayant ξ, η, ζ pour coefficients de direction de sa tangente, on aura la condition

$$(72) \quad \xi \frac{\partial \Omega}{\partial x'} + \eta \frac{\partial \Omega}{\partial y'} + \zeta \frac{\partial \Omega}{\partial z'} = 0.$$

Elle exprime que la tangente à la courbe est parallèle à une des droites qui sont tangentes à l'onde élémentaire au point où cette onde est percée par la direction de la trajectoire.

On peut dès lors énoncer les faits suivants :

Si ∞^2 trajectoires sont conjuguées à une surface, elles sont conjuguées à ∞^1 surfaces et les arcs des trajectoires compris entre deux de ces surfaces correspondent à des temps égaux.

Si ∞^1 trajectoires sont conjuguées à une courbe, elles sont conjuguées à ∞^1 courbes et les arcs des trajectoires compris entre deux de ces courbes correspondent à des temps égaux.

Ces deux énoncés résultent, en effet, de la propagation d'une onde origine, surface ou courbe, au moyen du groupe de transformations de contact considéré. Relativement au second énoncé, on remarquera que les ∞^1 courbes issues de la courbe donnée sont tracées sur les ondes superficielles issues de la courbe qui constitue l'onde origine. On remarquera aussi qu'étant données ∞^1 trajectoires formant un système continu, il existe toujours une famille de ∞^1 courbes auxquelles elles sont conjuguées; car les coordonnées x, y, z d'un point de l'une quelconque de ces trajectoires sont des fonctions de t et d'un paramètre s

$$(74) \quad x = f(t, s), \quad y = g(t, s), \quad z = h(t, s)$$

et les courbes cherchées seront définies par l'équation différentielle

$$(75) \quad \frac{\partial \Omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \Omega}{\partial y} dy + \frac{\partial \Omega}{\partial z} dz = 0,$$

où x, y, z, dx, dy, dz devront être remplacés par les fonctions (74) et leurs différentielles et où x', y', z' doivent avoir les valeurs

$$(76) \quad x' = \frac{\partial f}{\partial t}, \quad y' = \frac{\partial g}{\partial t}, \quad z' = \frac{\partial h}{\partial t}.$$

On peut enfin joindre aux deux énoncés précédents le suivant :

Les ∞^2 trajectoires issues d'un point A sont conjuguées à ∞^1 surfaces et les arcs des trajectoires compris entre A et une de ces surfaces correspondent à des temps égaux.

Les surfaces en question sont, en effet, les surfaces $\Phi_{A,t}$ dont nous sommes partis au n° 1.

IV. — RÉSUMÉ GÉNÉRAL. APPLICATIONS.

16. Les considérations précédentes peuvent se reprendre, sans modifications essentielles, en passant de l'espace ordinaire à un espace à n dimensions. Nous en énoncerons les points les plus importants.

I. Cet espace étant considéré comme rempli par un milieu, de nature constante, dans lequel se propagent, suivant une loi déterminée, des ébranlements d'une certaine nature, le mode de propagation est déterminé par le *système des ondes élémentaires* qui ont pour origines les divers points du milieu.

Cette propagation peut être considérée comme un déplacement des éléments de contact de l'espace, défini par un groupe de transformations de contact à un paramètre. L'onde élémentaire qui a pour origine un point quelconque $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est le lieu des extrémités des déplacements élémentaires $(dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$ dont varie ce point, considéré comme associé successivement avec tous ses éléments de contact, lorsque le temps varie de dt .

Son équation générale est donc de la forme

$$(77) \quad \Omega(x_1, x_2, \dots, x_n | dx_1, dx_2, \dots, dx_n) = dt,$$

Ω étant homogène de degré un en $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$.

On peut également définir le système des ondes élémentaires par leur équation générale écrite en coordonnées tangentielles, qui sera de la forme

$$(78) \quad \Pi(x_1, x_2, \dots, x_n | p_1, p_2, \dots, p_n) = \frac{1}{dt},$$

où Π est homogène de degré un en $p_1, p_2, \dots, p_n$. On suppose ici que l'équation générale d'un plan tangent, l'origine étant transportée en $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, est prise sous la forme

$$(79) \quad p_1 X_1 + p_2 X_2 + \dots + p_n X_n - 1 = 0.$$

On peut considérer, au lieu des ondes élémentaires, les surfaces caractéristiques, lieux des extrémités des vitesses $\left(\frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}\right)$. En posant

$$(80) \quad \frac{dx_1}{dt} = x'_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = x'_2, \quad \dots, \quad \frac{dx_n}{dt} = x'_n,$$

elles sont définies par l'une ou l'autre des deux équations

$$(81) \quad \Omega(x_1, x_2, \dots, x_n | x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = 1,$$

ou

$$(82) \quad \Pi(x_1, x_2, \dots, x_n | p_1, p_2, \dots, p_n) = 1,$$

suivant que l'on se place au point de vue ponctuel, ou au point de vue tangentiel. L'équation (82) est identiquement vérifiée par les formules

$$(83) \quad p_1 = \frac{\partial \Omega}{\partial x'_1}, \quad p_2 = \frac{\partial \Omega}{\partial x'_2}, \quad \dots, \quad p_n = \frac{\partial \Omega}{\partial x'_n};$$

et l'équation (81) est identiquement vérifiée par les formules

$$(84) \quad x'_1 = \frac{\partial \Pi}{\partial p_1}, \quad x'_2 = \frac{\partial \Pi}{\partial p_2}, \quad \dots, \quad x'_n = \frac{\partial \Pi}{\partial p_n};$$

et l'on doit associer à ces formules la condition

$$(85) \quad p_1 x'_1 + p_2 x'_2 + \dots + p_n x'_n = 1.$$

II. Un élément de contact quelconque aura pour coordonnées $(x_1, x_2, \dots, x_n | p_1, p_2, \dots, p_n)$, c'est-à-dire que $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ seront les coordonnées de son point; et $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ les coefficients de direction de sa normale. Et le groupe de transformations de contact considéré sera défini par les équations canoniques ⁽¹⁾

$$(86) \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \Pi}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Pour qu'elles définissent exactement la propagation considérée, c'est-à-dire pour que le paramètre t y représente bien le temps, et non le temps multiplié par une constante, on doit y joindre l'équation (82), ou la condition (85), qui peut s'écrire

$$(87) \quad dt = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \dots + p_n dx_n.$$

III. Le même mode de propagation peut se définir en cherchant directement les ∞' surfaces qui proviennent d'une onde origine quelconque. Une telle *famille d'ondes* étant représentée par une équation de la forme

$$(88) \quad t = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

le problème revient à chercher t en fonction de $x_1, \dots, x_n$. La

⁽¹⁾ Cette forme des équations d'une transformation de contact infinitésimale a été donnée par Lie. Voir, par exemple, *Theorie der Transformations-Gruppen*, t. II, p. 263.

formule (87) étant alors supposée représenter la différentielle totale de t , la solution du problème consiste à intégrer l'équation (82), considérée comme une équation aux dérivées partielles.

Et, si l'on a une intégrale de cette équation, renfermant $(n - 1)$ constantes arbitraires essentielles, et dont aucune ne soit additive

$$(89) \quad t = f(x_1, x_2, \dots, x_n | a_1, a_2, \dots, a_{n-1}),$$

l'intégration du système (86), (87) est donnée par les formules (1)

$$(90) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial f}{\partial a_k} = b_k, \quad t = f(x_1, x_2, \dots, x_n | a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) + a_n \\ (i = 1, 2, \dots, n), \quad (k = 1, 2, \dots, n-1). \end{array} \right.$$

IV. Si, dans le mouvement des éléments de contact, on considère seulement le mouvement des points de ces éléments, on obtient ce que l'on peut appeler les *trajectoires* de la propagation. Elles sont définies directement par le système différentiel

$$(91) \quad d \frac{\partial \Omega}{\partial (dx_i)} - \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

et la manière dont elles sont décrites est donnée par l'équation

$$(92) \quad dt = \Omega(x_1, x_2, \dots, x_n | dx_1, dx_2, \dots, dx_n).$$

Cela équivaut à dire qu'elles annulent la variation de l'intégrale

$$(93) \quad 0 = \int \Omega(x_1, x_2, \dots, x_n | dx_1, dx_2, \dots, dx_n).$$

La valeur de cette intégrale prise le long d'un arc de courbe quelconque donne le temps que met un ébranlement à se propager le long de cet arc.

Enfin, si l'on convient de dire qu'une trajectoire est conjuguée à une multiplicité, si elle correspond au mouvement d'un élément de contact de cette multiplicité, on a le théorème suivant :

Si ∞^p trajectoires sont conjuguées à une multiplicité à p dimensions, elles sont conjuguées à ∞^1 multiplicités de

(1) C'est, sous l'une de ses formes, le *théorème de Jacobi*. Si l'on veut faire abstraction de la condition (87), il suffit de multiplier t par une nouvelle constante arbitraire, dans les formules (90); cela résulte de ce qui précède.

même nature, et les arcs de ces trajectoires compris entre deux de ces multiplicités correspondent tous au même intervalle de temps.

17. Les applications sont nombreuses. Considérons d'abord la propagation de la lumière dans un milieu isotrope, mais non homogène; les ondes élémentaires sont des sphères, c'est-à-dire que

$$\Omega = \omega(x, y, z) \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

Les trajectoires sont les rayons lumineux; et les conditions (71) ou (72) deviennent des conditions d'orthogonalité.

D'où le théorème que des rayons lumineux issus d'un point, ou normaux à une surface, sont normaux à une infinité de surfaces. Les familles d'ondes sont les familles de surfaces orthogonales à une même congruence de rayons. Ces rayons sont curvilignes, en général.

Si le milieu est homogène, mais non pas nécessairement isotrope, Ω est fonction de x', y', z' seulement; on conclut alors des équations (58) et (59) que x', y', z' sont constants. Les rayons lumineux sont rectilignes, et la vitesse de propagation est constante sur chaque rayon. A chaque direction de rayon est associée une direction de plan; c'est le plan tangent à la surface d'onde au point où elle est percée par la direction du rayon (1).

18. Tout problème où intervient une intégrale de la forme (93), dont la variation doit être nulle, constitue une application de ce qui précède; et la notion de transformation de contact y interviendra utilement. Tel le problème des *brachistochrones*; le problème général de l'*équilibre des fils*; le problème des *lignes géodésiques*. Tel enfin le *problème général de la Dynamique*. Le théorème général sur les multiplicités et les trajectoires conjuguées donne la clef des théorèmes de Thomson et de Tait, et de leurs généralisations.

Sans insister sur les détails, examinons le cas des équations de

(1) Comparez : LÉVISTAL, *Recherches d'Optique géométrique* (Annales de l'École Normale, 7^e série, t. IV, p. 195).

la Dynamique. Partons des équations de Lagrange, où nous supposons que, ni la force vive $2T(x_1, \dots, x_n | x'_1, \dots, x'_n)$ du système, ni la fonction des forces $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ne dépendent du temps. Ces équations sont

$$(94) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial x'_i} - \frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

et, en supposant que l'on a donné à la constante des forces vives une valeur particulière, on peut écrire l'équation des forces vives, qu'il faut joindre à (94),

$$(95) \quad T = U.$$

Au moyen de cette équation, nous allons éliminer le temps des équations (94). Posons

$$\bar{T} = T(x_1, x_2, \dots, x_n | dx_1, dx_2, \dots, dx_n),$$

et nous écrirons (95) sous la forme

$$\bar{T} = U dt^2,$$

c'est-à-dire

$$(96) \quad dt = \sqrt{\frac{\bar{T}}{U}} = S(x_1, \dots, x_n | dx_1, \dots, dx_n).$$

Donc

$$T = \frac{\bar{T}}{S^2}, \quad \frac{\partial T}{\partial x'_i} = \frac{1}{S} \frac{\partial \bar{T}}{\partial dx_i}, \quad \frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{1}{S^2} \frac{\partial \bar{T}}{\partial dx_i}.$$

Par suite

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x'_i} &= \frac{1}{S} \frac{\partial (US^2)}{\partial dx_i} = 2U \frac{\partial S}{\partial dx_i} = 2 \frac{\partial (US)}{\partial dx_i}, \\ \frac{\partial T}{\partial x_i} &= \frac{1}{S^2} \frac{\partial (US^2)}{\partial dx_i}; \end{aligned}$$

et les équations (94) deviennent

$$2 \frac{1}{S} d \frac{\partial (US)}{\partial dx_i} - \frac{2}{S} U \frac{\partial S}{\partial dx_i} - \frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

ou enfin, en posant,

$$(97) \quad \Omega = 2US = 2\sqrt{U\bar{T}},$$

$$d \frac{\partial \Omega}{\partial (dx_i)} - \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Et comme Ω est homogène de degré un par rapport aux différentielles, c'est un système de la forme (91), où Ω a seulement la forme particulière

$$(98) \quad \Omega = 2\sqrt{U(x_1, \dots, x_n) T(x_1, \dots, x_n | dx_1, \dots, dx_n)},$$

caractérisée par ce fait que T est une forme quadratique définie positive des différentielles.

Cette fonction Ω est l'*action élémentaire* du système; et nous arrivons ainsi, par un calcul classique, au *principe de la moindre action*. Mais Ω a pour nous une autre signification : l'équation $\Omega = d\tau$ définissant le système des ondes élémentaires d'un mode de propagation d'ondes, dans lequel les trajectoires sont les mêmes que celles du mouvement dynamique considéré. Seulement ce qui correspond au temps τ du mouvement ondulatoire, c'est l'*action* du mouvement dynamique.

En d'autres termes, les trajectoires de tout problème de dynamique sont identiques à celles d'un groupe de transformations de contact à un paramètre; mais le paramètre canonique de ce groupe est, non pas le temps t , mais l'action

$$(99) \quad \tau = 2 \int \sqrt{UT}$$

du problème de dynamique.

Il résulte de ce qui précède qu'en gardant cette action pour variable indépendante, on pourra ramener l'intégration du problème à celle d'un système canonique (86), ou d'une équation aux dérivées partielles (82). Il faudra ensuite déterminer le temps par la quadrature

$$(100) \quad t = \frac{1}{2} \int \frac{d\tau}{U},$$

qui provient des deux formules

$$dt = \sqrt{\frac{T}{U}}, \quad d\tau = 2\sqrt{UT}.$$

Comparons le calcul avec celui d'Hamilton. Nous aurons, pour arriver à l'équation (82), à éliminer $x'_1, \dots, x'_n$ des équations

homogènes de degré zéro (83), c'est-à-dire

$$(101) \quad p_i = \sqrt{\frac{U}{T}} \cdot \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Dans le calcul d'Hamilton, pour arriver à l'équation aux dérivées partielles de Jacobi,

$$(102) \quad H(x_1, x_2, \dots, x_n | p_1, \dots, p_n) = 0,$$

il faut éliminer $x'_1, \dots, x'_n$ entre les équations

$$(103) \quad p_i = \frac{\partial T}{\partial x'_i}, \quad T - U = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Or, on déduit de ces équations les équations homogènes (101).

L'équation (82)

$$(104) \quad \Pi(x_1, \dots, x_n | p_1, \dots, p_n) - 1 = 0$$

est donc équivalente à l'équation (102) de Jacobi-Hamilton (1). Et, si l'on écrit (102) sous la forme

$$\sqrt{\frac{H+U}{U}} - 1 = 0,$$

le radical qui y figure étant homogène de degré un , on a identiquement

$$(105) \quad \Pi \equiv \sqrt{\frac{H}{U} + 1}.$$

Quant à notre système canonique

$$(106) \quad \frac{dx_i}{d\tau} = \frac{\partial \Pi}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{d\tau} = - \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

pour en déduire le système de Hamilton, il faut faire intervenir, non seulement la formule (100), mais encore l'équation des forces vives $H = 0$. Le calcul résulte immédiatement de la formule (105).

Remarquons enfin que cette formule (105), qui donne la fonction caractéristique de la transformation de contact infinitésimale,

(1) C'est le fait constaté par Lie, dans le cas particulier du mouvement d'un point matériel (*Leipsiger Berichte*, t. XLI, p. 145).

peut s'écrire

$$(107) \quad \Pi = \sqrt{\frac{\mathfrak{E}}{U}},$$

en désignant par $\mathfrak{E}$ la forme adjointe de T , ou plus exactement ce que devient T par le changement de variables

$$(108) \quad p_i = \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

REMARQUES SUR QUELQUES SÉRIES DE POLYNOMES;

Par M. HELGE VON KOCH.

Désignant par x un point du plan de la variable complexe, on sait que l'équation

$$(1) \quad |x^2 - 1| = 1$$

représente une lemniscate de Bernoulli, ayant pour pôles les points $x = -1$ et $x = +1$ et pour point double le point $x = 0$; ce dernier point divise la lemniscate en deux parties que nous désignerons par A et B et qui entourent respectivement les points $x = +1$ et $x = -1$.

Soit $f(x)$ une fonction analytique régulière à l'intérieur du contour A ; par la substitution

$$z = 1 - x^2, \quad x = \sqrt{1 - z} = 1 - \frac{1}{2}z + \dots,$$

$f(x)$ deviendra une fonction de z régulière dans un certain voisinage de $z = 0$. Soit

$$(2) \quad c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

le développement taylorien de cette fonction. Quant x décrit le contour A , z décrit le cercle

$$|z| = 1,$$

ce qui, d'après des principes bien connus, signifie que la fonction est régulière dans ce cercle ou, en d'autres termes, que la

série (2) converge pour $|z| < 1$. Il en résulte que la série

$$(3) \quad c_0 + c_1(1-x^2) + c_2(1-x^2)^2 + \dots$$

converge et représente $f(x)$ à l'intérieur de A.

Or la condition

$$|x^2 - 1| < 1$$

étant remplie aussi par les points intérieurs à B, on voit que la convergence de la série (3) s'étend à cette autre partie de la lemniscate considérée.

Comme la série (3) ne change pas de valeur si l'on change x en $-x$, il est clair que cette série ne peut pas, en général, représenter $f(x)$ à l'intérieur de B; pour cela il faudrait d'abord que $f(x)$ pût se prolonger analytiquement, et puis que la condition $f(x) = f(-x)$ fût vérifiée.

Ces remarques donnent donc un moyen très simple pour former une série de polynômes représentant différentes fonctions dans différentes portions du plan.

Prenant d'abord

$$f(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\binom{2v}{1v}}{(1v)^2} \frac{x^v}{2^{2v}},$$

on voit que la série

$$(4) \quad 1 + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\binom{2v}{1v}}{(1v)^2} \left(\frac{1-x^2}{4}\right)^v$$

converge à l'intérieur de la lemniscate (1), mais a pour valeur $\frac{1}{x}$ à l'intérieur de A, $-\frac{1}{x}$ à l'intérieur de B (1).

Comme autre exemple, considérons la fonction $\log x$; prenons-en la branche qui s'annule pour $x=1$ et rendons-la uniforme par une coupure partant de l'origine et suivant la partie négative de l'axe imaginaire. Par $\log x$ nous désignons donc, quel

(1) Je dois à M. Borel la remarque que, dans le *Calcul différentiel* de J. Bertrand, se trouve, à titre d'exercice sur les séries, un développement analogue à (4), qui pourrait être employé pour le même objet; ce développement a ailleurs servi à M. Lebesgue dans l'étude d'une tout autre question (Voir BOREL, *Leçons sur les variables réelles*, p. 60).

que soit x , la fonction uniforme ainsi définie. Comme on a

$$\log x = \log \sqrt{1-x} = -\frac{1}{2} \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \right),$$

on trouve que la série

$$(5) \quad 1 - x^2 + \frac{(1-x^2)^2}{2} + \frac{(1-x^2)^3}{3} + \dots$$

converge dans les deux parties de la lemniscate, mais représente

$$\begin{array}{ll} -2 \log x & \text{à l'intérieur de A,} \\ -2 \log x + 2\pi i & \text{» B.} \end{array}$$

Comme on sait, Weierstrass ⁽¹⁾ a le premier signalé le fait important qu'une série peut représenter différentes fonctions dans différentes portions du plan; d'autres géomètres ont ensuite donné des exemples variés du même fait ⁽²⁾. Il nous semble que la série (5) en offre l'exemple le plus intuitif.

J'avais été conduit aux remarques qui précèdent par l'étude des séries de la forme

$$\sum_v P_v(x) [\varphi(x)]^v,$$

$\varphi(x)$ étant un polynome de degré donné n et P_v des polynomes en x de degré au plus égal à $n-1$. Ces séries, qui convergent dans des domaines limités par des sortes de lemniscates généralisées, sont intéressantes à plus d'un point de vue et notamment pour la question du prolongement analytique et pour celle de l'interpolation ⁽³⁾. J'avais déjà commencé la rédaction de mon travail sur ce sujet, lorsque j'ai reçu un Mémoire de M. Alfred Kienast ⁽⁴⁾, où se trouvent la plupart des résultats que j'avais obtenus et que

⁽¹⁾ *Monatsbericht der Ak. der Wiss. zu Berlin*, 1880. Dans le même Recueil pour 1881, Weierstrass a publié un exemple remarquable dû à M. J. TANNERY. Voir aussi *Abhandlungen zur Functionenlehre*, p. 69, ou *Oeuvres de Weierstrass*.

⁽²⁾ Voir notamment E. BOREL, *Leçons sur la théorie des fonctions*, p. 67. Paris, 1898.

⁽³⁾ Dans une Conférence faite à Djursholm le 2 mars 1906, j'ai rendu compte de mes recherches sur ce sujet.

⁽⁴⁾ *Über die Darstellung der analytischen Functionen durch Reihen, die nach Potenzen eines Polynomes fortschreiten und Polynome eines niederen Grades zu Koeffizienten haben* (Inaugural-Dissertation, Zurich, 1906).

j'avais l'intention de publier. Dès lors il m'a paru superflu de poursuivre mon travail et je me suis borné, dans ce qui précède, à quelques exemples qui ne se trouvent pas dans le Mémoire de M. Kienast et qui, à cause de leur simplicité, me paraissent dignes d'être signalés.

Pour terminer je formerai, par un passage à la limite, une série de polynômes offrant une singularité de convergence bien plus profonde que les précédentes. Posons

$$P_n(x) = -\frac{1}{n} \sum_{v=1}^n \frac{(1-x^n)^v}{v},$$

n désignant un entier positif quelconque ≥ 2 , et remarquons que le domaine de convergence de cette série :

$$|1-x^n| < 1$$

est limité par la courbe dont l'équation, en coordonnées polaires, est la suivante :

$$r^n = 2 \cos n \varphi;$$

cette courbe est composée de n branches, que nous pouvons désigner par $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$, qui se rencontrent à l'origine et qui entourent respectivement les points

$$1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1} \quad \left(\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}} \right),$$

ainsi que les segments rectilignes joignant ces points à l'origine.

Pour une valeur réelle de x comprise entre 0 et 1 (0 exclus, 1 inclus), on a visiblement

$$P_n(x) = \log x.$$

Pour

$$x = r e^{i\varphi} \quad (0 < r \leq 1),$$

l'argument φ étant un multiple quelconque de $\frac{2\pi}{n}$, on a $x^n = r^n$, d'où

$$P_n(x) = r,$$

ce que nous écrirons

$$P_n(x) = \log |x|.$$

Ces conclusions ayant lieu quel que soit n , on est amené, en prenant n successivement égal à

$$2, 3, 4, \dots$$

à la formule suivante :

$$(6) \quad \log |x| = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{|n}(x),$$

qui a lieu pour tout point x remplissant les deux conditions

$$(6') \quad \begin{cases} 0 < |x| \leq 1, \\ \frac{\arg x}{2\pi} = \text{nombre rationnel.} \end{cases}$$

Posons maintenant

$$(7) \quad \begin{cases} P_n(x) = p_n(x) + R_n(x), \\ p_n(x) = -\frac{1}{n} \left(1 - x^n + \frac{(1-x^n)^2}{2} + \dots + \frac{(1-x^n)^{v_n}}{v_n} \right) \end{cases}$$

et remarquons qu'on peut choisir v_n tel que l'on ait

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{|n}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{|n}(x)$$

pour tout point x remplissant les conditions (6'). En effet, soit $x = re^{i\varphi}$ un tel point et choisissons n de la forme v et suffisamment grand pour que l'on ait

$$x^n = r^n \quad \text{et} \quad |x| > \frac{1}{n};$$

on a alors, en posant pour abréger $v_n = m$,

$$\begin{aligned} |P_n(x) - p_n(x)| &= |R_n(x)| \\ &= \frac{1}{n} \left[\frac{(1-x^n)^{m+1}}{m+1} + \frac{(1-x^n)^{m+2}}{m+2} + \dots \right], \\ &< \frac{1}{n(m+1)} \frac{(1-x^n)^{m+1}}{x^n}, \\ &< \frac{n^n}{n(m+1)} \left(1 - \frac{1}{n^n} \right)^{m+1}, \end{aligned}$$

par où l'on voit qu'il suffit de prendre

$$v_n = m = n^n$$

pour avoir

$$|P_n(x) - p_n(x)| < \frac{1}{n}.$$

Prenant cette valeur de v_n dans la définition (7) du polynome

$p_n(x)$, on peut donc remplacer la formule (6) par la suivante :

$$\log |x| = \lim_{n \rightarrow \infty} p|_n(x),$$

$$0 < |x| \leq 1, \quad \frac{\arg x}{2\pi} = \text{nombre rationnel}.$$

L'expression précédente **pourrait** être remplacée par la série de polynomes

$$p|_1(x) + [p|_2(x) - p|_1(x)] + \dots$$

On a donc l'exemple d'une série de polynomes **offrant les singularités** suivantes :

La série converge sur tout rayon de longueur *un* issu de l'origine (0 exclus) et formant avec l'axe réel un angle qui est en rapport rationnel avec 2π . Pour un point x d'un tel rayon, la série a la valeur réelle $\log|x|$; cette série représente donc successivement, dans un voisinage arbitrairement petit d'un point quelconque intérieur au cercle

$$|x| = 1,$$

une infinité de fonctions analytiques distinctes, savoir des fonctions de la forme

$$\log x + \varphi i,$$

φ étant en rapport rationnel à 2π .

FIN DU TOME XXXIV.

ERRATA.

Page 8, ligne 13, au lieu de « figure 4, » lire « figure 3 ».

Page 12, ligne 15, au lieu de « figure 3 », lire « figure 2 ».

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME XXXIV.

(Les lettres et numéros qui précèdent les titres indiquent les classifications du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*.)

	Pages.
État de la Société mathématique au commencement de 1906.....	v
Liste des Présidents de la Société depuis sa fondation.....	xiv
Liste des Sociétés scientifiques et des recueils périodiques avec lesquels la Société échange son <i>Bulletin</i>	xv
Comptes rendus des séances.....	1, 61, 133

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

[B 42 c]	Autonne (L.). — Sur les polynomes à coefficients et à variable hypercomplexes.....	205
[D 4 a]	Boutroux (P.). — Propriétés d'une fonction holomorphe dans un cercle où elle ne prend pas les valeurs zéro et un	30
[L' 40 a]	Bricard (R.). — Sur certains systèmes linéaires, ponctuels et tangentiels, de quadriques.....	17
[S 2]	Combeblac. — Sur l'application des équations de Lagrange à la détermination des actions exercées par un fluide parfait incompressible animé d'un mouvement irrotationnel	63
[Q b]	Combeblac. — Remarques sur la question des principes de l' <i>Analysis situs</i>	191
[J 5]	Combeblac. — Sur les représentations numériques des ensembles.....	227
[M' 6 b]	Fontené (G.). — Sur une configuration remarquable dans l'espace.....	3
[L' 47 d, K 44 g]	Fontené (G.). — Sur l'extension à l'espace du théorème des polygones de Poncelet par des polyèdres de genre <i>un</i>	153
[E 7 a]	Goursat (E.). — Remarques sur quelques théorèmes d'existence.....	85
[H 7]	Hadamard. — Sur les caractéristiques des systèmes aux dérivées partielles.....	48
[C 4 c]	Hadamard. — Sur les transformations ponctuelles.....	71
[D 5 c]	Hadamard. — Sur le principe de Dirichlet.....	133

		Pages.
[D 2 b γ]	von Koch (H.). — Remarques sur quelques séries de polynomes.....	269
[R 8 a α]	Lecornu (L.). — Sur l'herpolodie.....	40
[I 24 c]	Maillet (Ed.). — Sur les nombres transcendants dont le développement en fraction continue est quasi-périodique et sur les nombres de Liouville	213
[L' 16 e]	de Montcheull. — Les anticaustiques du paraboloïde hyperbolique équilatère	139
[D 4 a]	Petrovitch (M.). — Sur certaines transcendentes entières	165
[A 5 b]	Potron. — Sur une formule générale d'interpolation... ..	52
[D 5 d]	Rémoundos (G.). — Sur la représentation uniforme des courbes transcendentes	197
[L' 14 a, M' 5 h]	Remy (L.). — Sur quelques théorèmes de géométrie plane liés à la surface de Kummer.....	177
[R 1 d α]	Rudzki (M.-P.). — Note sur la chute des corps pesants	163
[H 9 f]	Sanielevici. — Remarques sur certaines équations linéaires aux dérivées partielles.....	187
[R 9 a]	de Sparre. — Note au sujet du valet de menuisier....	48
[R 9 a]	de Sparre. — Note au sujet du frottement de glissement	108
[P 6 e, R 6 b]	Vessiot. — Sur l'interprétation mécanique des transformations de contact infinitésimales	230
Errata		274
Table des matières du Tome XXXIV.....		275

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME XXXIV.

EXTRAIT DES STATUTS ET DU RÈGLEMENT.

La Société mathématique de France a pour objet l'avancement et la propagation des études de Mathématiques pures et appliquées. Elle y concourt par ses travaux et ses publications. Elle a son siège à Paris.

La Société se compose de sociétaires perpétuels, de membres résidents et de membres non résidents, en nombre illimité.

Sont considérés comme résidents les membres qui ont à Paris leur domicile ou leurs occupations professionnelles.

Les Étrangers peuvent faire partie de la Société.

Les conditions à remplir, pour être membre de la Société, sont les suivantes : 1° avoir été présenté par deux de ses membres et agréé par le Conseil d'administration ou par le Bureau agissant en vertu d'un mandat du Conseil; 2° avoir obtenu, à l'une des séances qui ont suivi la présentation, les suffrages de la majorité des membres présents; 3° avoir versé un droit d'admission de *dix francs*; 4° payer une cotisation annuelle dont le montant est de *vingt francs* pour les membres résidents, et de *quinze francs* pour les membres non résidents.

La cotisation annuelle peut toujours être rachetée par une somme de *trois cents francs*, versée dans les conditions fixées par le règlement administratif de la Société.

Ce versement confère le titre de *sociétaire perpétuel*.

La cotisation annuelle est payée au commencement de chaque exercice dont l'origine est fixée au 1^{er} novembre de chaque année.

Les nouveaux membres doivent payer la totalité de la cotisation de l'exercice en cours, quelle que soit l'époque de leur admission.

La Société tient des séances ordinaires deux fois par mois; elle prend trois mois de vacances, en août, septembre et octobre.

Pour assister aux séances, les personnes étrangères à la Société doivent être présentées par l'un de ses membres.

La Société publie par livraisons un Recueil annuel qui a pour titre : *Bulletin de la Société mathématique de France*, et qui contient, avec un extrait des procès-verbaux des séances, des Notes et Mémoires sur les Mathématiques pures ou appliquées, avant pour auteurs des membres de la Société, et présentant quelque originalité au point de vue de la méthode ou des résultats.

Les livraisons du *Bulletin* sont adressées à tous les membres de la Société, au fur et à mesure de leur publication. Toutefois, dans le cas où un sociétaire se met en retard dans le paiement de sa cotisation, l'envoi du *Bulletin* est suspendu pour lui, jusqu'à ce qu'il ait acquitté l'arriéré.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS.

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6°).

PETIT BOIS (G.), Ingénieur civil des Mines. — *Table d'intégrales indéfinies*. In-4 (30 × 23) de XII-154 pages; 1906..... 10 fr.

RAFFY (L.), Maître de Conférences à la Faculté des Sciences et à l'École Normale supérieure. — *Leçons sur les applications géométriques de l'Analyse. Éléments de la théorie des courbes et des surfaces*. Grand in-8, avec figures; 1897..... 7 fr. 50 c.

TABLE DES MATIÈRES

(FASCICULE IV).

	Pages.
[D 5d] RÉMOUNDOS. — Sur la représentation uniforme des courbes transcendentes.....	197
[B 12c] AUTONNE. — Sur les polynomes à coefficients et à variable hypercomplexes.....	205
[124c] MAILLET. — Sur les nombres transcendants dont le développement en fraction continue est quasi-périodique et sur les nombres de Liouville.....	213
[J5] COMBEBIAC. — Sur les représentations numériques des ensembles.....	227
[P 6e, R 6b] VESSIOT. — Sur l'interprétation mécanique des transformations de contact infinitésimales.....	230
[D 2b γ] VON KOCH. — Remarques sur quelques séries de polynomes.....	269
Table des matières du tome XXXIV.....	275

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6°).

OCAGNE (Maurice d'), Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur à l'École des Ponts et Chaussées, Répétiteur à l'École Polytechnique. — *Traité de Nomographie. Théorie des abaques. Applications pratiques.* Grand in-8, avec 177 figures et une planche; 1899.

Broché..... 14 fr. | Relié (cuir souple).... 17 fr.

PICARD (E.), Membre de l'Institut, Professeur à l'Université de Paris, et **SIMART**, Capitaine de frégate, Répétiteur à l'École Polytechnique. — *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes.* 2 volumes grand in-8 se vendant séparément.

TOME I : Volume de vi-256 pages, avec figures; 1897..... 9 fr.

TOME II : Volume de vi-528 pages, avec figures; 1906..... 18 fr.

PETERSEN (Julius), Professeur à l'Université de Copenhague, Membre de l'Académie royale des Sciences. — *Théorie des équations algébriques.* Traduit par H. LAURENT, Examinateur d'admission à l'École Polytechnique de Paris. In-8; 1897..... 10 fr.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE.

29316 Paris. — imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE,

PUBLIE
PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME TRENTE-CINQUIÈME. — ANNÉE 1907.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ
A LA SORBONNE.
—
1907

ÉTAT

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

AU COMMENCEMENT DE L'ANNÉE 1907 (*).

Membres honoraires du Bureau....	}	MM. APPELL. DARBOUX. GUYOU. HATON DE LA GOUPILLIÈRE. HUMBERT. JORDAN. MITTAG-LEFFLER. PICARD. POINCARÉ. VOLTERRA. ZEUTHEN.
----------------------------------	---	--

Président.....	MM.	BLUTEL.
Vice-Présidents	{	BIOCHE. BRICARD. LÉVY (L.). PERRIN (R.).
Secrétaires	{	RAFFY. SERVANT.
Vice-Secrétaires.....	{	ESTANAVE. FATOU.
Archiviste.....		FOUCHÉ.
Trésorier		CLAUDE-LAFONTAINE. BOREL, 1909. BOURLET, 1908. CARVALLO, 1908. FONTENÉ, 1908. GRÉVY, 1910. HADAMARD, 1910. KOENIGS, 1910. LAISANT, 1909. LECORNU, 1910. MAILLET, 1908. MAROTTE, 1909. D'OCAGNE, 1909.
Membres du Conseil(*)		

(*) MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser au Secrétariat les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à cette liste.

(*) La date qui suit le nom d'un membre du Conseil indique l'année au commencement de laquelle expire le mandat de ce membre.

Date
de
l'admission.

1872. **ACHARD**, ancien directeur de la Compagnie d'assurances sur la vie *la Foncière*, rue de la Terrasse, 6 *bis*, à Paris (17°).
1900. **ACKERMANN-TEUBNER**, éditeur, à Leipzig (Allemagne). S. P. (¹).
1900. **ADHÉMAR** (vicomte Robert d'), professeur suppléant à la Faculté libre des Sciences, place de Genevières, 14, à Lille (Nord).
1896. **ANDOYER**, professeur à la Faculté des Sciences, rue du Val-de-Grâce, 1, à Paris (5°).
1891. **ANDRADE**, professeur à la Faculté des Sciences, rue de la Mouillière, 1, à Besançon.
1872. **ANDRÉ** (Désiré), docteur ès sciences, rue Bonaparte, 70 *bis*, à Paris (6°).
1879. **APPELL**, membre de l'Institut, doyen de la Faculté des Sciences et professeur à l'École Centrale des Arts et Manufactures, rue Bonaparte, 17, à Paris (6°).
1900. **AURIC**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue Pierre-Corneille, 38, à Lyon.
1882. **AUTONNE**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, à Châteauroux (Indre).
1900. **BAJRE**, professeur à la Faculté des Sciences de Dijon.
1896. **BAKER**, professeur à l'Université de Toronto (Canada).
1894. **BALITRAND**, ingénieur, à Mélaoui (Tunisie).
1905. **BARRÉ**, capitaine du génie, à Verdun (Meuse).
1906. **BARTHELS**, professeur de mathématiques, Weissenburgerstrasse, 52, à Aschaffenburg (Bavière).
1889. **BEGIN**, ancien élève de l'École Polytechnique, avenue Duquesne, 11, à Paris (7°).
1875. **BERDELLÉ**, ancien garde général des forêts, à Rioz (Haute-Saône). S. P.
1904. **BERNSTEIN**, docteur ès sciences, rue Pouchkinskala, 10, à Saint-Petersbourg (Russie).
1891. **BERTRAND DE FONTVOLIANT**, professeur à l'École Centrale des Arts et Manufactures, rue d'Erlanger, 29, à Paris (16°). S. P.
1888. **BIACHE**, professeur au lycée Louis-le-Grand, rue Notre-Dame-des-Champs, 56, à Paris (6°). S. P.
1900. **BLUMENTHAL** (Otto), professeur à l'École technique supérieure, Rütcherstrasse, 37, à Aix-la-Chapelle (Allemagne).
1891. **BLUTEL**, professeur au lycée Saint-Louis, chargé de conférences à la Faculté des Sciences, rue Denfert-Rochereau, 110, à Paris (14°).
1902. **BOBERIL** (vicomte Roger du), rue d'Orléans, 30, à Rennes. S. P.
1892. **BONAPARTE** (prince Roland), avenue d'Iéna, 10, à Paris (16°).
1895. **BOREL**, professeur-adjoint à la Faculté des Sciences, boulevard Arago, 2, à Paris. S. P.
1896. **BOULANGER**, professeur-adjoint à la Faculté des Sciences, rue Caumartin, 78, à Lille.
1896. **BOURGET** (Henry), professeur adjoint à la Faculté des Sciences, rue Saint-Jacques, 20, à Toulouse.
1896. **BOURLET**, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers et à l'École des Beaux-Arts, avenue de l'Observatoire, 22, à Paris (14°). S. P.
1903. **BOUTIN**, rue La Vieuville, 26, à Paris (18°).
1901. **BOUTROUX** (P.), maître de conférences à la Faculté des Sciences, chemin de la Gaillarde, à Montpellier.
1900. **BREITLING**, professeur au lycée Saint-Louis, boulevard Saint-Michel, 44, à Paris (6°).
1897. **BRICARD**, ingénieur des manufactures de l'État, répétiteur à l'École Polytechnique, boulevard Raspail, 295, à Paris (14°).
1873. **BROCARD**, lieutenant-colonel du génie territorial, rue des Ducs de Bar, 75, à Bar-le-Duc. S. P.
1901. **BUHL** (Adolphe), maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue de Villefranche, 6, à Montpellier.
1893. **BURKHARDT**, professeur à l'Université, Kreuzplatz, 1, à Zürich (Suisse).

(¹) Les initiales S. P. indiquent les Sociétaires perpétuels.

Date
de
l'admission.

1894. **CANEN**, professeur au collège Rollin, rue Cortambert, 46, à Paris (16°).
1893. **CALDWELL**, professeur à l'Université, palazzo Giampaolo, via della Libertà, à Palermo.
1888. **CANET** (Gustave), ingénieur civil, directeur de l'artillerie de MM. Schneider et C^{ie}, avenue Henri-Martin, 87, à Paris (16°). S. P.
1885. **CARON**, professeur de géométrie descriptive, rue Claude-Bernard, 71, à Paris (5°).
1892. **CARONNET**, docteur ès sciences mathématiques, rue Demours, 62 bis, à Paris (17°).
1896. **CARTAN**, chargé de cours à la Faculté des Sciences, rue du faubourg Saint-Jean, 76, à Nancy.
1887. **CARVALLO**, docteur ès sciences, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, rue Clovis, 1, à Paris (5°). S. P.
1890. **CEDERCREUTZ** (baronne Nanny), Unionsgatan, 4, à Helsingfors (Finlande).
1892. **CELLÉRIER** (Gustave), cours de Rive, 12, à Genève (Suisse).
1887. **CERBUTI**, professeur à l'Université, piazza S. Pietro in vincoli, 5, à Rome (Italie).
1888. **CHAILAN** (Édouard), rue Berthollet, 16, à Paris (5°).
1896. **CHARYE**, doyen de la Faculté des Sciences, cours Pierre-Puget, 60, à Marseille.
1884. **CHRISTAL**, professeur à l'Université, à Édimbourg (Écosse).
1901. **CLAIRIN**, docteur ès sciences, maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue Jacquemars-Giélée, 57 bis, à Lille.
1875. **CLAUDE-LAFONTAINE**, banquier, rue de Trévise, 32, à Paris (9°). S. P.
1890. **COLOT**, villa Sully, à Arcachon (Gironde).
1898. **COMBÉRIAC**, capitaine du génie, docteur ès sciences, rue Coulon, 9, à Bourges.
1900. **CONTE** (Firmin), ingénieur des ponts et chaussées, à Commercy (Meuse).
1896. **COSSERAT** (E.), professeur à la Faculté des Sciences, rue de Metz, 1, à Toulouse.
1896. **COSSERAT** (F.), ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue d'Alsace, 23, à Paris (10°).
1900. **COTTON** (Émile), professeur à l'Université de Grenoble. S. P.
1904. **CURTISS**, Sherman avenue, 1939, à Evanston (Illinois, États-Unis).
1872. **DARBOUX**, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, doyen honoraire de la Faculté des Sciences, rue Gay-Lussac, 36, à Paris (5°).
1885. **DAUTHVILLE**, doyen de la Faculté des Sciences, cours Gambetta, 27, à Montpellier.
1901. **DELIASSUS**, professeur à la Faculté des Sciences, chemin de Chastre-Monjoux, à Besançon.
1905. **DEKJOY**, agrégé de mathématiques, rond-point Bugeaud, 5, à Paris (16°).
1895. **DELAUNAY** (N.), professeur à l'Institut Empereur Alexandre II, à Kieff (Russie).
1899. **DELENER**, ingénieur des ponts et chaussées, place Simon-Vollant, 10, à Lille.
1885. **DEHARTRES**, doyen de la Faculté des Sciences, avenue Saint-Maur, à la Madeleine-lès-Lille (Nord).
1892. **DEMOULIN** (Alph.), professeur à l'Université, rue Joseph-Plateau 10, à Gand (Belgique).
1883. **DERUYTS**, professeur à l'Université, rue des Augustins, 35, à Liège (Belgique).
1894. **DESAINT**, docteur ès sciences, boulevard Gouvion-Saint-Cyr, 47, à Paris (17°).
1900. **DICKSTEIN**, Marszatkowska, 117, à Varsovie.
1902. **DIEGUEZ** (D.-F.), professeur de mathématiques à l'École provinciale des Arts et Industries, calle del Orzan, 4-3°, à La Corogne (Espagne).
1899. **DRACH**, professeur à la Faculté des Sciences, rue des Carmélites, 68, à Poitiers.
1896. **DUMAS** (G.), docteur de l'Université de Paris, privat-docent à l'École Polytechnique fédérale, à Zürich (Suisse).
1897. **DUMONT**, professeur au lycée, avenue Bouvard, 6, à Annecy (Haute-Savoie).
1886. **DUNCAN**, Consulting Engineer, Empire Building, Broadway, 71, New-York City.
1897. **DURAN-LORIGA** (commandant), plaza de Maria Pita, 20, à la Corogne (Espagne).
1885. **DYCK** (Walther), Technische Hochschule, à Munich (Bavière).

Date
d'
admission.

1902. EGOROFF (Dimitri), professeur à l'Université, Moltchanovka, maison Fryndisse, à Moscou (Russie).
1903. ESPANET, ingénieur civil, rue Berthollet, 2, à Paris (5°).
1900. ESTANAVE, docteur ès sciences, à la Sorbonne, à Paris (5°).
1896. EUVKRTE, ancien élève de l'École Polytechnique, ancien capitaine d'artillerie, rue du Pré-aux-Clercs, à Paris (7°).
1888. FABRY, professeur à la Faculté des Sciences, 17, rue Chaptal, à Montpellier.
1906. FARAGGI, licencié ès sciences, rue Sadi-Carnot, 11 bis, Mustapha-Alger.
1904. FATOU, docteur ès sciences, astronome-adjoint à l'Observatoire, boulevard du Montparnasse, 172, à Paris (14°).
1891. FAUQUENBERGUE, professeur au lycée, à Mont-de-Marsan.
1892. FERR (Henri), professeur à l'Université, rue Ph.-Plantamour, 19, à Genève (Suisse).
1885. FIELDS (J.), professeur à l'Université, Toronto (Ontario, Canada).
1881. FLOQUET, doyen de la Faculté des Sciences, rue de la Commanderie, 21, à Nancy.
1872. FLYE SAINTE-MANIE, chef d'escadron d'artillerie en retraite, ancien répétiteur à l'École Polytechnique, place Royer-Collard, à Vitry-le-François (Marne).
1896. FONTANEAU, ancien officier de marine, cours Bugeaud, 8, à Limoges.
1897. FONTENÉ, inspecteur de l'Académie de Paris, rue Le Goff, 7, à Paris (5°).
1903. FORD (WALTER B.), Forest avenue, 617, à Ann Arbor (Michigan, États-Unis).
1889. FOUCHÉ, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Soufflot, 5, à Paris (5°).
1905. FOUÏT (l'abbé), professeur à l'Institut catholique, rue Férou, 11, à Paris (6°).
1872. FOURNET, répétiteur à l'École Polytechnique, avenue Carnot, 4, à Paris (17°). S. P.
1903. FRAISSÉ, professeur au lycée, à Lille.
1892. FROLOV (le général), avenue des Vollandes, 2, à Genève (Suisse).
1903. FUETER, Seevogelstrasse, 7, à Bâle (Suisse).
1900. GALDEANO (Z.-S. DE), professeur à l'Université, corso 99, 3, à Saragosse (Espagne).
1906. GARGAN DE MONCETZ, licencié ès sciences, square de Latour-Maubourg, 8, à Paris (7°).
1872. GARIEL, inspecteur général des ponts et chaussées, professeur à la Faculté de Médecine, rue Édouard-Detaille, 6, à Paris (17°).
1896. GAUTHIER-VILLARS, ancien élève de l'École Polytechnique, éditeur, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris (6°).
1890. GEBBIA, professeur libre à l'Université, à Palerme (Italie).
1872. GENTY, ingénieur en chef des ponts et chaussées, avenue Rapp, 20, à Paris (7°).
1906. GÉRARDIN, quai Claude-le-Lorrain, 32, à Nancy.
1890. GERBALDI, professeur à l'Université, via XX Settembre, 66, à Palerme (Italie).
1897. GERRANS, professeur à Worcester College, Saint-John street, 20, à Oxford (Grande-Bretagne).
1896. GIRARDVILLE, capitaine d'artillerie, rue Michelet, 6, à Montreuil-sous-Bois (Seine).
1903. GODEY, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du Bois-de-Boulogne, 7, à Paris (16°).
1881. GOURSAT, professeur à la Faculté des Sciences, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Denfert-Rochereau, 39, à Paris (5°).
1896. GREENHILL, professeur à l'École d'artillerie, à Woolwich (Grande-Bretagne).
1896. GRÉVY, professeur au lycée Saint-Louis, rue Claude-Bernard, 71, à Paris (5°).
1899. GUADET, ancien élève de l'École Polytechnique, boulevard Saint-Germain, 210 bis, à Paris (7°).

Date
de
l'admission.

1880. GUCCIA (Jean), professeur à l'Université, via Ruggiero Settimo, 30, à Palermo (Italie).
1906. GURBY, professeur au collège Stanislas, boulevard de Port-Royal, 85, à Paris (14°).
1900. GUTHARD, professeur à l'Université de Clermont-Ferrand.
1881. GUNTHER (Dr Sigismond), professeur à l'École Polytechnique, à Munich (Bavière).
1885. GUYOU, membre de l'Institut, capitaine de frégate, rue Marguerin, 4, à Paris (14°).
1873. HAAC, ingénieur en chef des ponts et chaussées, professeur à l'École Polytechnique, rue Chardin, 11 bis, à Paris (16°).
1882. HABICH, directeur de l'École des Ingénieurs, à Lima (Pérou).
1896. HADAMARD, professeur adjoint à la Faculté des Sciences, professeur suppléant au Collège de France, rue Humboldt, 25, à Paris (14°). S. P.
1904. HALBERSTADT, ingénieur des Arts et Manufactures, rue des Écoles, 4 ter, à Paris (5°).
1894. HALSTED, professeur au Kenyon College, à Gambier (Ohio, États-Unis). S. P.
1901. HANCOCK (Harris), professeur à l'Université de Cincinnati, Auburn Hotel (Ohio, États-Unis).
1900. HARDEL, villa italienne, à Dieppedalle-Croisset (Seine-Inférieure).
1872. HATON DE LA GOUPILLIÈRE, membre de l'Institut, inspecteur général des mines, directeur honoraire de l'École des mines, rue de Vaugirard, 56, à Paris (6°). S. P.
1905. HEDRICK, professeur à l'Université, South Ninth street, 302, à Columbia (Missouri, États-Unis).
1892. HERMANN, libraire-éditeur, rue de la Sorbonne, 8, à Paris (5°).
1893. HIOUX, professeur en retraite, rue des Fossés-Saint-Jacques, 16, à Paris (5°).
1879. HOLST (Elling), professeur à l'École Polytechnique, à Høvik, près Christiania (Norvège).
1895. HOTT (S.), professeur à l'École St-Geneviève, rue Bausset, 4, à Paris (15°). S. P.
1880. HUMBERT, membre de l'Institut, ingénieur en chef des mines, professeur à l'École Polytechnique, rue Daubigny, 6, à Paris (17°).
1881. IMBER, directeur des études à l'École Centrale, place Voltaire, 2, à Paris (11°).
1903. ISSALY (l'abbé), rue Poquelin-Molière, 9, à Bordeaux.
1896. JACQUET (E.), professeur au Prytanée militaire, rue Couchot, 8, à la Flèche.
1898. JANKE (Dr E.), professeur à l'Académie des Mines, Ludwigskirchstrasse, 6, à Berlin W¹⁸ (Allemagne).
1898. JARRY (N.), ingénieur civil, avenue du Bel-Air, 7, à Paris (12°).
1872. JAVARY, chef de bataillon du génie en retraite, chef des travaux graphiques à l'École Polytechnique, rue du Cardinal-Lemoine, 1, à Paris (5°).
1903. JENSEN (J.-L.-W.-V.), ingénieur en chef des Téléphones, Gl. Kongevej, 80, à Copenhague, V (Danemark).
1872. JORDAN, membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique et au Collège de France, rue de Varenne, 48, à Paris (7°). S. P.
1875. JUNG, professeur à l'Institut technique supérieur, via Fatebenefratelli, 19, à Milan (Italie).
1892. KOCH (H. von), professeur à l'École Polytechnique, à Djursholm-Stockholm (Suède).
1880. KÖNIGS, professeur à la Faculté des Sciences, répétiteur à l'École Polytechnique, boulevard Arago, 101, à Paris (14°).
1897. LACAUCHIE, ingénieur civil, chef du laboratoire de la Compagnie générale des Omnibus, rue de Douai, 48, à Paris (9°).
1873. LAISANT, docteur ès sciences, répétiteur et examinateur à l'École Polytechnique, avenue Victor-Hugo, 162, à Paris (16°).

Date
de
l'admission.

1906. LALESCO, licencié ès sciences, rue Monge, 14, à Paris (5°).
1893. LANCELIN, astronome adjoint à l'Observatoire, rue Boissonnade, 3, à Paris (14°).
1899. LANDAU (Edmond), professeur à l'Université de Berlin, Hardenbergstrasse, 13, à Charlottenburg (Allemagne).
1896. LAUGEL, ancien attaché d'ambassade, villa Ensolcillée, à Beaulieu-sur-Mer (Alpes-Maritimes).
1873. LAUTH, manufacturier, à Thann (Alsace).
1896. LEAU, professeur au lycée Michelet, rue Vavin, 6, à Paris (6°).
1880. LÉAUTÉ, membre de l'Institut, boulevard de Courcelles, 18, à Paris (17°). S. P.
1896. LEBEL, professeur au lycée, avenue Bouisson-Bertrand, 38, à Montpellier.
1902. LEBESGUE, docteur ès sciences, chargé de cours à la Faculté des Sciences, rue des Quatre-Roues, 1, à Poitiers.
1903. LEBEUF, directeur de l'observatoire de Besançon.
1893. LECORNU, ingénieur en chef des mines, professeur à l'École Polytechnique, rue Gay-Lussac, 3, à Paris (5°).
1895. LÈMERAY, licencié ès sciences, ingénieur civil du génie maritime, boulevard de l'Océan, 51, à Saint-Nazaire (Loire-Inférieure).
1872. LEMOINE (Émile), ancien élève de l'École Polytechnique, villa Kérah, aux Bordes, par Montereau (Seine-et-Marne).
1904. LEMOYNE (T.), rue Ernest-Renan, 21, à Paris (15°).
1879. LE PAIGE, professeur à l'Université, à l'observatoire de Coïnte, à Liège (Belgique).
1895. LE ROUX, professeur à la Faculté des Sciences, rue de Châteaudun, 17, à Rennes.
1898. LE ROY, docteur ès sciences, boulevard Raspail, 117, à Paris (6°).
1891. LEBY, agent voyer d'arrondissement, à Pontoise (Seine-et-Oise).
1900. LEVI CIVITA (T.), professeur à l'Université, via Altinate, 14, à Padoue (Italie).
1882. LÉVY (Lucien), répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue du Regard, 12, à Paris (6°).
1872. LÉVY (Maurice), membre de l'Institut, inspecteur général des ponts et chaussées, professeur au Collège de France, avenue du Trocadéro, 15, à Paris (16°).
1875. LEZ (Henri), à Lorrez-le-Bocage (Seine-et-Marne).
1898. LINDELÖF (Ernst), professeur à l'Université, Sandvikskajan, 15, à Helsingfors (Finlande).
1877. LINDEMANN, professeur à l'Université, Franz-Josephstrasse, 12, à Munich (Bavière).
1886. LILOUVILLE, ingénieur des poudres, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, quai Henri-IV, 12, à Paris (4°).
1900. LÖVETT (E.-O.), professeur à l'Université de Princeton (New-Jersey, États-Unis).
1888. LUCAS (Félix), ingénieur en chef des ponts et chaussées en retraite, rue Boissière, 30, à Paris (16°).
1902. LUCAS-GIRARDVILLE, ingénieur à la Manufacture des Tabacs, rue de Charenton, 319, à Paris (12°).
1902. LUCAS DE PESLOUAN, ancien élève de l'École Polytechnique, avenue Rapp, 41, à Paris.
1882. MACÉ DE LÉPINAY, professeur de mathématiques spéciales au lycée Henri IV, rue Claude-Bernard, 79, à Paris (5°).
1895. MAILLET, ingénieur des ponts et chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique, rue de Fontenay, 11, à Bourg-la-Reine (Seine). S. P.
1905. MALUSKI, professeur au lycée Hoche, rue Gabriel, 12, à Versailles.
1905. MANTELL (M^{lle} L.), rue Dutot, 30, à Paris (15°).

Date
de
l'admission.

1906. **MARCUS**, licencié ès sciences, rue Thénard, 6, à Paris (5°).
1904. **MAROTTE**, professeur au lycée Charlemagne, rue de Reuilly, 35 *bis*, à Paris (12°).
1884. **MARTIN** (Artemas), 1535, Colombia Street N. W., à Washington D. C. (États-Unis).
1889. **MARTIN** (Émile), ancien élève de l'École Polytechnique, professeur de mathématiques, rue des Fossés-Saint-Jacques, 22, à Paris (5°).
1901. **MASSAU** (J.), professeur à l'Université, avenue des Arts, 43, à Gand (Belgique).
1894. **MAUPIN**, professeur au lycée, rue de l'église St-Ausone, 33, à Angoulême (Charente).
1897. **MEHME**, professeur à l'École technique supérieure, Lowenstrasse, à Stuttgart-Degerloch (Wurtemberg).
1889. **MENDIZABAL TAMBOREL** (DE), membre de la Société de Géographie de Mexico, calle de Jesus, 13, à Mexico (Mexique). S. P.
1884. **MENCEREAU**, licencié ès sciences, rue de l'Université, 193, à Paris (7°). S. P.
1902. **MERLIN**, docteur en sciences, rue de la Poste, 22, à Uccle (Belgique).
1902. **MESY** (R.), professeur d'hydrographie à Saint-Tropez (Var).
1904. **METZLER**, professeur à l'Université, à Syracuse (État de New-York).
1893. **MICHEL** (François), chef de parcours de la Compagnie des chemins de fer du Nord, faubourg Saint-Denis, 210, à Paris (10°).
1873. **MITTAG-LEFFLER**, professeur à l'Université, à Stockholm (Suède).
1904. **MIWA**, professeur à l'Université de Kyoto (Japon).
1902. **MOLK** (J.), professeur à la Faculté des Sciences, rue d'Alliance, 8, à Nancy.
1897. **MONTCHEUIL** (l'abbé DE), docteur ès sciences, rue du Languedoc, 9, à Toulouse.
1898. **MONTESUS DE BALLONE** (vicomte Robert DE), professeur à la Faculté libre des Sciences, boulevard de la Liberté, 121, à Lille (Nord).
1903. **MULLER** (J.-O.), Nikolausbergerweg, 49, à Göttingen (Allemagne).
1885. **NEUBERG**, professeur à l'Université, rue Sclessin, 6, à Liège (Belgique).
1897. **NICOLLIER**, professeur, à Montreux (Suisse).
1903. **NIELS NIELSEN**, inspecteur général de l'enseignement secondaire, Norrebrogade, 57, à Copenhague (Danemark).
1900. **NIEWENGLOWSKI**, docteur ès sciences, inspecteur général de l'Instruction publique, rue de l'Arbutète, 35, à Paris (5°).
1882. **OCAGNE** (M. D'), professeur à l'École des Ponts et Chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique, rue La Boétie, 30, à Paris (8°). S. P.
1905. **OUIVET**, professeur au lycée, à Dijon.
1873. **OVIDIO** (Enrico D'), professeur à l'Université, Corso-Oporto, 30, à Turin (Italie).
1901. **PADÉ** (H.), professeur à l'Université, rue de Turenne, 89, à Bordeaux.
1893. **PAINLEVÉ**, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences et à l'École Polytechnique, rue d'Assas, 33, à Paris (6°).
1888. **PAPKIER** (Georges), professeur de mathématiques spéciales au lycée, rue de Recouvrance, 20, à Orléans (Loiret).
1884. **PARAF**, professeur-adjoint à la Faculté des Sciences de Toulouse.
1881. **PELLET**, doyen de la Faculté des Sciences, rue Pascal, 30, à Clermont-Ferrand.
1874. **PERCIN**, général de division, rue de la Faisanderie, 116, à Paris (16°).
1881. **PEROTT** (Joseph), Université Clark, à Worcester (Massachusetts, États-Unis). S. P.
1873. **PERRIN** (R.), inspecteur général des mines, rue de Grenelle, 80, à Paris (7°). S. P.
1892. **PERRIN** (Élie), professeur de mathématiques, rue Tarbé, 3, à Paris (17°).
1896. **PETROVITCH**, professeur à l'Université, Kossantch-Venac, 26, à Belgrade (Serbie).

Date
de
l'admission.

1902. **PETROVITCH** (S.), capitaine d'artillerie de la garde, professeur adjoint à l'Académie d'artillerie Michel, Sabalkansky prospect 17 log. 15 à Saint-Petersbourg.
1887. **PEZZO** (DEL), professeur à l'Université, piazza San Marcellino, 2, à Naples (Italie).
1905. **PFEIFFER**, maître de conférences à l'Université, Tarassovskaya, 20, à Kiew (Russie).
1906. **PHILIPPE** (Léon), inspecteur général des Ponts et Chaussées, rue de Turin, 23 bis, à Paris (8°).
1879. **PICARD** (Émile), membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences et à l'École Centrale des Arts et Manufactures, rue Bara, 4, à Paris (6°).
1872. **PICQUET**, chef de bataillon du génie, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, rue Monsieur-le-Prince, 4, à Paris (6°).
1899. **PIERPONT** (James), professeur à l'Université Yale, Mansfield street, 42, à New Haven (Connecticut, États-Unis).
1882. **POINCARÉ**, membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes, professeur à la Faculté des Sciences, rue Claude-Bernard, 63, à Paris (5°). S. P.
1894. **POTROV**, docteur ès sciences, rue du Val-de-Grâce, 11, à Paris (5°).
1872. **POLIGNAC** (prince C. DE), à Radmannsdorf (Carniole, Autriche). S. P.
1906. **POPOVICI**, licencié ès sciences, rue Monge, 29, à Paris (5°).
1899. **PRINGSHEIM**, professeur à l'Université, Arcisstrasse, 12, à Munich (Bavière).
1896. **PRUVOST**, inspecteur général honoraire de l'Instruction publique, 11, rue de la Tour, à Paris (16°).
1902. **PUX** (Victor), ancien élève de l'École Polytechnique, professeur de mathématiques, rue Madame, 54, à Paris (6°).
1896. **QUIQUET**, actuaire de la Compagnie *la Nationale*, boulevard Saint-Germain, 92, à Paris (5°).
1898. **RABUT**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue Duplessis, 77, à Versailles.
1883. **RAFFY**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Pierre-Nicole, 7, à Paris (5°). S. P.
1903. **REMOINDUS**, professeur de mathématiques, rue Soultani, 17, à Athènes (Grèce).
1906. **RENY**, élève-ingénieur des mines, boulevard Arago, 112, à Paris (14°).
1900. **RENIARD**, avenue Victor-Hugo, 162, à Paris (16°).
1903. **RICHARD**, professeur au lycée, place du Rosoir, 1, à Dijon.
1893. **RIVIEREAU** (l'abbé), professeur à l'Institut catholique, à Angers (Maine-et-Loire).
1903. **ROCHE**, agrégé de l'Université, rue d'Assas, 76, à Paris (6°).
1872. **ROUART**, ingénieur civil, rue de Lisbonne, 34, à Paris (8°).
1872. **ROUCHÉ**, membre de l'Institut, boulevard St-Germain, 213, à Paris (7°).
1896. **ROUSIER**, docteur ès sciences, rue Sylvabelle, 84, à Marseille.
1885. **ROUQUET** (V.), professeur honoraire de mathématiques spéciales, à Belpech (Aude).
1906. **ROUSIERS**, professeur au collège Stanislas, boulevard Raspail, 206, à Paris (14°).
1900. **SALTYKOW**, professeur à l'Université, à Kharkow (Russie). S. P.
1872. **SARTIAUX**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, chef de l'exploitation à la Compagnie du chemin de fer du Nord, à Paris.
1885. **SAUVAGE**, professeur à la Faculté des Sciences de Marseille.
1897. **SCHOU** (Erik), Gl. Antvorskov, à Slagelse (Danemark).
1881. **SCHOUTE**, professeur à l'Université, à Groningue (Hollande).
1901. **SEE** (Thomas-J.-J.), Observatory Mare Island (Californie).
1896. **SÉGUIER** (J.-A. DE), docteur ès sciences, rue des Saints-Pères, 56, à Paris (7°).
1882. **SÉLIVANOFF** (Démétrius), professeur à l'Université, Fontanka, 116, log. 16, à Saint-Petersbourg (Russie). S. P.

Date
de
l'admission.

1900. SERVANT, docteur ès sciences, rue des Saints-Pères, 8, à Paris (7°).
1900. SPARRE (comte Magnus DE), avenue de l'Archevêché, 7, à Lyon. S. P.
1879. STEPHANOS (D^r Cyparissos), professeur à l'Université, à Athènes (Grèce).
1901. STETSON (Orlando), à Franklin (Massachusetts, États-Unis).
1898. STÖRNER (Carl), professeur à l'Université, Davesgade, 14, à Christiania (Norvège).
1903. SUCHAR, docteur ès sciences, rue Saint-Lazare, 43, à Paris (8°).
1904. SUDRIA, professeur à l'École pratique d'électricité industrielle, rue Ernest-Renan, 28, à Paris (15°).
1904. SUNDMAN, maître de conférences à l'Université, Skepparebrinken, 2, à Helsingfors (Finlande).
1872. SYLOW, professeur à l'Université, à Frederikshald (Norvège). S. P.
1896. TANNENBERG (DE), docteur ès sciences, rue d'Assas, 118, à Paris (6°).
1875. TANNERY, professeur à la Faculté des Sciences, sous-directeur de l'École Normale supérieure, rue d'Ulm, 45, à Paris (5°).
1882. TARRY (Gaston), boulevard Pereire, 177, à Paris (17°). S. P.
1899. THYBAUT, professeur au lycée Saint-Louis, boulevard St-Germain, 11, à Paris (5°).
1873. TISSOT, ancien examinateur d'admission à l'Ecole Polytechnique, à Voreppe (Isère).
1896. TISSOT, enseigne de vaisseau, professeur au Norda, à Brest (Finistère).
1896. TORRES, membre de l'Académie des Sciences, Valgame Dios, 3, à Madrid (Espagne).
1893. TOUCHE, lieutenant-colonel d'artillerie territoriale, rue Truffault, 23, à Paris (17°).
1872. TRESCA, ingénieur en chef des ponts et chaussées en retraite, rue du général Henrion-Berthier, 7, à Neuilly-sur-Seine (Seine).
1896. TRESCA, professeur au lycée Saint-Louis, rue Mizon, 6, à Paris (14°).
1893. VALLÉE-POUSSIN (CH.-J. DE LA), professeur à l'Université, rue Léopold, 38, à Louvain (Belgique).
1904. VANDEUREN, professeur à l'École militaire, avenue Macan, 16, à Bruxelles.
1905. VAN VLECK, professeur de Mathématiques, University of Wisconsin, à Maddison (Wisconsin, États-Unis).
1897. VASSILAS-VITALIS (J.), professeur à l'Ecole militaire supérieure, rue Socrate, 11 A, à Athènes (Grèce).
1898. VASSILIEF, président de la Société physico-mathématique, à Kasan (Russie).
1901. VESSIOT, professeur à la Faculté des Sciences, quai des Brotteaux, 4, à Lyon.
1888. VOLTERRA (Vito), professeur à l'Université, via Lucina, 17, à Rome.
1904. VORONOI, professeur à l'Université, rue Vilcza, 18, à Varsovie (Russie).
1900. VUIBERT, éditeur, boulevard Saint-Germain, 63, à Paris (5°).
1880. WALCKENAE, ingénieur en chef des mines, boulevard St-Germain, 218, à Paris (7°).
1879. WELLL, directeur du collège Chaptal, boulevard des Batignolles, 45, à Paris (8°).
1906. WILSON, assistant à l'Université de Yale, à New-Haven (Connecticut, États-Unis).
1878. WORMS DE ROMILLY, ingénieur en chef des mines, rue Balzac, 7, à Paris (8°).
1882. ZABOUDSKI, membre du Comité d'artillerie et professeur à l'Académie d'Artillerie, rue Znamenkaia, 22, à Saint-Pétersbourg (Russie).
1890. ZAREMBA, professeur à l'Université, rue Biskupia, 5, à Cracovie (Autriche).
1903. ZERVOS, professeur agrégé à l'Université, rue Marie, 5 B, à Athènes (Grèce).
1881. ZEUTHEN, professeur à l'Université, Rosenvonget, Sanct-Knutkestræde, 11, à Copenhague (Danemark).
1898. ZIWET, South Ingalls street, 644, à Ann Arbor (Michigan, États Unis).

**Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels
la Société mathématique de France échange son Bulletin.**

Amsterdam.....	Académie Royale des Sciences d'Amsterdam.	Pays-Bas.
Amsterdam.....	Société mathématique d'Amsterdam.	Pays-Bas.
Amsterdam.....	<i>Revue semestrielle des publications mathématiques.</i>	Pays-Bas.
Bâle.....	Naturforschende Gesellschaft.	Suisse.
Baltimore.....	<i>American Journal of Mathematics.</i>	États-Unis.
Berlin.....	Académie des Sciences de Berlin.	Allemagne.
Berlin.....	<i>Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.</i>	Allemagne.
Berlin.....	<i>Journal für die reine und angewandte Mathematik.</i>	Allemagne.
Bologne.....	Académie des Sciences de l'Institut de Bologne.	Italie.
Bordeaux.....	Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux.	France.
Bruxelles.....	Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.	Belgique.
Bruxelles.....	Société scientifique de Bruxelles.	Belgique.
Cambridge.....	Cambridge philosophical Society.	Grande-Bretagne.
Cambridge.....	<i>Annals of Mathematics.</i>	Massachusetts.
Christiania.....	<i>Archiv for Mathematik og Naturvidenskab.</i>	Norvège.
Coimbre.....	<i>Annaes scientificos da Academia Polytechnica do Porto.</i>	Portugal.
Copenhague.....	<i>Nyt Tidsskrift for Mathematik.</i>	Danemark.
Cracovie.....	Académie des Sciences de Cracovie.	Autriche.
Delft.....	Académie technique.	Pays-Bas.
Édimbourg.....	Société Royale d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Édimbourg.....	Société mathématique d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Gand.....	<i>Mathesis.</i>	Belgique.
Göttingen.....	Société Royale des Sciences de Göttingen.	Allemagne.
Halifax.....	Nova Scotian Institute of Science.	N ^{lle} -Écosse (Canada)
Hambourg.....	Société mathématique de Hambourg.	Allemagne.
Harlem.....	Société hollandaise des Sciences.	Hollande.
Helsingfors.....	Société des Sciences de Finlande.	Finlande.
Kansas.....	Université de Kansas.	États-Unis.
Kasan.....	Société physico-mathématique.	Russie.
Kharkov.....	Annales de l'Université.	Russie.
Kharkov.....	Société mathématique de Kharkov.	Russie.
La Haye.....	Archives néerlandaises des Sciences exactes et naturelles.	Pays-Bas.
Leipzig.....	Société Royale des Sciences de Saxe.	Allemagne.
Leipzig.....	<i>Mathematische Annalen.</i>	Allemagne.
Leipzig.....	<i>Archiv der Mathematik und Physik.</i>	Allemagne.

Liège.....	Société Royale des Sciences.	Belgique.
Livourne.....	<i>Periodico di Matematica.</i>	Italie.
Londres.....	Société astronomique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres.....	Société mathématique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres.....	Société Royale de Londres.	Grande-Bretagne.
Luxembourg.....	Institut Royal de Luxembourg.	Luxembourg.
Marseille.....	<i>Annales de la Faculté des Sciences de Marseille.</i>	France.
Mexico.....	Sociedad científica <i>Antonio Alzate.</i>	Mexique.
Milan.....	Institut Royal lombard des Sciences et Lettres.	Italie.
Moscou.....	Société mathématique de Moscou.	Russie.
Munich.....	Académie des Sciences de Munich.	Ravière.
Naples.....	Académie Royale des Sciences physiques et mathématiques de Naples.	Italie.
New-Haven.....	Académie des Sciences et Arts du Connecticut.	États-Unis.
New-York.....	American mathematical Society.	États-Unis.
Odessa.....	Société des naturalistes de la Nouvelle-Russie.	Russie.
Palerme.....	<i>Rendiconti del Circolo matematico.</i>	Italie.
Paris.....	Académie des Sciences de Paris.	France.
Paris.....	Association française pour l'avancement des Sciences.	France.
Paris.....	Société philomathique de Paris.	France.
Paris.....	<i>Bulletin des Sciences mathématiques.</i>	France.
Paris.....	<i>Journal de l'École Polytechnique.</i>	France.
Paris.....	Institut des Actuaire français.	France.
Paris.....	<i>Intermédiaire des Mathématiciens.</i>	France.
Pise.....	École Royale Normale supérieure de Pise.	Italie.
Pise.....	Université Royale de Pise.	Italie.
Pise.....	<i>Il Nuovo Cimento.</i>	Italie.
Prague.....	Académie des Sciences de Bohême.	Autriche.
Prague.....	<i>Časopis pro pěstování matematiky a fysiky.</i>	Autriche.
Prague.....	Société mathématique de Bohême.	Autriche.
Rome.....	Académie Royale des <i>Lincei.</i>	Italie.
Saint-Petersbourg.	Académie Impériale des Sciences.	Russie.
Stockholm.....	<i>Acta Mathematica.</i>	Suède.
Stockholm.....	<i>Bibliotheca mathematica.</i>	Suède.
Tokyo.....	Mathematico-physical Society.	Japon.
Toulouse.....	<i>Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse.</i>	France.
Turin.....	Académie des Sciences.	Italie.
Upsal.....	Société Royale des Sciences d'Upsal.	Russie.
Varsovie.....	Prace Matematyczno Fizyczne.	Russie.
Venise.....	Institut Royal vénitien des Sciences, Lettres et Arts.	Italie.
Vienne.....	Académie Impériale des Sciences de Vienne.	Autriche.
Vienne.....	<i>Monatshefte für Mathematik und Physik.</i>	Autriche.
Washington.....	Philosophical Society.	États-Unis.
Zurich.....	Naturforschende Gesellschaft.	Suisse.

RÈGLEMENT

VOTÉ A LA SÉANCE DE L'ASSEMBLÉE GÉNÉRALE, LE 20 JUIN 1888,
MODIFIÉ A LA SÉANCE DU 10 JANVIER 1907.

CHAPITRE PREMIER.

DISPOSITIONS GÉNÉRALES.

ARTICLE PREMIER. — Les conditions à remplir, pour être membre de la Société mathématique de France, sont fixées par le premier paragraphe de l'article 3 des statuts.

Dans le cas où, pour des motifs sérieux, le Bureau croit devoir surseoir à la présentation d'un candidat, le différend est soumis au Conseil d'administration, qui statue définitivement dans sa séance la plus prochaine.

ART. 2. — Les membres nouvellement élus, après avoir acquitté le droit d'admission de dix francs et le montant de la première cotisation annuelle, reçoivent un diplôme signé par le président, l'un des secrétaires et le trésorier, et portant le sceau de la Société.

ART. 3. — La cotisation annuelle est payée au commencement de chaque exercice, dont l'origine est fixée au 1^{er} novembre de chaque année.

Les nouveaux membres doivent payer la totalité de la cotisation de l'exercice en cours, quelle que soit l'époque de leur admission.

ART. 4. — Tout membre a le droit, à une époque quelconque, de racheter ses cotisations à venir et de devenir *sociétaire perpétuel*, moyennant la somme de *trois cents francs* (art. 3 des statuts). Cette somme peut être payée en une seule fois, ou par versements de *cent francs* chacun, se suivant à des intervalles qui ne doivent pas dépasser une année.

En cas de retard, la cotisation annuelle continue à être exigible, indépendamment et jusqu'à complet acquittement de la somme de *trois cents francs*.

ART. 5. — Tout membre qui, n'étant pas sociétaire perpétuel, négligera de payer régulièrement sa cotisation annuelle, sera, après avertissement du trésorier, à lui adressé par lettre recommandée et resté sans effet, considéré comme démissionnaire.

CHAPITRE II.

TENUE DES SÉANCES DE LA SOCIÉTÉ.

ART. 6. — La Société tient des séances ordinaires deux fois par mois; elle prend trois mois de vacances, de la mi-juillet à la mi-octobre.

ART. 7. — La première séance de janvier est consacrée spécialement aux élections pour le renouvellement du Bureau et du Conseil.

ART. 8. — Il est adressé chaque année, dès le début d'octobre, à tous les membres de la Société, une carte imprimée portant l'indication des jours de séance.

ART. 9. — Pour assister aux séances, les personnes étrangères à la Société doivent être présentées par l'un de ses membres.

ART. 10. — La présence du président ou d'un vice-président, assisté d'un des secrétaires ou vice-secrétaires, suffit pour constituer le Bureau à chaque séance.

ART. 11. — En cas d'absence du président et des vice-présidents, le trésorier, ou, à son défaut, l'archiviste, occupe le fauteuil.

A défaut des membres du Bureau qui viennent d'être désignés, les fonctions de président sont remplies par le plus âgé des sociétaires présents à la séance.

En cas d'absence des secrétaires et vice-secrétaires, le président du jour invite un des membres présents à en remplir les fonctions.

ART. 12. — Chaque séance commence par la lecture du procès-verbal de la séance précédente.

Les Communications sont faites dans l'ordre de leur inscription. Chacune d'elles ne peut durer plus de vingt minutes.

Ces dispositions ne s'appliquent pas aux conférences scientifiques qui pourraient être organisées par le Bureau.

ART. 13. — Les questions relatives à l'administration de la Société, à moins d'une demande du Conseil, ne peuvent être traitées en séance ordinaire. Elles doivent faire l'objet d'une note remise au président, qui en réfère au Conseil dans sa plus prochaine réunion.

CHAPITRE III.

BULLETIN ET PUBLICATIONS DIVERSES.

ART. 14. — La Société publie par livraisons un recueil annuel qui a pour titre : *Bulletin de la Société mathématique de France*, et qui contient, avec un extrait des procès-verbaux des séances, des Notes et Mémoires sur les Mathématiques pures ou appliquées, ayant pour auteurs des membres de la Société, et présentant quelque originalité au point de vue de la méthode ou des résultats.

Les travaux des personnes étrangères à la Société peuvent, exceptionnellement, trouver place dans le *Bulletin*, à la condition d'offrir un intérêt suffisant.

ART. 15. — L'un des secrétaires est spécialement chargé par le Conseil de tout ce qui concerne la publication du *Bulletin*. Il est assisté, dans le choix des Notes et Mémoires qui peuvent y être insérés, par une *Commission d'impression* composée du président, des vice-présidents, du deuxième secrétaire et des vice-secrétaires.

ART. 16. — La Société se propose, dans les limites de ses droits et de ses ressources, de publier, soit dans le corps du *Bulletin*, soit à part, des Mémoires inédits et de réimprimer des œuvres importantes d'anciens mathématiciens français ou étrangers (art. 14 des statuts).

ART. 17. — Les livraisons du *Bulletin* sont adressées à tous les membres de la Société, au fur et à mesure de leur publication. Toutefois, dans le cas où un sociétaire se met en retard dans le paiement de sa cotisation, l'envoi du *Bulletin* est suspendu pour lui, jusqu'à ce qu'il ait acquitté l'arriéré.

ART. 18. — Le Conseil fixe, par mesure générale, les prix réduits moyennant lesquels les membres de la Société peuvent se procurer les volumes du *Bulletin* parus antérieurement à leur admission, et les Ouvrages autres que le *Bulletin* publiés par les soins de la Société.

CHAPITRE IV.

COMPOSITION ET MODE D'ÉLECTION DU BUREAU ET DU CONSEIL.

ART. 19. — La Société est administrée par un Conseil composé comme l'indique l'article 4 des statuts.

Le Bureau du Conseil est le même que celui de la Société (art. 4 des statuts).

Le nombre des membres honoraires prévus par l'article 4 des statuts n'est pas limité; ces membres honoraires ne peuvent être nommés que sur la présentation du Conseil ou sur une proposition spéciale faite par écrit, signée de vingt membres de la Société, et déposée au plus tard dans la dernière séance de décembre.

ART. 20. — Le renouvellement du Bureau et du Conseil a lieu chaque année, dans la première séance de janvier, et conformément aux prescriptions des articles 5, 6 et 16 des statuts.

Dans ce but, un avis de convocation, accompagné de bulletins de vote en blanc et, s'il y a lieu, des propositions du Conseil, est envoyé, en temps utile, à tous les membres de la Société.

ART. 21. — Les membres, qui ne peuvent assister à la séance dans laquelle ont lieu les élections, sont invités à envoyer au président, en temps opportun, leurs votes sous enveloppes fermées, en y joignant un avis d'envoi portant leur signature.

Les enveloppes contenant les bulletins de vote ne sont ouvertes qu'au moment du scrutin.

CHAPITRE V.

ATTRIBUTIONS DES MEMBRES DU BUREAU.

ART. 22. — Le président veille à l'observation des statuts et du règlement de la Société; il assure l'exécution des délibérations du Conseil.

ART. 23. — Les secrétaires ou, à leur défaut, les vice-secrétaires rédigent les procès-verbaux des séances de la Société et des séances du Conseil.

ART. 24. — Sous la direction du président, les secrétaires sont chargés de la correspondance pour tout ce qui concerne les travaux et les affaires de la Société; ils convoquent la Société, le Conseil et les Commissions, quand il y a lieu, et préparent les ordres du jour.

ART. 25. — L'archiviste est chargé de la garde des archives de la Société. Il a sous sa direction la bibliothèque; il dresse le catalogue des livres, brochures et manuscrits qui en font partie.

ART. 26. — Le trésorier est chargé du recouvrement des sommes dues à la Société. Il acquitte les dépenses ordonnancées par l'un des secrétaires, spécialement délégué par le Conseil. Il tient un registre des recettes et des dépenses.

ART. 27. — Il ne peut être fait aucun emploi extraordinaire des fonds de la Société, sans une délibération spéciale du Conseil.

CHAPITRE VI.

ATTRIBUTIONS DU CONSEIL ET TENUE DE SES SÉANCES. — COMMISSIONS.

ART. 28. — Le Conseil se réunit dans les conditions fixées par l'article 7 des statuts.

ART. 29. — A chaque séance du Conseil, les noms des membres présents sont consignés au procès-verbal.

ART. 30. — Sur la proposition de cinq membres, le vote peut avoir lieu au scrutin secret.

ART. 31. — Sur la demande de cinq membres, il peut être fait appel à la Société des décisions qui n'auraient pas été prises aux deux tiers des voix des membres présents.

ART. 32. — Les procès-verbaux des séances du Conseil doivent être transcrits sur un registre coté et parafé par l'un des secrétaires; ils doivent être signés par le président et le secrétaire qui ont composé le Bureau; les renvois doivent être parafés et les mots rayés approuvés.

ART. 33. — Le Conseil se réunit chaque année au cours du dernier trimestre, pour délibérer sur l'état des affaires de la Société, prendre les mesures préparatoires relatives aux élections prévues au Chapitre IV, et nommer la Commission de comptabilité chargée de vérifier la gestion du trésorier.

ART. 34. — Cette Commission ne peut être composée de moins de trois membres. Elle fait son rapport à l'Assemblée générale dans la première séance de janvier.

ART. 35. — Le Conseil peut provoquer, parmi les membres de la Société, la formation de Commissions ayant un but spécial, technique ou scientifique.

CHAPITRE VII.

REVISION DES STATUTS OU DU RÈGLEMENT.

ART. 36. — Les conditions dans lesquelles peut avoir lieu la revision des statuts sont fixées par l'article 18 desdits statuts.

Dans le cas où, à la suite d'une première convocation, l'assemblée extraordinaire, réunie dans ce but, ne pourrait délibérer valablement, une nouvelle assemblée extraordinaire serait réunie dans un délai inférieur à cinq mois.

ART. 37. — Le règlement ne peut être modifié que par une Assemblée extraordinaire, convoquée à cet effet.

Cette Assemblée extraordinaire ne peut délibérer valablement que si le quart au moins des membres de la Société sont présents ou représentés. Si cette proportion n'est pas atteinte, une nouvelle Assemblée extraordinaire est réunie dans un délai compris entre un mois et cinq mois; ses délibérations sont valables, quel que soit le nombre des membres présents ou représentés.

ART. 38. — Toute proposition de modification au règlement, si elle n'émane pas de l'initiative du Conseil d'administration, doit être formulée dans une lettre signée de vingt-cinq membres de la Société au moins, et adressée au président. Celui-ci doit réunir l'Assemblée extraordinaire dans les trente jours qui suivent la remise de la proposition, les vacances annuelles n'étant pas comptées dans ce délai.

ART. 39. — Avant la réunion d'une Assemblée extraordinaire convoquée pour délibérer sur la revision des statuts ou du règlement, le Conseil d'administration, réuni à cet effet, nomme une commission composée de sept de ses membres, chargée d'examiner la demande de revision et de présenter sur cette demande un rapport à l'assemblée extraordinaire.

ART. 40. — Pour les Assemblées extraordinaires, tous les membres de la Société sont spécialement convoqués à domicile.

LISTE DES PRÉSIDENTS DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE DEPUIS SA FONDATION.

MM. CHARLES (1873). — LAFFON DE LADÉBAT (1874). — BIENAYMÉ (1875). — DE LA GOURNÉDIE (1876). — MANNHEIM (1877). — DARBOUX (1878). — O. BONNET (1879). — JORDAN (1880). — LAGUERRE (1881). — HALPHEN (1882). — ROUCHÉ (1883). — PICARD (1884). — APPELL (1885). — POINCARÉ (1886). — FOURET (1887). — LAISANT (1888). — ANDRÉ (DÉSIRÉ) (1889). — HATON DE LA GOUPIILLIÈRE (1890). — COLLIGNON (1891). — VICAIRE (1892). — HUMBERT (1893). — PICQUET (1894). — GOURSAT (1895). — KÖNIGS (1896). — PICARD (1897). — LECORNU (1898). — GUYOU (1899). — POINCARÉ (1900). — D'OCAGNE (1901). — RAFFY (1902). — PAINLEVÉ (1903). — CARVALLO (1904). — BOREL (1905). — HADAMARD (1906).

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE

PUBLIÉ
PAR LES SECRÉTAIRES.

S'adresser, pour la rédaction, à M. RAFFY, rue Pierre-Nicole, 7, Paris, 5^e;
pour la distribution, à M. SERVANT, rue des Saints-Pères, 8, Paris, 7^e.

TOME XXXV. — FASCICULE I.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
A LA SORBONNE.
—
1907

MM. les Membres de la Société sont priés d'adresser leur cotisation à M. *Claude-Lafontaine* banquier, rue de Trévis, n° 32, à Paris, Trésorier de la Société.

On s'abonne et l'on trouve les Volumes déjà publiés au siège de la Société et à la Librairie Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, Paris.

Les séances de la Société mathématique ont lieu les premier et troisième jendis de chaque mois à 9 heures du soir.

Depuis le 1^{er} mars 1900 les séances de la Société ont lieu dans une salle de la Faculté des Sciences (entrée place de la Sorbonne, escalier tout au bout de la galerie, deuxième étage à droite).

Les Membres de la Société ont dû recevoir une carte, portant le timbre du Secrétariat, leur donnant accès à la Bibliothèque de l'Université, et fournissant à ce sujet les renseignements nécessaires; ceux qui ne l'auraient pas reçue sont priés d'en informer le Secrétariat.

La correspondance peut être adressée, soit à la Faculté des Sciences, place de la Sorbonne, soit au domicile de l'un des secrétaires, de préférence à M. Servant, sauf ce qui concerne la rédaction du Bulletin, qui doit être adressé de préférence à M. Raffy.

AVIS.

Dans sa séance du 15 mars 1906, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé qu'à l'avenir tout Membre de la Société qui voudra compléter sa collection du *Bulletin* aura le droit personnel de le faire, une seule fois pour chacun des volumes publiés avant son admission, aux prix suivants :

3 francs le volume pour chacun des trente premiers tomes;

6 francs le volume pour chacun des tomes suivants, ce dernier prix devant être réduit à 4 francs pour les acheteurs de dix volumes au moins.

Dans sa séance du 28 février 1900, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé qu'à l'avenir tout Membre de la Société, auteur d'un travail *quelconque* inséré dans le Bulletin et désirant en obtenir des tirages à part, **devra en faire la demande en retournant l'épreuve corrigée.**

Si le nombre demandé ne dépasse pas *cinquante*, les frais du tirage à part seront faits par la Société.

Conformément à des décisions prises par le Conseil et par la Commission d'impression :

1^o Le *Bulletin*, depuis le Tome XXVII, paraît tous les trois mois;

2^o Les auteurs de tous les travaux destinés au *Bulletin* sont instamment priés d'inscrire en tête de leurs manuscrits la classification que leur assigne, d'après le sujet traité, l'*Index du Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*;

3^o Ils sont également invités à ne pas dépasser, autant que possible, la proportion de une figure pour quatre pages de texte imprimé.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 8 NOVEMBRE 1906.

PRÉSIDENTE DE M. HADAMARD.

Communications :

M. Lecornu : *Sur l'extinction du frottement.*

M. Raffy : *Sur l'isothermie relative des réseaux et sur les caractéristiques (asymptotiques et lignes de courbure) des surfaces à lignes de courbure isothermes-conjuguées.*

M. Hadamard signale deux Mémoires de Worpitzky, publiés dès 1870 et où se trouvent certains résultats fondamentaux relatifs à la détermination des singularités des séries entières.

SÉANCE DU 22 NOVEMBRE 1906.

PRÉSIDENTE DE M. HADAMARD.

Communications :

M. Fatou : *Sur certaines séries de Taylor.*

M. Remy : *Sur deux classes de surfaces du quatrième ordre liées à l'octuple gauche.*

M. Hadamard : *Sur une question du calcul des variations.*

SÉANCE DU 6 DÉCEMBRE 1906.

PRÉSIDENTE DE M. HADAMARD.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : M. K.-L. Barthelemy, présenté par MM. Raffy et Grévy; MM. Guerby et Rousiers,

présentés par MM. Blutel et Grévy ; M. Gargam de Moncetz, présenté par MM. Picard et Raffy ; M. Lalesco, présenté par MM. Picard et Hadamard.

Communications :

M. Maillet : *Sur diverses propriétés des nombres transcendants de Liouville.*

M. Lalesco : *Sur le groupe des équations trinomes de degré premier.*

M. Raffy : *Remarques sur la recherche des surfaces isothermiques.*

SÉANCE DU 20 DÉCEMBRE 1906.

PRÉSIDENCE DE M. HADAMARD.

Communications :

M. Remy : *Sur une famille de surfaces hyperelliptiques à quinze points doubles.*

M. Raffy : *Sur la recherche des surfaces dont les courbures principales sont fonctions l'une de l'autre.*

SÉANCE DU 10 JANVIER 1907.

PRÉSIDENCE DE M. HADAMARD.

La Société, réunie en Assemblée générale, procède au renouvellement de son Bureau et d'une partie du Conseil d'administration. Elle entend et approuve le Rapport de la Commission des finances.

La Société, réunie en Assemblée générale extraordinaire, discute le Rapport présenté par la Commission de revision du Règlement ⁽¹⁾.

(1) Le texte nouveau du Règlement, tel qu'il résulte des décisions prises dans cette séance, est inséré dans le présent Volume, p. xvi et suiv.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR L'EXTINCTION DU FROTTEMENT ;

PAR M. L. LECORNU.

Dans une Adresse lue en 1905 au Congrès de l'Association française pour l'avancement des sciences, M. Appell appelait l'attention sur divers cas où le mouvement d'un système s'effectue de façon que le travail de frottement diminue de plus en plus, comme si le système cherchait à échapper au frottement : c'est ce qui arrive notamment dans le glissement d'un cerceau ou d'une boule, glissement qui aboutit finalement à un simple roulement, ou encore dans le redressement progressif de l'axe d'un corps de révolution lancé sur un plan horizontal.

Je voudrais signaler ici un autre exemple assez général, dans lequel la même tendance se manifeste avec une netteté particulière. Il s'agit du mouvement d'un ensemble quelconque de sphères homogènes qui ont leurs centres fixes et qui exercent à leurs divers points de contact des pressions mutuelles données.

Je suppose d'abord que le système, après avoir été lancé d'une façon arbitraire, soit entièrement abandonné à lui-même. Considérons deux de ces sphères, S_1 et S_2 , tangentes en un point A. Soient x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2 les coordonnées de leurs centres O_1 et O_2 par rapport à trois axes fixes rectangulaires. Soient p_1, q_1, r_1 et p_2, q_2, r_2 les composantes de leurs rotations. Soient enfin ξ, η, ζ les coordonnées de A. La vitesse de glissement V de S_2 par rapport à S_1 a pour composantes :

$$\begin{aligned}u &= q_2(\zeta - z_2) - r_2(\eta - y_2) - q_1(\zeta - z_1) + r_1(\eta - y_1) \\v &= r_2(\xi - x_2) - p_2(\zeta - z_2) - r_1(\xi - x_1) + p_1(\zeta - z_1) \\w &= p_2(\eta - y_2) - q_2(\xi - x_2) - p_1(\eta - y_1) + q_1(\xi - x_1).\end{aligned}$$

Si F désigne l'effort tangentiel, de grandeur constante, que la sphère S_1 éprouve de la part de S_2 en vertu du frottement, les composantes de cet effort sont $F \frac{u}{V}$, $F \frac{v}{V}$, $F \frac{w}{V}$, et le moment de F

par rapport à O , a pour composantes :

$$L = \frac{F}{V} [\omega(\eta - \gamma_1) - v(\zeta - z_1)],$$

$$M = \frac{F}{V} [u(\zeta - z_1) - \omega(\xi - x_1)],$$

$$N = \frac{F}{V} [v(\xi - x_1) - u(\eta - \gamma_1)].$$

D'autre part, la relation $V^2 = u^2 + v^2 + \omega^2$ donne, en remarquant que u ne contient pas p_1 :

$$V \frac{\partial V}{\partial p_1} = v \frac{\partial v}{\partial p_1} + \omega \frac{\partial \omega}{\partial p_1} = v(\zeta - z_1) - \omega(\eta - \gamma_1) = -\frac{VL}{F}.$$

On est ainsi conduit aux trois identités :

$$L = -F \frac{\partial V}{\partial p_1}, \quad M = -F \frac{\partial V}{\partial q_1}, \quad N = -F \frac{\partial V}{\partial r_1}.$$

Si donc A_1 désigne le moment d'inertie de la sphère S_1 par rapport à l'un de ses diamètres, les équations du mouvement de cette sphère sont

$$A_1 \frac{dp_1}{dt} = -\sum F \frac{\partial V}{\partial p_1}, \quad A_1 \frac{dq_1}{dt} = -\sum F \frac{\partial V}{\partial q_1}, \quad A_1 \frac{dr_1}{dt} = -\sum F \frac{\partial V}{\partial r_1},$$

les sommations étant étendues à toutes les sphères qui sont en contact avec S_1 , ou, en d'autres termes, à toutes les vitesses V dont l'expression renferme p_1, q_1, r_1 .

Ceci posé, considérons la fonction $\Phi = \Sigma FV$ calculée pour l'ensemble de tous les points de contact existant dans le système donné de sphères. On peut écrire :

$$A_1 \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial p_1}, \quad A_1 \frac{dq_1}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial q_1}, \quad A_1 \frac{dr_1}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial r_1},$$

d'où

$$A_1 \left[\left(\frac{dp_1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dq_1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dr_1}{dt} \right)^2 \right] dt = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial r_1} dr_1 \right).$$

Si nous faisons la somme de toutes les équations analogues, et si nous désignons par $\frac{d\Phi}{dt}$ la dérivée totale de Φ par rapport au temps, il vient

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\sum A \left[\left(\frac{dp}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right].$$

Cette dérivée est donc négative, et par conséquent : *la somme des vitesses de glissement multipliées par les efforts tangentiels correspondants est constamment décroissante, ou bien encore :*

Le travail du frottement, rapporté à chaque instant à l'unité de temps, tend constamment vers zéro.

La démonstration s'applique tant qu'il y a effectivement glissement en chacun des points de contact. Examinons ce qui se passe quand pour l'un de ces points, A par exemple, le glissement se transforme en roulement. A ce moment, V s'annule et l'effort tangentiel prend une valeur f inférieure à F ; sa direction est simplement assujettie à demeurer dans le plan tangent commun aux sphères S_1 et S_2 . Soient α , β , γ les cosinus directeurs de f . Si l'on appelle Ψ la fonction ΣFV calculée en laissant de côté A, les équations du mouvement de S_1 et S_2 sont

$$\begin{aligned} A_1 \frac{dp_1}{dt} &= f[\beta(\zeta - z_1) - \gamma(\eta - y_1)] - \frac{\partial \Psi}{\partial p_1}, \\ &\dots\dots\dots, \\ A_2 \frac{dp_2}{dt} &= -f[\beta(\zeta - z_2) - \gamma(\eta - y_2)] - \frac{\partial \Psi}{\partial p_2}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Si l'on forme l'expression

$$\begin{aligned} E &= A_1 \left[\left(\frac{dp_1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dq_1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dr_1}{dt} \right)^2 \right] \\ &\quad + A_2 \left[\left(\frac{dp_2}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dq_2}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dr_2}{dt} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

le coefficient de $f\alpha$ est

$$(\eta - y_1) \frac{dr_1}{dt} - (\zeta - r_1) \frac{dq_1}{dt} - (\eta - y_2) \frac{dr_2}{dt} + (\zeta - r_2) \frac{dq_2}{dt}.$$

Ce coefficient est nul, car il représente la dérivée $\frac{du}{dt}$, de la quantité u , qui est nulle pendant le roulement. β et γ disparaissent de même, et il reste seulement

$$-E = \frac{\partial \Psi}{\partial p_1} \frac{dp_1}{dt} + \frac{\partial \Psi}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial \Psi}{\partial r_1} \frac{dr_1}{dt} + \frac{\partial \Psi}{\partial p_2} \frac{dp_2}{dt} + \frac{\partial \Psi}{\partial q_2} \frac{dq_2}{dt} + \frac{\partial \Psi}{\partial r_2} \frac{dr_2}{dt}.$$

D'ailleurs, pendant le roulement, la fonction Φ ne diffère pas de

la fonction Ψ . On voit donc que la substitution du roulement au glissement ne modifie pas les conclusions précédentes.

Imaginons actuellement que l'une des sphères, S_1 , par exemple, soit assujettie à tourner autour d'un axe fixe passant par son centre. Si a, b, c sont les cosinus directeurs de cet axe et si ω désigne la vitesse de rotation, on a $p_1 = a\omega$, $q_1 = b\omega$, $r_1 = c\omega$ et l'équation du mouvement de S_1 est

$$A_1 \frac{d\omega}{dt} = La + Mb + Nc = -F \left(a \frac{\partial V}{\partial p_1} + b \frac{\partial V}{\partial q_1} + c \frac{\partial V}{\partial r_1} \right),$$

d'où

$$\begin{aligned} A_1 \left(\frac{d\omega}{dt} \right)^2 &= A \left[\left(\frac{dp_1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dq_1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dr_1}{dt} \right)^2 \right] \\ &= -F \left(\frac{\partial V}{\partial p_1} \frac{dp_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial r_1} \frac{dr_1}{dt} \right), \end{aligned}$$

de sorte que la fixité de l'axe de rotation, tout en supprimant l'indépendance de p_1, q_1, r_1 , laisse subsister le théorème fondamental. Il en est évidemment de même quel que soit le nombre des sphères obligées de tourner autour d'axes fixes.

Nous allons maintenant supposer qu'au lieu d'abandonner le système à lui-même, on applique sur une ou plusieurs des sphères qui le composent des forces telles que chacune des sphères ainsi actionnées tourne, avec une vitesse constante, autour d'un axe fixe. Admettons par exemple que tel soit le cas de la sphère S_1 . Il faut alors, dans les équations du mouvement, considérer p_1, q_1, r_1 comme des constantes données, et, par contre, supprimer les trois équations qui se rapportent au mouvement de S_1 . Les autres équations subsistent sans modification. En combinant ces dernières, et remarquant que dp_1, dq_1, dr_1 sont nuls, on retrouve l'équation

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\sum A \left[\left(\frac{dp}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right].$$

La fonction Φ est donc, ici encore, constamment décroissante.

Du moment où l'une des sphères ou plusieurs d'entre elles sont ainsi assujetties à conserver des vitesses constantes, il peut arriver que le système atteigne finalement un état permanent dans lequel persistent certains glissements. Quand cet état final se trouve réalisé, c'est-à-dire quand toutes les quantités p, q, r cessent de

varier, on a, pour toutes les valeurs des indices,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0,$$

et par conséquent la fonction Φ présente alors un minimum. D'après cela :

L'état final est tel que le travail de frottement dans l'unité de temps soit le plus petit possible.

Observons encore que les sphères tournant autour d'axes fixes peuvent être remplacées par des corps de forme quelconque, homogènes ou non, pourvu que chacun de ces corps tourne autour d'un axe fixe et présente des surfaces de révolution touchant les corps voisins en des points qui demeurent fixes. Car, dans ces conditions, les équations du mouvement ne se trouvent aucunement modifiées.

Comme application très simple et facilement réalisable, considérons trois cylindres C , C_1 , C_2 à axes fixes parallèles de rayons R , R_1 , R_2 et supposons que les deux cylindres C_1 , C_2 soient obligés, par des forces extérieures, à tourner en *sens contraire* avec des vitesses circonférentielles constantes u_1 et u_2 , tandis que le troisième cylindre C est en contact avec eux. Soient F_1 et F_2 les efforts tangentiels exercés par C_1 et C_2 sur C lorsqu'il y a glissement; soient A le moment d'inertie de C , R son rayon, u sa vitesse circonférentielle. En prenant pour sens positif des rotations celui du cylindre C_1 , l'équation du mouvement de C , pendant que ce cylindre glisse au contact des deux autres, est

$$\frac{A}{R^2} \frac{du}{dt} = [F_2] - [F_1].$$

Dans cette expression $[F_1]$ désigne la force F_1 prise avec le signe du glissement relatif $u_1 + u$, et $[F_2]$ la force F_2 prise avec le signe du glissement relatif $u_2 - u$. La fonction Φ est ici

$$\Phi = F_1[u_1 + u] + F_2[u_2 - u],$$

$[u_1 + u]$ et $[u_2 - u]$ désignant les valeurs absolues de $u_1 - u$ et $u_2 - u$. On en déduit

$$\frac{d\Phi}{dt} = ([F_1] - [F_2]) \frac{du}{dt},$$

et, par suite,

$$\frac{A}{R^2} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

On vérifie ainsi que la fonction Φ est constamment décroissante.

Supposons en particulier que le cylindre C parte du repos, et admettons, ce qu'il est toujours loisible de faire, que l'on ait $F_2 < F_1$. Au début du mouvement, il y a glissement à la fois sur les deux cylindres C_1 et C_2 et l'équation du mouvement est

$$\frac{A}{R^2} \frac{du}{dt} = F_2 - F_1,$$

d'où

$$u = \frac{R^2}{A} (F_2 - F_1) t.$$

Le mouvement continue dans ces conditions jusqu'à ce que l'on ait $u_2 = u$, ce qui arrive au bout du temps $t = \frac{A u_2}{R^2 (F_2 - F_1)}$. A cet instant, la fonction Φ , partie de la valeur $F_1 u_1 + F_2 u_2$, se trouve réduite à la valeur $F_1 (u_1 + u_2)$. Dès lors, le glissement sur C_2 est supprimé et u conserve la valeur constante u_2 , de sorte que Φ cesse de varier. La constante de u exige que l'action tangentielle F'_2 au point de contact de C avec C_2 prenne exactement la valeur F_1 . Cela est possible, puisque F_1 est inférieur à F_2 ; mais on peut trouver étonnant que l'action tangentielle éprouve ainsi, d'une façon instantanée, la diminution finie $F_2 - F_1$. C'est ici le lieu de répéter une remarque que j'ai déjà formulée dans une autre occasion : la théorie précédente considère les cylindres comme rigoureusement indéformables et leur attribue ainsi une propriété que ne possèdent jamais les solides naturels. En réalité, au moment où le glissement de C sur C_2 fait place au roulement, l'action tangentielle s'abaisse *rapidement, mais non pas subitement*, de la valeur F_2 à la valeur F_1 . Cet abaissement a pour conséquence une sorte de détente des surfaces en contact accompagnée, en vertu de l'élasticité des solides naturels, d'un déplacement de la couche extérieure de chaque cylindre par rapport aux couches sous-jacentes, de telle sorte que pendant la très courte période de transition dont il s'agit il n'est pas permis de considérer les cylindres comme des solides invariables. Et, de cette façon, toute difficulté disparaît.

EXTENSION A L'ESPACE DU THÉORÈME DES POLYGONES
DE PONCELET PAR DES POLYÈDRES RÉTICULÉS;

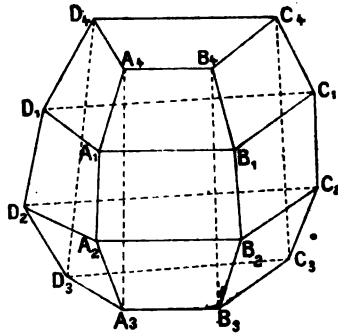
PAR M. G. FONTENÉ.

I.

1. J'ai appelé *polyèdres réticulés* des polyèdres de genre *un*, dont les faces sont des quadrilatères et dont les angles solides sont des angles tétraèdres (*Bulletin*, 1904 à 1906). La nature d'un polyèdre réticulé dépend de trois nombres caractéristiques p, q, r ; je supposerai ici $r=1$; la figure est faite pour le cas $p=4, q=4$, mais je raisonnerai en prenant p et q quelconques.

Avec $r=1$, le nombre des sommets ou des faces est pq ; le nombre des paramètres dont dépend le polyèdre est, régulière-

Fig. 1.



ment, $2pq$. Si le polyèdre doit être circonscrit à une quadrique S et inscrit à une quadrique S' , ce qui forme $2pq$ conditions (sauf réductions possibles), il semble qu'il soit en général déterminé. Je montrerai que la recherche d'un tel polyèdre est un problème doublement indéterminé lorsque les deux quadriques satisfont à une condition invariante, dépendant naturellement des valeurs attribuées aux nombres caractéristiques p et q .

J'avais pensé tout d'abord que la question devait être d'un ordre plus élevé que celle des polygones de Poncelet : il se trouve qu'il

n'en est rien. Il convient toutefois d'observer que l'on suppose ici $r = 1$; j'ai examiné précédemment le cas $r = 2$, $p = 2$, $q = 2$, pour lequel le résultat est bien différent du résultat général relatif au cas $r = 1$: on trouvera au paragraphe IV l'indication de ce résultat. J'ajoute que la question reste entière pour les polyèdres trigonaux à angles solides hexaèdres, ou leurs corrélatifs, dont j'ai signalé l'existence dans mon premier Mémoire.

2. Les arêtes d'un polyèdre réticulé se distribuent en deux systèmes. Celles du système A_1B_1 forment des contours ponctuels $A_1B_1C_1D_1, \dots, A_2B_2C_2D_2, \dots$, et des contours tangentiels $(A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \dots), (B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3, \dots), \dots$, ainsi appelés parce que ce sont les plans de deux côtés consécutifs qui sont des éléments du polyèdre; *pour les polyèdres que nous aurons à considérer*, les polygones $A_1B_1C_1, \dots, A_2B_2C_2, \dots$ sont des polygones plans, dont les plans $p_1, p_2, \dots$ passent par une même droite XY ; en conséquence, les droites $A_1B_1, A_2B_2, \dots$ sont les arêtes d'un angle polyèdre dont le sommet, situé sur XY , sera désigné par $\bar{A}$, et l'on désignera de même par $\bar{B}$ le point de concours sur XY des droites $B_1C_1, B_2C_2, \dots$, et ainsi de suite. Les arêtes du système A_1A_2 formeront de même des polygones plans $A_1A_2A_3, \dots, B_1B_2B_3, \dots$, dont les plans $a, b, \dots$ passent par une même droite ZT , et, par une conséquence nécessaire, les droites $A_1A_2, B_1B_2, \dots$ iront concourir en un point $\bar{P}_1$ de la droite ZT , les droites $A_2A_3, B_2B_3, \dots$ iront concourir en un point $\bar{P}_2$ de cette même droite, et ainsi de suite. Ainsi, la droite XY est liée au premier système d'arêtes (plans $p_1, p_2, \dots$, et points $\bar{A}, \bar{B}, \dots$), tandis que la droite ZT est liée au second système d'arêtes (plans $a, b, \dots$, et points $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots$).

3. Je m'appuierai sur le théorème suivant :

Considérons une quadrique S' , et deux droites XY et ZT conjuguées par rapport à cette quadrique ⁽¹⁾; soient X'_0 et Y'_0 ,

(¹) On peut supposer que la quadrique S' est un ellipsoïde dont la droite ZT est un diamètre, ou même un axe; la droite XY est alors la droite à l'infini du plan diamétral correspondant.

Z'_0 et T'_0 les points où cette quadrique est rencontrée par les deux droites en question.

Soit une quadrique U doublement tangente à la quadrique S' , aux points Z'_0 et T'_0 ; soit de même une quadrique V doublement tangente à la quadrique S' , aux points X'_0 et Y'_0 .

Si A_1 est un point quelconque de la quadrique S' (fig. 2), menons de ce point une tangente A_1B_1 à la section u_1 de la quadrique U par le plan XYA_1 ou p_1 , et une tangente A_1A_2 à la section v_a de la quadrique V par le plan ZTA_1 ou a ; L'ENVELOPPE DU PLAN DÉTERMINÉ PAR CES DEUX TANGENTES EST UNE QUADRIQUE S .

Cette quadrique S est doublement tangente à la quadrique U , aux deux points X_0 et Y_0 de cette quadrique situés sur XY ; elle est de même doublement tangente à la quadrique V , aux deux points Z_0 et T_0 de cette quadrique situés sur ZT .

Les cordes de contact des quadriques sont données par le Tableau suivant :

	S'	S
U	$Z'_0 T'_0$	$X_0 Y_0$
V	$X'_0 Y'_0$	$Z_0 T_0$

La quadrique S' contient le contour	$X'_0 Z'_0 Y'_0 T'_0$,
» U	» $X_0 Z_0 Y_0 T_0$,
» V	» $X'_0 Z'_0 Y'_0 T'_0$,
» S	» $X_0 Z_0 Y_0 T_0$;

le système de ces quadriques dépend de 19 paramètres. Elles admettent toutes quatre comme droites conjuguées les deux droites XY et ZT , et ont un tétraèdre conjugué commun dont les sommets sur XY , par exemple, sont les deux points qui sont conjugués par rapport à chacun des deux couples X_0, Y_0 et X'_0, Y'_0 .

La démonstration peut se faire avec un tétraèdre de référence

dont XY et ZT sont simplement deux arêtes opposées; les équations des quadriques sont alors

$$(S') \quad (a' X^2 + 2h' XY + b' Y^2) + (c' Z^2 + 2k' ZT + d' T^2) = 0,$$

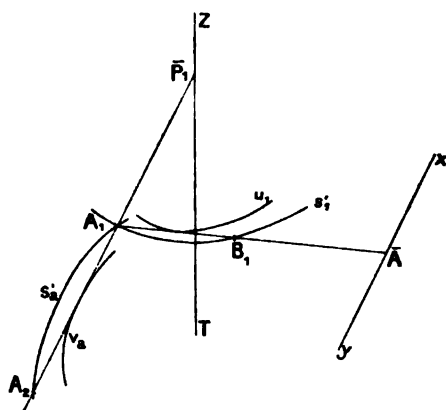
$$(U) \quad (a X^2 + 2h XY + b Y^2) + (c Z^2 + 2k ZT + d T^2) = 0,$$

$$(V) \quad (a' X^2 + 2h' XY + b' Y^2) + (c Z^2 + 2k ZT + d T^2) = 0,$$

$$(S) \quad (a X^2 + 2h XY + b Y^2) + (c Z^2 + 2k ZT + d T^2) = 0.$$

On peut choisir comme tétraèdre de référence le tétraèdre conjugué commun aux quatre quadriques, de manière à avoir $h' = 0$.

Fig. 2.



$k' = 0$, $h = 0$, $k = 0$ ⁽¹⁾. Voici le calcul, en rapportant la figure au tétraèdre de référence $X_0 Y_0 Z_0 T_0$, ce qui donne $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 0$, et réduit à une forme très simple l'équation de l'enveloppe cherchée S. Soit

$$UX + VY + WZ + RT = 0,$$

(1) Si l'on se place dans les conditions de la note précédente, on a les équations

$$(S') \quad \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) + \left(\frac{z^2}{c^2} - 1 \right) = 0,$$

$$(U) \quad \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) + \left(\frac{z^2}{c^2} - 1 \right) = 0,$$

$$(V) \quad \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) + \left(\frac{z^2}{c^2} - 1 \right) = 0,$$

$$(S) \quad \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) + \left(\frac{z^2}{c^2} - 1 \right) = 0.$$

l'équation du plan qui contient les tangentes $A_1 B_1, A_1 A_2$. L'équation du plan $XYA_1 B_1$ étant $Z = \beta T$, on a pour la droite $A_1 B_1$

$$Z = \beta T, \quad UX + VY + (W\beta + R)T = 0,$$

et, pour les points d'intersection de cette droite avec la quadrique U ,

$$2h(W\beta + R)^2 XY + (c'\beta^2 + 2k'\beta + d')(UX + VY)^2 = 0,$$

ou, en désignant par X_1, Y_1, Z_1, T_1 les coordonnées du point A_1 ,

$$2h(WZ_1 + RT_1)^2 XY + (c'Z_1^2 + 2k'Z_1 T_1 + d'T_1^2)(UX + VY)^2 = 0;$$

en écrivant que cette équation en $\frac{Y}{X}$ a une racine double, on a

$$[(c'Z_1^2 + \dots)UV + h(WZ_1 + RT_1)^2] - (c'Z_1^2 + \dots)^2 U^2 V^2 = 0,$$

ce qui donne

$$2(c'Z_1^2 + \dots)UV + h(WZ_1 + RT_1)^2 = 0.$$

La tangente $A_1 A_2$ donne de même

$$2(a'X_1^2 + \dots)WR + k(UX_1 + VY_1)^2 = 0.$$

En tenant compte de ce que le point A_1 est sur la quadrique S' , et dans le plan (U, V, W, R) , on a donc pour l'équation tangentielle de l'enveloppe de ce plan

$$\frac{UV}{h} + \frac{WR}{k} = 0;$$

on en déduit l'équation ponctuelle

$$hXY + kZT = 0.$$

(Si l'on veut énoncer le théorème en partant de la quadrique S pour arriver à la quadrique S' , au lieu de prendre un point A_1 de cette dernière quadrique, on doit prendre un plan tangent à la quadrique S . Si ce plan rencontre XY au point $\bar{A}$ et ZT au point $\bar{P}_1$, il coupe le cône de sommet $\bar{A}$ circonscrit à la quadrique U suivant deux génératrices dont l'une est la droite $\bar{A}A_1$, et le cône de sommet $\bar{P}_1$ circonscrit à la quadrique V suivant deux génératrices

dont l'une est la droite $\overline{P_1 A_1}$; le lieu du point A_1 , commun à ces deux droites, est la quadrique S' .)

4. Des considérations géométriques permettent de prévoir que l'enveloppe du plan des deux tangentes $A_1 B_1$ et $A_1 A_2$ est une quadrique dont l'équation est de la forme

$$(aX^2 + 2hXY + bY^2) + \theta(cZ^2 + \dots + \dots) = 0;$$

mais cela ne donne pas la valeur $\theta = 1$. Les deux quadriques V et S' sont bitangentes aux points X'_0 et Y'_0 , et les plans tangents en ces points se coupent suivant ZT ; le point $\overline{P_1}$ étant sur ZT , le cône de sommet $\overline{P_1}$, circonscrit à la quadrique V , est bitangent à la quadrique S' , aux points X'_0 et Y'_0 , et la coupe par suite suivant deux coniques s'_1 et s'_2 , dont les plans p_1 et p_2 passent par XY ; dès lors, quand le point A_1 se déplace sur la conique s'_1 , le plan des deux tangentes $A_1 B_1$ et $A_1 A_2$ reste tangent au cône de sommet $\overline{P_1}$ qui a pour base la conique u_1 suivant laquelle le plan p_1 coupe la quadrique U . Le cône de sommet $\overline{A}$, circonscrit à la quadrique U , coupe de même la quadrique S' suivant deux coniques s'_a et s'_b , dans les plans a et b passent par ZT ; dès lors, quand le point A_1 se déplace sur la conique s'_a , le plan des deux tangentes $A_1 B_1$ et $A_1 A_2$ reste tangent au cône de sommet $\overline{A}$ qui a pour base la conique v_a suivant laquelle le plan a coupe la quadrique V . Ainsi l'enveloppe cherchée est, de deux manières différentes, enveloppe de cônes du second degré; les cônes du premier système ont leurs sommets sur ZT et sont tangents aux deux plans ZTX_0 , ZTY_0 , aux points X_0 et Y_0 ; les cônes du second système ont leurs sommets sur XY et sont tangents aux deux plans XYZ_0 , XYT_0 , aux points Z_0 et T_0 . Il faut montrer qu'une enveloppe possédant ces propriétés est une quadrique.

Pour plus de clarté considérons la question corrélatrice. Une surface est engendrée de deux manières différentes par des coniques; pour l'un des systèmes, les plans des coniques passent par XY , et ces coniques passent aux points X et Y , où elles sont tangentes aux plans ZTX et ZTY ; pour l'autre système, les plans des coniques passent par ZT , etc. La surface, rapportée au tétraèdre de référence $XYZT$, peut être représentée par l'un ou l'autre des

deux groupes d'équations

$$\begin{cases} Z = \lambda T, \\ Z^2 = XY \varphi(\lambda), \end{cases} \quad \begin{cases} X = \mu Y, \\ X^2 = ZT \psi(\mu); \end{cases}$$

on a donc, pour un point de la surface,

$$\lambda^2 T^2 = \mu Y^2 \varphi(\lambda),$$

$$\mu^2 Y^2 = \lambda T^2 \psi(\mu),$$

d'où, en multipliant,

$$\lambda \mu = \varphi(\lambda) \psi(\mu), \quad \text{ou} \quad \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda} = \frac{\mu}{\psi(\mu)};$$

comme cela doit avoir lieu quels que soient λ et μ , on a nécessairement

$$\frac{\varphi(\lambda)}{\lambda} = \frac{\mu}{\psi(\mu)} = \text{const.} = k;$$

l'équation de la surface est alors

$$ZT = kXY.$$

C. Q. F. D.

5. J'introduis maintenant les quadrilatères tels que $A_1 B_1 B_2 A_2$. Les tangentes $A_1 B_1$ et $A_1 A_2$ menées des points A_1 de la quadrique S' aux deux quadriques U et V , dans les plans $A_1 X Y$ et $A_1 Z T$, percent encore la quadrique S' aux points B_1 et A_2 : du fait que les droites XY et ZT sont conjuguées par rapport à la quadrique S' , les droites $\overline{A A_2}$ et $\overline{P_1 B_1}$ se coupent en un point B_2 situé sur la quadrique S' : on obtient ainsi, dans un plan tangent à S , le quadrilatère plan $A_1 B_1 B_2 A_2$ inscrit à S' , et dont les côtés opposés se coupent sur XY et sur ZT . La droite $A_2 B_2$ est d'ailleurs une des deux tangentes que l'on peut mener du point A_2 à la quadrique U dans le plan $A_2 X Y$: ces deux tangentes déterminent en effet avec la droite $A_2 A_1$ les deux plans tangents que l'on peut mener par cette droite à la quadrique S ; la droite $B_1 B_2$ est de même une des deux tangentes que l'on peut mener du point B_1 à la quadrique V dans le plan $B_1 Z T$.

Relativement au fait que la droite $A_2 B_2$, par exemple, est tangente à la quadrique U , le point B_2 étant supposé obtenu par la droite $\overline{P_1 B_1 B_2}$, je ferai la remarque suivante. Lorsque deux quadriques

S' et U sont doublement tangentes, la droite qui joint les points de contact étant ZT , la droite conjuguée étant XY , si l'on coupe chacune de ces deux quadriques par deux plans passant par XY , les deux cônes qui contiennent les deux sections de l'une ou l'autre quadrique ont les mêmes sommets, situés d'ailleurs sur la droite ZT ; il suffit pour le voir de considérer les choses dans un plan contenant ZT . Dès lors, comme le point $\overline{P}_1$ est le sommet de l'un des deux cônes qui contiennent les deux coniques s'_1 et s'_2 , ce point est aussi le sommet de l'un des deux cônes qui contiennent les deux coniques u_1 et u_2 : le plan $A_1B_1A_2B_2$ est tangent à ce dernier cône, puisque la droite A_1B_1 est tangente à la conique u_1 , et par suite la droite A_2B_2 est également tangente à la conique u_2 .

6. Il reste à appliquer le théorème des polygones de Poncelet. Considérons les sections u et s' des quadriques U et S' par un plan p passant par XY ; l'équation de ce plan étant $Z = \beta T$, les deux coniques en question sont sur les deux cônes

$$(u) \quad aX^2 + 2hXY + bY^2 + (c'\beta^2 + 2k'\beta + d')T^2 = 0,$$

$$(s') \quad a'X^2 + 2h'XY + b'Y^2 + (c'\beta^2 + \dots\dots\dots)T^2 = 0.$$

Les racines du discriminant de la forme $\lambda u + s'$ sont les racines des deux équations

$$\lambda + 1 = 0, \quad \begin{vmatrix} \lambda a + a' & \lambda h + h' \\ \lambda h + h' & \lambda b + b' \end{vmatrix} = 0,$$

de sorte que ces racines sont indépendantes de β . Dès lors, sous une condition unique imposée aux deux quadriques U et S' , il existera des polygones de p côtés circonscrits à la conique u et inscrits à la conique s' , *quel que soit le plan p* . Ce fait résulte encore de la remarque faite à la fin du n° 5 : si un plan p passant par XY donne deux coniques u et s' satisfaisant à la condition en question, il en sera de même pour tout autre plan p passant par XY , puisque le sommet d'un cône contenant les deux coniques s' est aussi le sommet d'un cône contenant les deux coniques u . De même, sous une condition unique imposée aux deux quadriques V et S' , il existera des polygones de q côtés circonscrits à la conique v et inscrits à la conique s' , les coniques v et s' étant les sections des quadriques V et S' par un plan a passant par ZT .

Les quadriques U et V étant liées à la quadrique S' de la manière indiquée, soit A₁ un point quelconque de la quadrique S'. Considérons, dans le plan XYA₁, le polygone de p côtés A₁B₁C₁... inscrit à la quadrique S', circonscrit à la quadrique U, et, dans le plan ZTA₁, le polygone de q côtés A₁A₂A₃... inscrit à la quadrique S', circonscrit à la quadrique V. On a immédiatement le quadrilatère A₁B₁B₂A₂, on en déduit les quadrilatères B₁C₁C₂B₂, C₁D₁D₂C₂, ..., les quadrilatères A₂B₂B₃A₃, A₃B₃B₄A₄, ..., et, de proche en proche, on obtient un polyèdre réticulé aux caractéristiques p et q , inscrit à la quadrique S' et circonscrit à la quadrique S. Le point A₁ variant sur la quadrique S', on obtient une double infinité de tels polyèdres.

Si, au lieu de partir de la quadrique S' pour arriver à la quadrique S, on faisait le contraire, la considération des polygones A₁B₁C₁..., A₁A₂A₃... serait remplacée par celle des angles polyèdres dont il a été question. Si l'on envisage, par exemple, les deux cônes de sommet $\bar{A}$ circonscrits aux quadriques U et S, il doit exister des angles polyèdres, ayant des arêtes en nombre q , inscrits au premier cône et circonscrits au second. Les relations entre les quatre quadriques, dans cet ordre d'idées, sont indiquées d'une manière très concise par le Tableau suivant :

	S'	S
U	p	q
V	q	p

7. Le système des deux quadriques S et S' dépend de 17 paramètres ($19 - 2 = 17$). Si l'on se donne, par exemple, la quadrique S', le système des deux droites conjuguées XY et ZT dépend de 4 paramètres, et chacune des deux quadriques U et V dépend encore de deux paramètres (points X₀ et Y₀, Z₀ et T₀); la quadrique S dépend donc de 8 paramètres. Ainsi le système des deux quadriques S et S' vérifie une condition et une seule.

Le fait énoncé se trouve ainsi établi : *Étant données deux*

quadriques S et S' , il existe, sous une condition invariante de fermeture, une double infinité de polyèdres réticulés, aux caractéristiques $p, q, 1$, qui sont circonscrits à la quadrique S et inscrits à la quadrique S' .

Ces polyèdres sont liés à deux droites fondamentales XY et ZT , lesquelles sont deux arêtes opposées du tétraèdre conjugué commun aux deux quadriques.

Les arêtes du système $A_1 B_1$ sont tangentes à une quadrique U , celles du système $A_1 A_2$ sont tangentes à une quadrique V .

8. Relativement à la condition de fermeture, observons que les racines du discriminant de la forme $\lambda S + S'$ sont les racines des deux équations

$$\begin{vmatrix} \lambda a + a' & \lambda h + h' \\ \lambda h + h' & \lambda b + b' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \lambda c + c' & \lambda k + k' \\ \lambda k + k' & \lambda d + d' \end{vmatrix} = 0;$$

nous les appellerons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$. D'autre part, on a vu au n° 6 que les racines du discriminant de la forme $\lambda u + s'$ sont les racines des deux équations

$$\lambda + 1 = 0, \quad \begin{vmatrix} \lambda a + a' & \lambda h + h' \\ \lambda h + h' & \lambda b + b' \end{vmatrix} = 0,$$

et les deux coniques u et s' doivent admettre des polygones de p côtés circonscrits à u et inscrits à s' ; de même, les racines du discriminant de la forme $\lambda v + s'$ sont les racines des deux équations

$$\lambda + 1 = 0, \quad \begin{vmatrix} \lambda c + c' & \lambda k + k' \\ \lambda k + k' & \lambda d + d' \end{vmatrix} = 0,$$

et les deux coniques v et s' doivent admettre des polygones de q côtés circonscrits à v et inscrits à s' . Des deux relations ainsi obtenues entre $\lambda_1, \lambda_2, -1$ d'une part, et $\lambda_3, \lambda_4, -1$ d'autre part, on déduira la relation homogène qui doit exister entre les quantités $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, pour que les deux quadriques S et S' admettent des polyèdres aux caractéristiques $p, q, 1$, circonscrits à S et inscrits à S' .

9. Il serait certainement possible d'introduire dans l'étude de la question deux arguments elliptiques u et v , qui seraient les para-

mètres d'un point de la surface S' , le paramètre v restant constant le long d'une section de la surface par un plan contenant XY , le paramètre u restant constant le long d'une section de la surface par un plan contenant ZT , les sommets d'un polyèdre de l'espèce indiquée correspondant aux valeurs suivantes des deux paramètres

$$\begin{array}{ccccccc} (u, v), & (u + a, v), & (u + 2a, v), & \dots, \\ (u, v + b), & (u + a, v + b), & (u + 2a, v + b), & \dots, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, & \dots; \end{array}$$

a et b désignent respectivement la $p^{\text{ième}}$ et la $q^{\text{ième}}$ partie d'une période. On aurait des formules de la forme

$$X = Y f(u), \quad X = T g(v), \quad Y h(u) = T k(v),$$

ou

$$\frac{X}{f(u)k(v)} = \frac{Y}{k(v)} = \frac{Z}{g(v)h(u)} = \frac{T}{h(u)}.$$

II.

10. Examinons plus particulièrement le cas $p = 3, q = 3$; nous remplacerons ici la notation S' par la notation S'' .

En Géométrie plane, un polygone de Poncelet dépend de 10 paramètres ($5 + 4 + 1 = 10$); tout pentagone est un polygone de Poncelet; un hexagone n'est un polygone de Poncelet que s'il a une droite de Pascal et un point de Brianchon; etc. Dans l'espace, les polyèdres réticulés dont il vient d'être question dépendent de 19 paramètres ($9 + 8 + 2 = 19$). Tout polyèdre réticulé correspondant aux valeurs simples $p = 3, q = 3$ est un polyèdre de l'espèce indiquée : il a en effet 9 sommets, 9 faces, et on peut lui circoncrire une quadrique S'' , lui inscrire une quadrique S ; un tel polyèdre dépend, comme je l'ai montré, de 19 paramètres (au lieu de 18, qui serait le nombre régulier); j'ai fait observer aussi que, dans un polyèdre de cette nature, les plans des triangles $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3$ passent par une même droite XY , etc.

11. Les conditions de fermeture relatives aux coniques u et s'' ,

v et s'' du n° 8 (je mets s'' au lieu de s') sont ici

$$1 \pm \sqrt{\lambda_1} \pm \sqrt{\lambda_2} = 0, \quad 1 \pm \sqrt{\lambda_2} \pm \sqrt{\lambda_3} = 0;$$

la condition de fermeture relative aux deux quadriques S et S'' est donc

$$(1) \quad \sqrt{\lambda_1} \pm \sqrt{\lambda_2} \pm \sqrt{\lambda_3} \pm \sqrt{\lambda_1} = 0,$$

les λ étant les racines du discriminant de la forme $\lambda S + S''$; c'est la condition que j'avais obtenue par un calcul très pénible dans mon Mémoire de 1904.

En Géométrie plane, pour des triangles ABC qui doivent être circonscrits à une conique S et inscrits à une conique S'' , on a la condition

$$\sqrt{\lambda_1} \pm \sqrt{\lambda_2} \pm \sqrt{\lambda_3} = 0,$$

les λ étant les racines du discriminant de la forme $\lambda S + S''$; les triangles ABC sont alors conjugués par rapport à une conique S' (intermédiaire entre S et S''), et, si l'on désigne par μ_1, μ_2, μ_3 les racines du discriminant de la forme $\mu S + S'$, on a

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0;$$

il n'y a donc aucune différence à établir entre les sommets X, Y, Z du triangle conjugué commun aux deux coniques. On sait qu'il n'en est pas de même lorsqu'il s'agit de quadrilatères, la condition de fermeture étant alors

$$-\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0.$$

Il en est de même dans l'espace, et, d'après ce que l'on a vu au paragraphe I, on a ce théorème :

Lorsque deux quadriques S et S'' satisfont à la condition (1), elles admettent trois séries de polyèdres réticulés, aux caractéristiques $p=3, q=3$, circonscrits à S et inscrits à S'' , ces trois séries de polyèdres étant liées aux trois couples d'arêtes opposées $(TX, YZ), (TY, ZX), (TZ, XY)$ du tétraèdre conjugué commun.

12. Les sommets d'un polyèdre de la nature indiquée étant

$$A_1 B_1 C_1,$$

$$A_2 B_2 C_2,$$

$$A_3 B_3 C_3,$$

nous dirons que ce polyèdre est conjugué par rapport à une quadrique S' si le plan polaire d'un sommet quelconque (A_1 par exemple), relativement à la quadrique de conjugaison, est le plan de la face opposée ($B_2 C_2 C_3 B_3$).

Les considérations suivantes éclaireront la nature de cette conjugaison. Soient 9 points, d'abord quelconques, auxquels nous donnerons simplement un double classement d'après les lignes et les colonnes du Tableau ci-dessus; soit en outre une quadrique S' . Si l'on demande que deux quelconques des 9 points, n'appartenant ni à une même ligne ni à une même colonne du Tableau, soient conjugués par rapport à la quadrique, le nombre des conditions imposées est égal à $\frac{9 \times 4}{2}$ ou 18; mais il y a là seulement 17 conditions distinctes, et le nombre des paramètres dont dépend la figure est $27 + 9 - 17$, ou 19. Les quatre points B_1, C_1, B_2, C_2 , par exemple, sont dans le plan polaire du point A_1 , et l'on a un polyèdre réticulé, aux caractéristiques (3, 3), conjugué par rapport à la quadrique S' . Comme un polyèdre de cette nature dépend par lui-même de 19 paramètres, si on le suppose donné *a priori*, il admet une quadrique conjuguée S' . *La conjugaison en question équivaut dès lors à 9 conditions distinctes.*

Que les 17 conditions relatives à un système de 9 points quelconques soient remplacées par un système de 9 conditions seulement lorsque ces points sont supposés être les sommets d'un polyèdre réticulé, c'est ce qu'il est facile de comprendre : du moment que les points B_1, C_1, B_2, C_2 sont dans un même plan, une condition de conjugaison disparaît, et il disparaît ainsi 8 conditions; l'existence des 9 plans ne forme en effet que 8 conditions distinctes (c'est ainsi que le polyèdre dépend de 19 paramètres au lieu de 18).

13. Cela étant, si l'on se donne deux quadriques S' et S'' , la recherche d'un polyèdre de l'espèce indiquée qui soit conjugué

à S' et inscrit à S'' est un problème en apparence indéterminé, puisque l'on dispose de 19 paramètres pour satisfaire à 18 conditions; en réalité, c'est un problème généralement impossible, et qui ne devient possible qu'en devenant doublement indéterminé. Supposons en effet que les deux quadriques S' et S'' admettent un tel polyèdre, et soit S la quadrique qui est la polaire réciproque de S'' par rapport à S' : le polyèdre considéré est circonscrit à cette quadrique S . Les deux quadriques S et S'' admettent ainsi des polyèdres réticulés, aux caractéristiques $(3, 3)$, circonscrits à S et inscrits à S'' ; les racines de l'équation en λ pour ces deux quadriques vérifient donc la condition (1). Or les racines de l'équation en λ pour S' et S'' sont les racines carrées des racines de l'équation en λ pour S et S'' , prises avec des signes convenables; on le voit en rapportant les trois quadriques à leur tétraèdre conjugué commun; on a donc pour les quadriques S' et S'' une condition de la forme

$$\varepsilon_1 \mu_1 + \varepsilon_2 \mu_2 + \varepsilon_3 \mu_3 + \mu_4 = 0 \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

Comme deux arêtes du tétraèdre conjugué commun, XY et ZT par exemple, jouent un rôle particulier pour les polyèdres considérés (circonscrits à S et inscrits à S''), la condition est certainement de la forme

$$(2) \quad \mu_1 + \mu_2 - \mu_3 - \mu_4 = 0.$$

14. *Réciproquement, si deux quadriques S et S'' satisfont à la condition (1), de sorte qu'il existe trois séries de polyèdres réticulés, aux caractéristiques 3, 3, circonscrits à S et inscrits à S'' , les polyèdres de chaque série sont conjugués par rapport à une quadrique S' : les trois quadriques dont il s'agit, S'_1, S'_2, S'_3 , sont trois des huit quadriques par rapport auxquelles les quadriques S et S'' sont polaires, réciproques, à savoir celles qui vérifient une condition de la forme (2).*

Les équations des deux quadriques étant

$$(S) \quad x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0,$$

$$(S'') \quad a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 + d^2 t^2 = 0,$$

on peut toujours supposer que la condition (1) est

$$(1') \quad a + b + c + d = 0;$$

les équations des quadriques S' sont alors

$$(S'_1) \quad -ax^2 + by^2 + cz^2 - dt^2 = 0,$$

$$(S'_2) \quad ax^2 - by^2 + cz^2 - dt^2 = 0,$$

$$(S'_3) \quad ax^2 + by^2 - cz^2 - dt^2 = 0,$$

et l'on a, par exemple, pour la dernière

$$(2') \quad a + b - (-c) - (-d) = 0;$$

j'ai vérifié ce résultat en supposant $a = b$.

Le polyèdre que j'ai considéré dans mon premier Mémoire est conjugué par rapport à la quadrique

$$(S') \quad d'(\delta - d) \left(\frac{a}{a'} x^2 + \frac{b}{b'} y^2 + \frac{c}{c'} z^2 + \frac{d}{d'} t^2 \right) + (ax + by + cz + dt)^2 = 0.$$

III.

15. Pour $p = 4$, $q = 4$, la condition de fermeture relative aux coniques u et s' du n° 8 est que l'une des racines de l'équation en λ soit égale à la somme des deux autres; on peut avoir

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \quad \text{ou bien} \quad \lambda_1 - \lambda_2 = \pm 1,$$

et, selon l'hypothèse adoptée, les diagonales du quadrilatère A, B, C, D , circonscrit à u et inscrit à s' , passent par tel ou tel des trois sommets du triangle autopolaire commun aux deux coniques : avec l'hypothèse $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, ce sommet est le point où la droite ZT perce le plan des deux coniques, tandis que, avec l'hypothèse $\lambda_1 - \lambda_2 = \pm 1$, ce sommet est l'un des deux points de la droite XY qui sont conjugués communs pour les deux quadriques U et S' ; il y a là deux choses bien distinctes. Relativement aux deux coniques v et s' , on peut de même avoir

$$\lambda_3 + \lambda_4 = 1, \quad \text{ou bien} \quad \lambda_3 - \lambda_4 = \pm 1;$$

avec la première hypothèse, les diagonales du quadrilatère

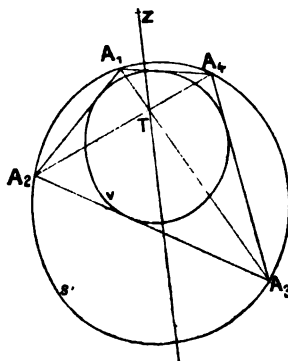
$A_1 A_2 A_3 A_4$ passent au point où la droite XY perce le plan des deux coniques, tandis que, avec la seconde hypothèse, elles passent par l'un des deux points de la droite ZT qui sont conjugués communs pour les deux quadriques V et S' .

D'après les considérations qui sont exposées dans mon Mémoire de 1905, on doit avoir, par exemple,

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \quad \lambda_4 - \lambda_3 = 1;$$

les diagonales du quadrilatère $A_1 B_1 C_1 D_1$ passent au point où la droite ZT rencontre le plan de ce quadrilatère, tandis que les diagonales du quadrilatère $A_1 A_2 A_3 A_4$ passent par l'un des deux points de la droite ZT qui sont conjugués communs pour les deux quadriques S et S' . Par exemple, si S et S' sont deux ellipsoïdes dont ZT est un axe, le premier étant intérieur au second, les quadrilatères $A_1 B_1 C_1 D_1$ sont des quadrilatères convexes dont les dia-

Fig. 3.



gonales se coupent sur l'axe en question, et les quadrilatères $A_1 A_2 A_3 A_4$ sont disposés comme l'indique la figure ci-dessous : les diagonales se coupent au point T parce que, dans la relation $\lambda_4 = \lambda_3 + 1$, c'est λ_4 qui joue un rôle à part.

La condition à laquelle satisfont les deux quadriques S et S' est alors

$$(3) \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 = 0,$$

et elle peut prendre les trois formes

$$\lambda_4 - \lambda_1 = \lambda_2 + \lambda_3, \quad \lambda_4 - \lambda_2 = \lambda_3 + \lambda_1, \quad \lambda_4 - \lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2.$$

Lorsque cette condition est remplie, les deux quadriques S et S' admettent donc trois séries de polyèdres réticulés, aux caractéristiques 4, 4, circonscrits à S et inscrits à S'. Ces trois séries de polyèdres sont liées aux trois couples d'arêtes opposées du tétraèdre conjugué commun XYZT : les arêtes TX, TY, TZ jouent successivement le rôle que jouait ci-dessus l'arête TZ.

IV.

16. Ce paragraphe est complètement indépendant de ce qui précède.

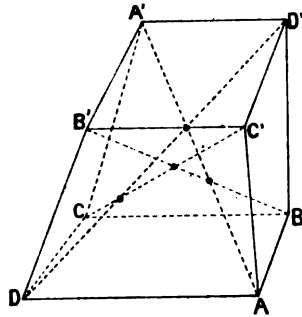
Le polyèdre réticulé qui correspond aux valeurs

$$p = 2, \quad q = 2, \quad r = 2$$

a 8 faces quadrangulaires, 8 angles solides tétraédres; dans la figure suivante les faces sont $ABD'C'$, $BCA'D'$, ..., et $ABB'A'$, $BCC'B'$, ...

Ce polyèdre dépend exceptionnellement de paramètres en nombre $2pqr + 1$ ou 17. Comme les 8 sommets forment en outre un système de points de Lamé, en même temps que les 8 plans des

Fig. 4.



faces forment un système de plans de Lamé, le problème de construire un tel polyèdre, circonscrit à une quadrique S et inscrit à une quadrique S', est un problème triplement indéterminé en apparence : j'ai montré que ce problème est en réalité un problème

généralement impossible, et qui ne devient possible qu'en devenant quadruplement indéterminé; la condition de fermeture est

$$(4) \quad \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_3 + \lambda_4.$$

Dans un Mémoire inséré au Volume du *Bulletin* pour 1906 (*Sur une configuration remarquable dans l'espace*), j'ai considéré une figure, comprenant 8 points et 8 plans, que j'ai appelée un *octuple gauche complet* : les 8 points et les 8 plans de cette figure sont, de trois manières différentes, les sommets et les plans des faces d'un polyèdre réticulé aux caractéristiques 2, 2, 2 (*loc. cit.*, fig. 3). On peut dire, et c'est sous cette forme que j'ai démontré le théorème :

Le problème de construire un octuple gauche complet, circonscrit à une quadrique S et inscrit à une quadrique S', est un problème triplement indéterminé en apparence : ce problème est en réalité un problème généralement impossible, et qui ne devient possible qu'en devenant quadruplement indéterminé.

17. La condition (4) ne doit pas être considérée comme une dépendance des conditions planes

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 + \lambda_4 = 1,$$

ou

$$\lambda_1 - \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 - \lambda_4 = 1,$$

ou

$$\lambda_2 - \lambda_3 = 1, \quad \lambda_4 - \lambda_1 = 1,$$

du n° 15. Toutefois, parmi les polyèdres en nombre quadruplement infini que l'on a à considérer ici, se trouvent des polyèdres en nombre doublement infini pour lesquels les deux quadrilatères ABCD et A'B'C'D', généralement gauches, sont des quadrilatères plans dont les plans passent par XY, en même temps que les deux quadrilatères AA'CC' et BB'DD', généralement gauches, sont des quadrilatères plans dont les plans passent par ZT; pour ces polyèdres particuliers, les considérations du n° 15 sont valables : les diagonales AC et BD, A'C' et B'D' se coupent sur ZT, les diagonales AC et A'C', BD et B'D' se coupent sur XY, et l'on a

deux relations

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 + \lambda_4 = 1,$$

qui donnent lieu à la relation (4). [On doit ici considérer le polyèdre de la figure 4 comme une dégénérescence du polyèdre réticulé aux caractéristiques (4, 4, 1), les quadrilatères $A'B'C'D'$ et $A'''B'''C'''D'''$ étant confondus avec les quadrilatères CDAB et $C'D'A'B'$.]

SUR DIVERSES PROPRIÉTÉS DES NOMBRES TRANSCENDANTS DE LIOUVILLE;

PAR M. EDMOND MAILLET.

I. — INTRODUCTION.

Dans cette Note, je m'occupe d'ensembles formés de nombres de Liouville *correspondants*, avec ou sans adjonction de nombres rationnels. J'indique des catégories étendues C de nombres de Liouville pour lesquelles sont vraies ces propriétés :

1° Est impossible l'identité $0 = \sum_0^v a_m e^{b_m}$, où les $a_m \neq 0$, et les b_m , distincts, sont des nombres de Liouville d'une même catégorie ou ensemble C ou des nombres rationnels. Exemple : $\sin b_m$ est transcendant.

2° Les c_m étant des nombres rationnels > 1 , et les d_m des nombres de Liouville réels > 1 de C, tout polynôme à coefficients entiers positifs formé avec $d_m, c_m^{d_m}, d_m^{d_m}, d_m^{c_m}$ est un nombre transcendant.

Ces propriétés entraînent comme cas particuliers ou corollaires divers théorèmes, dont certains ont été indiqués par moi antérieurement (1).

(1) *Bull. Soc. math.*, 1906, p. 226, et *Introduction à la théorie des nombres transcendants et des propriétés arithmétiques des fonctions*. Paris, Gauthier-Villars, 1906, p. 34.

II. — ENSEMBLES DE NOMBRES DE LIOUVILLE CORRESPONDANTS.

Soient $I, I', I'', \dots$ des irrationnelles réelles ou imaginaires ⁽¹⁾, limites des suites de fractions rationnelles

$$(1) \quad \begin{cases} I_1 = P_1 Q_1^{-1}, & \dots, & I_n = P_n Q_n^{-1}, & \dots, & \text{pour } I, \\ I'_1 = P'_1 Q'^{-1}_1, & \dots, & I'_n = P'_n Q'^{-1}_n, & \dots, & \text{pour } I', \\ \dots\dots\dots, & \dots & \dots\dots\dots, & \dots, & \dots\dots\dots, \end{cases}$$

avec $Q_{n+1} \geq Q_n$, $Q'_{n+1} \geq Q'_n$, $\dots$, $\lim Q_n = \lim Q'_n = \dots = \infty$ pour $n = \infty$, tous les dénominateurs $Q_n, Q'_n, \dots$ étant supposés réels. Je pose

$$(2) \quad \varepsilon_n = |I - I_n| = Q_n^{-\varphi_n}, \quad \varepsilon'_n = |I' - I'_n| = Q'^{-\varphi'_n}_n, \quad \dots$$

J'admets encore que l'on puisse trouver une infinité de valeurs n , de n telles que l'on ait

$$(3) \quad \begin{cases} \varphi_{n_1} > \alpha, & Q'_{n_1} = Q^{\sigma'_{n_1}}_{n_1}, & Q''_{n_1} = Q^{\sigma''_{n_1}}_{n_1}, & \dots, \\ \varphi'_{n_1} = \tau'_{n_1} \varphi_{n_1}, & \varphi''_{n_1} = \tau''_{n_1} \varphi_{n_1}, & \dots, \end{cases}$$

où α est aussi grand que l'on veut, $\sigma'_{n_1}, \sigma''_{n_1}, \dots$ sont positifs et ont une limite inférieure et une limite supérieures communes pour $\lim n_1 = \infty$, $\tau'_{n_1}, \tau''_{n_1}, \dots$ sont positifs et ont une limite inférieure commune pour $\lim n_1 = \infty$, mais non forcément une limite supérieure. On sait qu'alors $I, I', I'', \dots$ sont des nombres transcendants de Liouville. Je dirai que ces nombres, satisfaisant aux conditions (1), (2) et (3), sont *des nombres de Liouville correspondants*. Une fois qu'on a formé au moins deux nombres de Liouville correspondants I et I' , ce qui précise suffisamment les valeurs n_1 de n , on peut évidemment considérer un ensemble S de nombres de Liouville correspondants; on voit que S dépend de I, I' et des valeurs n_1 . I et $-I$ sont alors correspondants.

I et I' étant choisis, pour déterminer un pareil ensemble S , il n'est pas nécessaire de considérer toutes les valeurs n_1 de n

(1) Ceci veut dire que I , par exemple, n'est pas de la forme $a + bi$, où a et b sont, à la fois, rationnels.

pour lesquelles (2) et (3) ont lieu : il suffit d'en considérer une infinité. Suivant la façon dont on choisira ces valeurs, on pourra, à l'occasion, avoir des ensembles S différents. De même on pourra avoir d'autres ensembles S avec I et un nombre transcendant de Liouville J analogue à I' , mais différent de I' .

D'après les définitions précédentes, on voit que I et I' se correspondent, I et J se correspondent, mais I' et J peuvent ne pas se correspondre. Finalement, pour préciser complètement la notion de correspondance, il faut se donner I , I' et les n_i , ce qui détermine l'ensemble S . Aussi devra-t-on dire, quand on pourra craindre une ambiguïté, que I , I' , I'' , ... sont *correspondants dans l'ensemble S* .

On pourra encore considérer des correspondances plus particulières en introduisant de nouvelles conditions à satisfaire par I , I' , ..., spécifier par exemple, comme je l'ai indiqué ailleurs ⁽¹⁾, que φ_{n_i} est plus grand qu'une certaine fonction de n_i , croissant indéfiniment avec n_i , mais plus ou moins vite.

On pourra aussi spécifier que I , I' , I'' , ... sont réels, et que

$$I - I_{n_i}, \quad I' - I'_{n_i}, \quad \dots$$

sont tous de même signe pour chaque valeur n_i de n , sans que l'on ait forcément $I - I_{n_i}$ et $I - I_{n'_i}$ de même signe quand $n'_i \neq n_i$. Avec cette restriction, I et I' ne se correspondent plus. Soit S' l'ensemble des nombres de Liouville correspondants en ce second sens, pour des valeurs données de I , I' et des n_i . Ces valeurs définissent un ensemble S qui contient S' .

Je considérerai encore, en supposant I et I' positifs, les nombres de S' qui sont positifs : ils forment un ensemble S'' . Enfin, on pourra considérer les nombres de S'' pour lesquels les τ'_{n_i} , τ''_{n_i} , ... sont aussi limités supérieurement pour $\lim n_i = \infty$: ils forment un ensemble S''' .

Soient enfin S_1 , S'_1 , S''_1 , S'''_1 les ensembles formés en adjoignant respectivement à S , S' , S'' , S''' les nombres rationnels ou rationnels positifs. Je vais établir les propriétés suivantes :

(¹) *Introduction à la théorie des nombres transcendants et des propriétés arithmétiques des fonctions*. Paris, Gauthier-Villars, 1906, p. 34.

THÉOREME I. — *L'ensemble des nombres de S_1 forme un groupe par rapport aux quatre opérations fondamentales de l'arithmétique (addition, soustraction, multiplication, division). Toute fonction rationnelle à coefficients rationnels réels ou imaginaires des nombres de S_1 appartient à S_1 .*

THÉOREME II. — *L'ensemble des nombres de S'_1 (ou de S''_1) forme un groupe par rapport à l'addition et la multiplication. Tout polynôme à coefficients positifs formé avec les nombres de S'_1 (ou de S''_1) appartient à S'_1 (ou à S''_1) (1).*

J'établis le théorème I. Soient

$$x = I = x_n + h_n, \quad y = y_n + k_n, \quad \dots,$$

où $x_n = I_n, \dots$, des nombres de S_1 , n étant un des nombres n_1 , $f(x, y, \dots)$ la fraction rationnelle considérée dans l'énoncé; on a

$$J = f(x, y, \dots) = f(x_n, y_n, \dots) + h_n f'_{x_n} + k_n f'_{y_n} + \dots + h_n^2 f''_{x_n^2} + \dots,$$

d'après la formule de Taylor.

$$f(x_n, y_n, \dots), f'_{x_n}, f'_{y_n}, \dots, f''_{x_n^2}, \dots,$$

quand on y substitue à $x_n, y_n, \dots$ leurs valeurs $P_n Q_n^{-1}, P'_n Q_n^{-1}, \dots$, et qu'on chasse les dénominateurs, sont des nombres rationnels $p_n q_n^{-1}$; p_n, q_n sont des polynômes à coefficients entiers formés avec $P_n = I_n Q_n, P'_n = I'_n Q'_n, \dots, Q_n, Q'_n, \dots$, c'est-à-dire que, d'après (2) et (3), le module de $p_n q_n^{-1}$ est compris entre Q_n^ω et $Q_n^{-\omega}$, où ω est fixe et positif, quel que soit n , pour la fonction f et les nombres $x, y, \dots$ considérés, puisque $\sigma'_n, \sigma''_n, \dots$ sont limités supérieurement et inférieurement. Si $J_n = f(x_n, y_n, \dots)$, le module de la différence $J - J_n$ est alors de la forme $Q_n^{-\omega_n \varphi_n}$, où ω_n est positif et limité inférieurement, c'est-à-dire que le nombre $f(x, y, \dots)$ appartient à S_1 . Bien entendu, à l'occasion, ce nombre pourra être nul.

Quant au théorème II, si l'on prend pour $J = f(x, y, \dots)$ un polynôme à coefficients positifs, $x, y, \dots$ étant positifs, la

(1) Il résulte en particulier de là que l'on définit au moins un ensemble S_1 et S'_1 à l'aide du nombre 1 seul, satisfaisant à (1), (2) et (3). Pour définir complètement cet ensemble, il restera à choisir la suite des valeurs n_1 .

démonstration est presque identique. $J_n = f(x_n, y_n, \dots)$. f'_{x_n} , f'_{y_n} , ... sont positifs et $\neq 0$, h_n , k_n , ... sont de même signe, d'après les propriétés de S' , et

$$J - J_n = (h_n f'_{x_n} + k_n f'_{y_n} + \dots)(1 + \zeta_n),$$

où $\lim \zeta_n = 0$ pour $n = \infty$. $J - J_n$ étant de même signe que h_n , et son module de la forme $Q_n^{-\omega_n \varphi_n}$, J appartient à S'_1 .

Une propriété correspondante a évidemment lieu quand $x, y, \dots$ appartiennent à S''_1 . C. Q. F. D

III.

On vient de voir que toute fraction rationnelle à coefficients rationnels formée avec les nombres de S_1 appartient à S_1 . Ceci indique la portée de la propriété suivante, que je vais établir :

THÉORÈME III. — Soient $J^{(0)}, J^{(1)}, \dots, J^{(v)}, I^{(0)}, I^{(1)}, \dots, I^{(v)}$ des nombres de S_1 dont les $v + 1$ premiers sont $\neq 0$ et les $v + 1$ derniers distincts : il n'existe aucune identité de la forme

$$(4) \quad \sum_0^v J^{(k)} e^{I^{(k)}} = 0,$$

lorsque φ_n croît suffisamment vite avec n , pour les valeurs n_1 de n qui servent à définir S_1 . Pour préciser, (4) est impossible quand

$$(17) \quad \varphi_n = Q_n^{\beta_n},$$

pour une infinité des valeurs n_1 de n assez grandes ($\lim \beta_n = \infty$).

En particulier, (4) est impossible lorsque les $I^{(k)}, J^{(k)}$ sont des nombres de Liouville correspondants de la forme $M + M_1 i$, M et M_1 étant des fractions rationnelles à coefficients entiers réels formées avec un nombre de Liouville réel dont le développement en fraction continue satisfait aux conditions du corollaire I du théorème I de notre Note du Bull. Soc. math., t. XXXIV, 1906, p. 219 (1).

(1) Il est intéressant de rapprocher ce théorème d'une propriété connue ana-

J'admets qu'il y ait une identité de la forme (4). En en divisant les deux membres par $J^{(0)} e^{I^{(0)}}$, on obtient

$$1 + \sum_1^v J^{(k)} J^{(0)-1} e^{I^{(k)} - I^{(0)}} = 0.$$

D'après le théorème I, les $J^{(k)} J^{(0)-1}$ sont des nombres de $S_1 \neq 0$; les $I^{(k)} - I^{(0)}$ sont des nombres de S_1 distincts et $\neq 0$. Finalement on est ramené à une identité analogue à (4), mais où le premier terme est l'unité et les exposants sont $\neq 0$. Il suffit donc d'examiner ce dernier cas.

Soit l'identité

$$(5) \quad 1 + \sum_1^v J^{(k)} e^{I^{(k)}} = 0.$$

La démonstration de son impossibilité n'est qu'une modification convenable de la démonstration classique de la transcendance de e (JORDAN, *Cours d'Analyse lithographié de l'École Polytechnique*). On part de l'identité

$$e^{z_1} \int_0^{z_1} \varpi e^{-z} dz = -F(z_1) + e^{z_1} F(0),$$

où z_1 est réel ou imaginaire, $\varpi = \varpi(z)$ est un polynôme et $F(z) = \varpi + \varpi' + \varpi'' + \dots$. On prend ici pour ϖ le polynôme

$$\varpi(z) = \varpi(z, I^{(1)}, \dots, I^{(v)}) = \frac{z^{p-1} (z - I^{(1)})^p \dots (z - I^{(v)})^p}{\underline{p-1}},$$

avec $\underline{p-1} = 1.2 \dots (p-1)$, p étant un nombre premier très grand dont la valeur sera fixée tout à l'heure.

On remarque de suite que les dérivées $m^{\text{èmes}}$ de ϖ par rapport aux $I^{(k)}$ sont formées d'un seul ou d'une partie des termes (1) de $\varpi^{(m)}(z)$ affectés du signe $+$ ou $-$.

logue due à M. Lindemann, et relative non plus aux nombres de Liouville, mais aux nombres algébriques, et d'une Communication de M. Rémondos (*Comptes rendus*, 16 janvier 1905, p. 135).

(1) Chaque terme étant de la forme $z^k (z - I^{(1)})^{k_1} \dots (z - I^{(v)})^{k_v}$.

On a, quel que soit ϖ , l'identité

$$e^{\beta} \int_0^{\beta} \varpi e^{-z} dz = -F(\beta) + e^{\beta} F(0);$$

s'il existe une relation (5), on en conclut alors

$$(6) \quad \sum_1^{\nu} J^{(k)} e^{I^{(k)}} \int_0^{I^{(k)}} \varpi e^{-z} dz = - \sum_1^{\nu} J^{(k)} F(I^{(k)}) + F(0).$$

1° Soient Π_1 le premier membre, λ une quantité égale à trois fois le plus grand des modules des quantités $J^{(1)}, \dots, J^{(\nu)}, I^{(1)}, \dots, I^{(\nu)}$, ν et 2 : on peut supposer l'intégrale $\int_0^{\beta}$ prise, dans le plan complexe des z , le long de la droite joignant l'origine au point β : on a, sous le signe $\int$,

$$|e^{-z}| \leq e^{\lambda}, \quad |\varpi| \leq (\underline{p-1})^{-1} \lambda^{\nu p + p - 1}.$$

Dès lors,

$$(7) \quad |\Pi_1| \leq (\underline{p-1})^{-1} \lambda^{\nu p + p + 1} e^{\lambda} < \lambda^{2p(\nu+1)} \left(\frac{p}{e}\right)^{-p} < (\lambda^{2\nu+2} e^{p-1})^p,$$

dès que p est assez grand.

2° Je m'occupe maintenant du deuxième membre de (6). J'écrirai

$$F(z) = F(z, I^{(1)}, \dots, I^{(\nu)}), \quad F_n(z) = F(z, I_n^{(1)}, \dots, I_n^{(\nu)}), \\ \varpi_n(z) = \varpi(z, I_n^{(1)}, \dots, I_n^{(\nu)}),$$

où n est un des nombres $n_1, I_n^{(k)} = P_n^{(k)} Q_n^{(k)-1}$ une des fractions de la suite (1) dont $I^{(k)}$ est limite, quand $I^{(k)}$ est un nombre de Liouville.

Soit β une des quantités 0, $I^{(1)}, \dots, I^{(\nu)}$, avec $I_n = 0$ quand $\beta = 0$ ou β rationnel, $I_n^{(k)} = 0$ quand $I^{(k)}$ est rationnel, et

$$\beta = I_n + I_n', \quad I^{(k)} = I_n^{(k)} + I_n'^{(k)},$$

(n étant assez grand). On a

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} F(\beta, I^{(1)}, \dots, I^{(\nu)}) &= F(\beta) = F(I_n + I_n', I_n^{(1)} + I_n'^{(1)}, \dots, I_n^{(\nu)} + I_n'^{(\nu)}) \\ &= F_n(I_n) + I_n' F_n'(I_n) + I_n'^{(1)} F_n'^{(1)}(I_n) + \dots + \frac{1}{1.2} (I_n'^2 F_n''(I_n) + \dots) + \dots, \end{aligned} \right.$$

XXXV.

3

avec

$$F_n(I_n) = F(I_n, I_n^{(1)}, \dots, I_n^{(v)}) = \varpi_n(I_n) + \varpi'_n(I_n) + \dots$$

D'après ce qu'on a vu, $F'_{n_1}, F'_{n_1^{(1)}}, \dots, F'_{n_1^{(v)}}, \dots$ sont formés chacun de tout ou partie des termes, multipliés par ± 1 , de $F_n(I_n)$. On aura donc une limite supérieure du module de toutes ces quantités en cherchant une limite supérieure L_n de la somme des modules des termes de $F_n(I_n)$. Soient $\rho_n(z), \rho_n^{(1)}(z), \dots$ les limites supérieures analogues pour $\varpi_n(z), \varpi'_n(z), \dots$; on a, pour $z = \delta$ ou $z = I_n$, si l'on veut,

$$\left\{ \begin{array}{l} |p-1| \varpi_n(z) | = |z^{p-1}(z - I_n^{(1)})^p \dots (z - I_n^{(v)})^p| \leq |p-1| \rho_n(z) \leq \lambda^{vp+p-1}, \\ |p-1| \varpi'_n(z) | \leq p \Sigma |f_1(z)| \leq |p-1| \rho_n^{(1)}(z) \leq p(v+1)\lambda^{vp+p-1}, \\ |p-1| \varpi''_n(z) | \leq p^2 \Sigma |f_2(z)| \leq |p-1| \rho_n^{(2)}(z) \leq p^2(v+1)^2 \lambda^{vp+p-1}, \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

où les $f_1, f_2, \dots$ sont des produits $z^{\beta_0}(z - I_n^{(1)})^{\beta_1} \dots (z - I_n^{(v)})^{\beta_v}$, en nombre respectivement $\leq v+1, (v+1)^2, \dots$, avec $\beta_k \leq p$.

Alors

$$\begin{aligned} |p-1| F_n(I_n) | \\ \leq |p-1| L_n \leq \lambda^{vp+p-1} [1 + p(v+1) + p^2(v+1)^2 + \dots + p^\mu(v+1)^\mu + \dots], \end{aligned}$$

où $\mu \leq vp + p - 1$, et

$$|p-1| L_n \leq \lambda^{vp+p-1} (pv + p)^{pv+p} < [p(v+1)\lambda]^{vp+p} = \varphi^{(1)}.$$

Cette inégalité a lieu que l'on prenne δ égal à 0, $I^{(1)}, \dots$, ou $I^{(v)}$. Ceci posé, d'après (8),

$$F(\delta) = F_n(I_n) + \theta_n,$$

où

$$|\theta_n| < |L'_n| [(v+1) + (v+1)^2 + \dots + (v+1)^{vp+p-1}] \varphi < |L'_n| (v+1)^{vp+p} \varphi,$$

puisque $F(z)$ est de degré $vp + p - 1$, L'_n étant celle des quantités $L_n, L_n^{(1)}, \dots, L_n^{(v)}$ dont le module est le plus grand. On conclut de là

$$J^{(k)} F(I^{(k)}) = (J_n^{(k)} + j_n^{(k)}) [F_n(I_n^{(k)}) + \theta_n^{(k)}] = J_n^{(k)} F_n(I_n^{(k)}) + \zeta_n^{(k)},$$

(¹) D'après le même raisonnement, φ est aussi limite supérieure de $|p-1| F(\delta)$.

$J_n^{(k)}$ étant une des fractions de la suite (1) dont $J^{(k)}$ est la limite et $J^{(k)} = (J_n^{(k)} + j_n^{(k)})$ ($j_n^{(k)} = 0$ quand $J^{(k)}$ est rationnel);

$$|\zeta_n^{(k)}| \leq |j_n^{(k)}| \varphi + 2\lambda |\theta_n^{(k)}| < |l_n^{(k)}| (\nu + 1)^{2\nu p + 2p - 1} \varphi,$$

$l_n^{(k)}$ étant celle des quantités $l_n^{(1)}, j_n^{(1)}, \dots, j_n^{(\nu)}$ dont le module est le plus grand. Le second membre de (6) changé de signe s'écrit alors

$$\sum_1^{\nu} J^{(k)} F(I^{(k)}) + F(0) = \sum_1^{\nu} J_n^{(k)} F_n(I_n^{(k)}) + F_n(0) + \chi_n = f_n + \chi_n,$$

où

$$(9) \quad |\chi_n| < |l_n^{(k)}| (\nu + 1)^{2\nu p + 2p} \varphi.$$

(6) donne donc

$$(10) \quad f_n = -\chi_n - \Pi_1 = -\psi_n,$$

où, d'après (7) et (9), quand p est assez grand,

$$(11) \quad |\psi_n| < (\lambda^{2\nu+2} e p^{-1})^p + |l_n^{(k)}| p^{6\nu p + 6p}.$$

En précisant cette limite supérieure de $|\psi_n|$, et déterminant une limite inférieure de $|f_n|$ pour la valeur de n considérée et une valeur correspondante convenable de p , je vais établir l'impossibilité de (10) dans les conditions indiquées au théorème III.

J'étudie f_n : en s'inspirant de la démonstration classique précitée de la transcendance de e , on voit que

$$F_n(0) = \varpi_n(0) + \varpi'_n(0) + \dots,$$

où les $p-1$ premières quantités $\varpi_n(0), \varpi'_n(0), \dots$ sont nulles; $\varpi_n^{(p-1)}(0)$ est de la forme

$$(-1)^{\nu p} (I_n^{(1)} \dots I_n^{(\nu)})^p;$$

$\varpi_n^{(p)}(0), \varpi_n^{(p+1)}(0), \dots$ sont de la forme

$$(12) \quad p \Phi(I_n^{(1)}, \dots, I_n^{(\nu)}),$$

où Φ est un polynôme en $I_n^{(1)}, \dots, I_n^{(\nu)}$ à coefficients entiers de degré $\leq p\nu$.

On voit encore que

$$w_n(z) = \frac{b_1(z - I_n^{(k)})^p + b_2(z - I_n^{(k)})^{p+1} + \dots}{p-1}$$

a, pour $z = I_n^{(k)}$, ses $p-1$ premières dérivées nulles et toutes les autres de la même forme (12). Finalement, soit

$$I_n^{(k)} = P_n^{(k)} Q_n^{(k)-1}, \quad J_n^{(k)} = p_n^{(k)} q_n^{(k)-1},$$

où $Q_n^{(k)}, q_n^{(k)}$ sont réels et satisfont (1) aux conditions (1), (2) et (3); on a

$$f_n = \frac{(-1)^{p\Psi} (P_n^{(1)} \dots P_n^{(v)})^p (Q_n^{(1)} \dots Q_n^{(v)})^{p\Psi-p} q_n^{(1)} \dots q_n^{(v)} - p^\Psi}{q_n^{(1)} \dots q_n^{(v)} (Q_n^{(1)} \dots Q_n^{(v)})^{p\Psi}},$$

où Ψ est un entier, réel ou imaginaire.

Soit q_n le plus grand des nombres $q_n^{(1)}, \dots, q_n^{(v)}, Q_n^{(1)}, \dots, Q_n^{(v)}$. D'après (3), le dénominateur de f_n est de la forme $q_n^{p\sigma_n}$, où σ_n est limité supérieurement et inférieurement. Quant au numérateur, si $\Psi = 0$, il est $\neq 0$, et son module est ≥ 1 ; si $\Psi \neq 0$, le numérateur a son module ≥ 1 ou est nul : dans ce dernier cas, le carré du module de chacun des deux termes du numérateur aurait même valeur; or, le carré du module du premier terme est

$$N = |P_n^{(1)} \dots P_n^{(v)}|^2 p (Q_n^{(1)} \dots Q_n^{(v)})^{2p\Psi-2p} (q_n^{(1)} \dots q_n^{(v)})^2,$$

puisque les $Q_n^{(k)}$ et les $q_n^{(k)}$ sont réels. D'après (3), chaque facteur du second membre de N étant $\leq q_n^\sigma$, où σ est fini, tout facteur premier du nombre N est $\leq q_n^\sigma$. Si donc on prend le nombre premier arbitraire $p = q_n^{\alpha_n}$, où α_n est $> \sigma$, on voit que les carrés des modules des deux termes du numérateur de f_n ne peuvent être égaux; donc alors, en tout cas, le numérateur de f_n est un entier $\neq 0$, dont le module est ≥ 1 .

Finalement, on aura, pour la valeur de p en question,

$$|f_n| \geq q_n^{-p\tau} \quad (\tau \text{ fixe convenable } > 0),$$

et, d'après (10) et (11),

$$(13) \quad q_n^{-p\tau} < (\lambda^{2v+2} e^{p-1})^p + |I_n''| p^{6pv+6p}.$$

(1) Quand $I^{(k)} = I_n^{(k)}$ ou $J^{(k)} = J_n^{(k)}$ sont rationnels (n assez grand), on peut toujours les mettre sous une forme satisfaisant à ces conditions, avec $\tau'_n = \infty$.

D'une part,

$$(14) \quad (\lambda^{2\nu+2} e p^{-1})^p < q_n^{-2p\tau} < \frac{1}{4} q_n^{-p\tau},$$

car

$$q_n^{2\tau} < p e^{-1} \lambda^{-2\nu-2},$$

si α_n est assez grand; d'autre part, d'après (3),

$$|l_n''| \leq q_n^{-\tau_1 \varphi_n} \quad (\tau_1 \text{ fixe}),$$

et

$$(15) \quad |l_n''| p^{6p\nu+6p} \leq q_n^{-\tau_1 \varphi_n + 6p\alpha_n(\nu+1)} < q_n^{-2p\tau} < \frac{1}{4} q_n^{-p\tau},$$

pourvu que

$$2p\tau < \tau_1 \varphi_n - 6p\alpha_n(\nu+1),$$

ou

$$\tau_1 \varphi_n q_n^{-\alpha_n} > 2\tau + 6\alpha_n(\nu+1).$$

Il suffira que

$$(16) \quad \varphi_n \geq q_n^{2\alpha_n},$$

autrement dit que l'on ait pour toute valeur de n , assez grande (ou même pour une infinité des valeurs n),

$$(17) \quad \varphi_{n_1} > q_{n_1}^{\alpha},$$

si grand que soit le nombre positif α (¹).

La condition (17) étant supposée satisfaite par l'ensemble S_1 , (14) et (15) ont lieu, et (13) est impossible, par suite aussi (6), (5) et (4). La première partie du théorème III se trouve ainsi établie.

Je me reporte maintenant aux considérations qui suivent le théorème I de ma dernière Note du *Bulletin de la Société mathématique*, 1906, p. 216, intitulée : *Sur les nombres transcendants dont le développement en fraction continue est quasi-périodique et sur les nombres de Liouville*. Soit le nombre réel de Liouville

$$(18) \quad \delta = c_0 + 1 : c_1 + 1 : c_2 + \dots,$$

(¹) L'existence du nombre premier $p > q_n^{\alpha}$ est alors une conséquence immédiate du postulat de Bertrand établi par Tchebychef : il y a toujours un nombre premier entre l'entier y et l'entier $2y$.

d'ordre $\geq (3, \epsilon)$ dans la première classification (ϵ positif arbitraire), γ_s le plus grand des entiers positifs $c_0, c_1, \dots, c_s$: la condition (17) sera satisfaite par la $s^{\text{ième}}$ réduite de δ si l'on a la condition analogue à l'inégalité (5 bis) de cette Note

$$\log c_{s+1} > \gamma_s^{\alpha'} \quad (\alpha' \text{ comme } \alpha) :$$

l'ordre étant quelconque, mais $\geq (3, \epsilon)$, il y a toujours des fractions continues satisfaisant à cette inégalité pour une infinité de valeurs de s . L'ensemble S_1 correspondant à δ pour ces valeurs de s satisfait au théorème III.

Enfin, quand le nombre réel de Liouville (18) satisfait aux conditions du corollaire I du théorème I de la même Note, on voit encore que (17) aura lieu si, pour une infinité de valeurs de s ,

$$\log \log c_s > \alpha' s \log \gamma_{s-1},$$

ou, *a fortiori*, si

$$e_{k_s-3}(s) > \alpha' s e_{k_s-4}(s) \quad (k_s > 4) :$$

il suffit, si $x = e_{k_s-4}(s) > \alpha' s$, $e^x > x^2$, pour x assez grand, ce qui a lieu. Les fractions rationnelles à coefficients entiers réels M, M_1 formées avec le nombre δ et les nombres de l'ensemble S_1 correspondant satisfont à (17); ces nombres comprenant ceux de la forme $M + M_1 i$, la deuxième partie du théorème III se trouve établie.

C. Q. F. D.

Ce théorème comporte une série de corollaires presque immédiats qui valent la peine, semble-t-il, d'être énoncés isolément.

Je désigne toujours par δ un nombre $\neq 0$ de la forme (1) $M + M_1 i$, où M et M_1 sont des nombres de Liouville réels de S_1 satisfaisant à (17) ou des nombres rationnels.

COROLLAIRE I. — $e^\delta, \cos \delta, \sin \delta, \tan \delta$ sont des nombres transcendants.

Si $x = a + bi$, où a et b sont rationnels et réels, x appartient

(1) C'est la forme générale des nombres de S_1 [Introduction à la théorie des nombres transcendants, p. 45, note (1)].

à S_1 , quel que soit le nombre de Liouville β satisfaisant à (17).
Donc :

COROLLAIRE II. — e^x , où $x \neq 0$ est rationnel, réel ou imaginaire quelconque, n'est racine d'aucune équation algébrique dont les coefficients sont des polynômes, à coefficients rationnels, formés avec un même nombre de Liouville satisfaisant à (17); il en est de même de $\cos x$, $\sin x$, $\tan x$.

En particulier, $x \neq 0$ étant rationnel et réel, quelconque, e^x , $\cos x$, $\sin x$, $\tan x$, qui sont transcendants ⁽¹⁾, ne peuvent être des nombres de Liouville satisfaisant à (17). Par suite, on peut assigner une limite supérieure de leur ordre, c'est-à-dire de la croissance des quotients incomplets de leur développement en fraction continue arithmétique.

Ces fractions continues ne peuvent en effet satisfaire aux conditions du corollaire I du théorème I de notre Note précitée du *Bull. Soc. Math.*, 1906, p. 219 : si

$$c_0 + 1 : c_1 + 1 : c_2 + \dots + 1 : c_n + \dots \quad (c_n \text{ entier})$$

est une de ces fractions, et si k_n est le plus petit entier positif ou négatif tel que $c_n \leq e_{k_n}(n)$, on a, par suite, dès que n est assez grand, $k_n < n^{1+\epsilon}$, si petit que soit le nombre positif fixe ϵ .

COROLLAIRE III. — Le logarithme népérien d'un nombre de S_1 n'est pas un nombre de S_1 ; le logarithme népérien d'un nombre algébrique n'est pas un nombre de S_1 . Le développement en fraction continue du logarithme népérien d'un nombre algébrique réel > 1 a son ordre limité ⁽²⁾ comme au corollaire II.

En effet, si β et J sont deux nombres de S_1 , on n'a pas $\beta = e^J$, $\log \beta = J$. D'autre part, soit y un nombre algébrique : on n'a pas $y = e^\beta$, $\log y = \beta$.

⁽¹⁾ La démonstration du théorème III suffit pour montrer que $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ sont transcendants pour x rationnel $\neq 0$ et réel, sans qu'il soit nécessaire de recourir au théorème général connu de M. Lindemann.

⁽²⁾ Ceci s'applique en particulier à $\text{Log nép.}(1 + \sqrt{2})$ (constante de M. Laisant). Je remarque, en cours d'impression, qu'il en est de même du développement en fraction continue de π , puisque $e^{\pi i} = -1$.

Remarque. — On pourrait essayer de généraliser le théorème III et ses corollaires en considérant l'ensemble Σ formé des nombres de S_1 et des nombres algébriques par rapport à S_1 , c'est-à-dire des nombres racines d'équations algébriques dont les coefficients sont des nombres de S_1 . On aurait ainsi, semble-t-il, l'extension la plus générale du théorème précité de M. Lindemann.

Pour une pareille tentative, il conviendra de se reporter aux travaux de M. Lindemann (*Math. Ann.*, t. XX, 1882, p. 213) et de Weierstrass (*Sitzungsberichte der Berl. Akad.*, 1885, p. 1067), en cherchant à suivre une marche analogue.

IV.

Je vais maintenant établir la propriété suivante :

THÉORÈME IV. — Soient $a_1, a_2, \dots, a_\mu$ des nombres rationnels > 1 , $I^{(1)}, I^{(2)}, \dots, I^{(v)}$ des nombres de Liouville > 1 appartenant à un ensemble S'' satisfaisant à (17). Tout polynôme ψ à coefficients entiers positifs formé avec les nombres $I^{(j)}, a_k^{I^{(j)}}, I^{(j)I^{(k)}}$, $I^{(j)a_k}$ est un nombre transcendant.

La même conclusion subsiste quand $a_1, a_2, \dots, a_\mu$ sont des nombres rationnels positifs quelconques $\neq 1$, $I^{(1)}, I^{(2)}, \dots, I^{(v)}$ des nombres de Liouville positifs quelconques fonctions rationnelles à coefficients entiers réels, d'un même nombre de Liouville positif δ satisfaisant à (17), pourvu que la fonction $\Psi(x)$ obtenue en remplaçant δ par x dans le polynôme ψ dépende de x .

Soit une quantité ψ limite pour n infini d'une suite de quantités $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots$, où ψ_n est une fonction de quantités rationnelles

$$\xi_n = P_n Q_n^{-1}, \quad \xi'_n = P'_n Q_n'^{-1}, \quad \dots,$$

ayant elles-mêmes pour limites quand n croît indéfiniment $\xi, \xi', \dots$, en sorte que

$$\psi = \psi(\xi, \xi', \dots), \quad \psi_n = \psi(\xi_n, \xi'_n, \dots).$$

Les $\xi, \xi', \dots$ seront des nombres transcendants de Liouville ou

des nombres rationnels en nombre fini : l'un au moins sera un nombre de Liouville.

Je suppose que, pour une infinité de valeurs de n , $|\psi - \psi_n|$ possède une limite supérieure $l_n \neq 0$ et fonction de n , quand les ξ , ξ' , ... prennent une série de valeurs appartenant à un certain ensemble de nombres (par exemple $S, S', S'', S''', S_1, \dots$) : l_n tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$.

J'admets alors que la quantité ψ puisse être racine d'une équation algébrique donnée *irréductible* arbitraire $f(x) = 0$ à coefficients entiers : $\psi_n = x_n$ est une valeur approchée de la racine. On aura, pour n assez grand,

$$f(\psi_n) = f(\psi + \psi_n - \psi) = (\psi_n - \psi)M \neq 0,$$

où $|M| \geq \frac{1}{2} |f'(\psi)|$ est fini, et

$$(19) \quad |f(\psi_n)| \leq l_n M.$$

D'autre part, si l'on peut, par un procédé quelconque, avoir une limite inférieure $\lambda_n \neq 0$ et fonction de n de la quantité $|f(\psi_n)|$ dès que n est assez grand, on devra avoir

$$\lambda_n \leq l_n M.$$

Si cette condition n'a pas lieu pour toute valeur de n assez grande, ψ est un nombre transcendant.

J'envisage un cas plus particulier, celui où ψ_n est un nombre algébrique racine d'une équation à coefficients entiers

$$(20) \quad F_n(x) = B_0 x^{d_n} + B_1 x^{d_n-1} + \dots + B_{d_n} = 0,$$

de racines

$$\eta_1 = \psi_n, \quad \eta_2, \quad \dots, \quad \eta_{d_n}.$$

La fonction

$$(21) \quad \Phi_n = B_0^{d_n} f(\eta_1) \dots f(\eta_{d_n})$$

est un entier fonction de n . L'équation $f(x) = 0$ ne peut avoir en commun avec F_n une racine sans diviser F_n : si l'on peut établir qu'il n'en est pas ainsi, $\Phi_n \neq 0$ et $|\Phi_n| \geq 1$. On déterminera une limite supérieure des $|\eta_i|$, et l'on en déduira une limite supérieure μ_n des $|f(\eta_i)|$, en sorte que

$$(22) \quad |f(\psi_n)| = |f(\eta_1)| = |\Phi_n| |B_0^{d_n} f(\eta_2) \dots f(\eta_{d_n})|^{-1} \geq B_0^{-d_n} \mu_n^{-d_n+1} = L_n;$$

on pourra prendre $\lambda_n = L_n$, et il faudra

$$L_n \leq l_n M.$$

En choisissant, si cela est possible, les $\xi - \xi_n$ de façon que

$$(23) \quad l_n B_0^{d_n} \mu_n^{d_n-1}$$

tende vers 0 pour une infinité de valeurs de n croissant indéfiniment, on obtient des quantités ψ qui sont des nombres transcendants.

Ces principes généraux posés, je vais en faire une application : soient $a_1, a_2, \dots, a_\mu$ un nombre fini de nombres rationnels réels positifs > 0 , $I^{(1)}, I^{(2)}, \dots, I^{(v)}$ un nombre fini de nombres de Liouville réels positifs appartenant à un ensemble S' . Je prends pour $\xi, \xi', \dots$ des quantités quelconques de la forme

$$(23 \text{ bis}) \quad I^{(j)}, a_i^{(j)}, I^{(j)I^{(k)}}, I^{(j)a_i}.$$

Il y a un cas où l'on est sûr que $\psi - \psi_n \neq 0$, puisque les nombres $\mathfrak{z}$ de S' sont tels que les $\mathfrak{z} - I_n$ sont tous de même signe, c'est celui où, remplaçant $I^{(j)}$ par $x^{(j)}$, quel que soit j , dans ψ , ψ devient, au voisinage du système de valeurs $x^{(1)} = I^{(1)}, x^{(2)} = I^{(2)}, \dots$ une fonction Ψ *simultanément* croissante ou décroissante de toutes les variables $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$ Exemples :

1° ψ est une fonction rationnelle à coefficients entiers réels des quantités (23 bis), et les $I^{(1)}, \dots, I^{(v)}$ sont des fonctions rationnelles, à coefficients rationnels réels, d'un même nombre $\mathfrak{z}$ de Liouville réel : remplaçant $\mathfrak{z}$ par x , il suffira que Ψ dépende effectivement de x pour que $\psi - \psi_n$ soit $\neq 0$ quand $x = \mathfrak{z}$, dès que n est assez grand ⁽¹⁾. Ainsi, quand $\psi = \alpha^{\mathfrak{z}} + \alpha^{-\mathfrak{z}}$, $\psi - \psi_n \neq 0$;

2° $\psi = \sum A \xi^{\omega} \xi'^{\omega'}$... est un polynôme en $\xi, \xi', \dots$ à coefficients entiers positifs, et les a_i et les $I^{(j)}$ sont tous > 1 ; dans ce *deuxième cas*, que je vais seul considérer, en observant que les mêmes raisonnements s'appliquent en partie dans le *premier*, quand on fait varier les $x^{(j)}$ de quantités suffisamment petites $\Delta x^{(j)}$ toutes de même signe, $\Delta x^{(j)}, \Delta a_i^{x^{(j)}}, \Delta x^{(j)x^{(k)}}, \Delta x^{(j)a_i}$ sont tous

(1) La fonction $\Psi(x)$ est, en effet, monodrome aux environs de $x = \mathfrak{z}$.

du signe des $\Delta x^{(j)}$, et aussi $\Delta \Psi$. Dès que n est assez grand, on est sûr que $\psi - \psi_n \neq 0$.

Ceci posé, dans ce même cas,

$$\psi_n = \sum A \xi_n^{\omega} \xi_n^{\omega'} \dots,$$

et $|\psi - \psi_n|$ a une limite supérieure de la forme $\lambda \zeta_n$, où λ est une constante et ζ_n une limite supérieure des quantités $|I^{(j)} - I_n^{(j)}|$. D'après les relations (2), (3) et (19), on pourra poser

$$(23 \text{ ter}) \quad |\psi - \psi_n| \leq \lambda \zeta_n \leq Q_n^{-\tau} \varphi_n = l_n, \quad |f(\psi_n)| \leq l_n M,$$

où $\tau > 0$ est une constante limitée inférieurement.

D'autre part, $\mathfrak{J}$ et J étant deux quelconques des nombres $I^{(1)}, \dots, I^{(n)}$, les $\xi_n, \xi'_n, \dots$ sont chacun d'une des formes

$$I_n, \left(\frac{p}{q}\right)^{l_n}, I_n^{j_n}, I_n^{q_n} \quad (p, q \text{ entiers } > 0),$$

avec

$$I_n = P_n Q_n^{-1} > 1, \quad J_n = P'_n Q_n'^{-1} > 1, \quad pq^{-1} > 1;$$

$\xi_n, \xi'_n, \dots$ sont racines d'équations algébriques d'une des formes

$$(24) \quad \begin{cases} Q_n x - P_n = 0, & q^{p_n} x^{q_n} - p^{p_n} = 0, \\ Q_n^{p_n} x^{q_n} - P_n^{p_n} = 0, & Q_n^p x^q - P_n^p = 0. \end{cases}$$

Si l'on remplace dans ψ_n , de toutes les manières possibles, chacune des quantités $\xi_n, \xi'_n, \dots$ par les diverses racines de celles des équations (24) dont elle est racine, on obtient d_n quantités conjuguées $\eta_1 = \psi_n, \eta_2, \dots, \eta_{d_n}$ qui sont racines d'une même équation algébrique $F_n = 0$ à coefficients entiers de la forme (20).

J'admets que ψ soit racine de $f(x) = 0$, c'est-à-dire soit algébrique.

Je dis d'abord que $f(\eta_i) \neq 0$. En effet, si $f(\eta_i) = 0$, $f(x)$, qui est irréductible, divisera $F_n(x)$; toutes les racines de $f(x)$, et en particulier ψ , seront parmi les quantités $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{d_n}$. Les racines des équations (24) sont d'ailleurs d'une des formes

$$\begin{aligned} x = I_n, \quad x = (pq^{-1})^{l_n} e^{2k\pi i} Q_n^{-1}, \quad x = I_n^{j_n} e^{2k'\pi i} Q_n'^{-1}, \\ x = I_n^{p_n} e^{2k''\pi i} q^{-1}, \end{aligned}$$

où k est un des entiers $0, 1, 2, \dots, Q_n - 1$, k' un des entiers $0, 1, 2, \dots, Q'_n - 1$, k'' un des entiers $0, 1, 2, \dots, q - 1$. On aura,

par exemple, une égalité de la forme

$$\psi = \sum A \xi_n^{\omega} \xi_n^{\omega'} \dots e^{2\pi i (\omega k Q_n^{-1} + \omega' k' Q_n^{-1} + \dots)} = \psi'_n.$$

D'abord, quand les $\xi - \xi_n$ sont tous positifs, c'est-à-dire puisque $\alpha_i > 1$, $I^{(j)} > 1$, quand les $\beta - I_n$ dans S'' sont tous positifs, le module du second membre est $< \psi$, et l'égalité est impossible; alors $f(\eta_i)$ est $\neq 0$. Quand les $\beta - I_n$ sont tous négatifs, ψ'_n étant réel, ainsi que ψ_n ,

$$\psi_n - \psi = \psi_n - \psi'_n = \sum A \xi_n^{\omega} \xi_n^{\omega'} \dots [1 - \cos 2\pi (\omega k Q_n^{-1} + \omega' k' Q_n^{-1} + \dots)] > 0.$$

$1 - \cos 2\pi (\omega k Q_n^{-1} + \dots)$ tend vers 0 quand n croît indéfiniment, puisque $\psi_n - \psi$ tend alors vers 0, c'est-à-dire que, N_n étant entier,

$$2\pi (\omega k Q_n^{-1} + \dots) = \frac{2\pi N_n}{Q_n (Q'_n \dots)} = 2\pi (\lambda \pm \epsilon'_n),$$

avec λ entier, $\lim \epsilon'_n = 0$ pour $n = \infty$.

Or $Q_n Q'_n \dots$ est de la forme $Q_n^{\sigma_n}$ (σ_n limité supérieurement et inférieurement), d'après (3); $1 - \cos 2\pi (\lambda \pm \epsilon'_n)$ est nul ou au moins de l'ordre de grandeur de $\epsilon_n'^2$, c'est-à-dire $\geq Q_n^{-\sigma}$, où σ est un nombre fixe convenable > 0 ; il en serait de même de $|\psi_n - \psi'_n| \neq 0$, car les ϵ'_n ne sont pas tous nuls; mais $\psi_n - \psi$ est $\neq 0$ et au plus de l'ordre de grandeur de $Q_n^{-\tau_p}$, d'après ce qu'on a vu [équation (23 ter)]; on est donc conduit à une impossibilité quand n est assez grand.

Finalement, $f(\eta_i)$ est $\neq 0$ quand les $\beta - I_n$ dans S'' sont tous à la fois positifs ou négatifs ⁽¹⁾.

(1) On remarquera que, si l'on suit des procédés de raisonnement analogues dans le premier cas mentionné plus haut, en supposant $\psi = \sum A \xi_n^{\omega} \xi_n^{\omega'} \dots$, où A , ξ , ξ' , ... sont positifs et les $I^{(j)}$ fonctions rationnelles, à coefficients rationnels réels, d'un même nombre β de Liouville réel (α_i et $I^{(j)} > 0$), on est sûr que $|\psi - \psi_n| \neq 0$ pour une infinité de valeurs de n , si Ψ dépend de x ; on a encore (23 ter), (24) avec $pq^{-1} > 0$, $|\psi_n - \psi| > 0$,

$$1 - \cos 2\pi (\lambda \pm \epsilon'_n) = \lambda_1 \epsilon_n'^2 \quad (\lambda_1 \text{ fini } \geq 0),$$

les ϵ'_n n'étant pas tous nuls, puisque $|\psi - \psi_n| \neq 0$. On est également conduit à un résultat absurde, c'est-à-dire que $f(\eta_i)$ est aussi $\neq 0$. Il est inutile de s'occuper du signe des quantités $I^{(j)} - I_n^{(j)}$.

Dans le cas considéré ici, les raisonnements qui suivent s'appliquent à peu près identiquement.

Je suppose donc $f(\eta_i) \neq 0$. On a, dans (21), $|\Phi_n| \geq 1$. Une limite supérieure des η_i est précisément ψ_n ; si δ est une limite supérieure du degré et des valeurs absolues des coefficients de $f(x)$,

$$(25) \quad |f(\eta_i)| \leq (\delta + 1)^2 \psi_n^\delta = \mu_n < A',$$

où A' est un nombre fixe. Il reste à obtenir une limite supérieure de B_0 et de d_n .

Le nombre des quantités $\xi, \xi', \dots$ distinctes dans ψ est limité; quand on substitue dans ψ_n à $\xi_n, \xi'_n, \dots$ les diverses racines des équations (24), le nombre d_n des quantités $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{d_n}$ obtenues est au plus égal à un nombre de la forme $Q_n^{\theta_n}$, où θ_n est limité supérieurement, d'après (2) et (3). Donc

$$(26) \quad d_n \leq Q_n^{\theta}, \quad (\theta \text{ positif indépendant de } n).$$

Je fais dans les équations (24) le changement de variables respectif

$$x = y Q_n^{-1}, \quad x = y q^{-\mu'}, \quad x = y Q_n^{-\mu'}, \quad x = y Q_n^{-\mu};$$

il vient les équations

$$(27) \quad \begin{cases} y - P_n = 0, & y Q_n - P_n^p q^{\mu' Q_n - P_n} = 0, \\ y Q_n - P_n^p Q_n^{\mu' Q_n - P_n}, & y q - P_n^p Q_n^{\mu' q - p} = 0. \end{cases}$$

Si μ' est un entier supérieur au double de la plus grande des quantités $I^{(1)}, \dots, I^{(v)}, a_1, \dots, a_\mu$, quand n est assez grand, les racines des équations (27) sont des entiers algébriques. Posant

$$\xi_n = \rho_n Q_n^{-1}, \quad \xi_n = \rho_n q^{-\mu'}, \quad \xi_n = \rho_n Q_n^{-\mu'} \quad \text{ou} \quad \xi_n = \rho_n Q_n^{-\mu},$$

suitant celle des équations (27) dont ξ est racine, et des relations analogues pour $\xi'_n, \dots$, on peut déterminer un nombre $\nu_n \leq \nu'$, dès que n dépasse une certaine limite, et tel que

$$C_n = Q_n^{\nu_n}, \quad \chi_n = \psi_n C_n = \sum A_n \rho_n^{\omega} \rho_n^{\omega'} \dots,$$

où les A_n sont entiers, et χ_n un entier algébrique; χ_n et ses conjuguées sont racines d'une équation algébrique en z de degré d_n , où le coefficient de la plus haute puissance de z est l'unité

$$z^{d_n} + D_1 z^{d_n-1} + \dots + D_{d_n} = 0;$$

ψ_n et ses conjuguées sont alors racines de l'équation à coefficients

entiers

$$C_n^{d_n} x^{d_n} + D_1 C_n^{d_n-1} x^{d_n-1} + \dots + D_{d_n} = 0,$$

équation qui, ayant mêmes racines que l'équation (20), est telle que, d'après (26), l'on peut prendre

$$(28) \quad B_0 \leq C_n^{d_n} \leq Q_n^{v^{d_n}} \leq Q_n^{v Q_n^0}.$$

Il ne reste plus qu'à rapprocher les conditions (23), (23 ter), (25), (26) et (28); il en résulte que ψ sera transcendant si

$$Q_n^{-\tau \varphi_n + v Q_n^0} A' Q_n^0$$

tend vers 0 pour une infinité de valeurs de n croissant indéfiniment. La condition suffisante ainsi obtenue est encore la condition (17). Il s'ensuit qu'elle a lieu pour tous les nombres réels > 1 d'un ensemble S'' satisfaisant à (17), en particulier d'un ensemble S'' défini par un nombre $\delta > 1$ de Liouville remplissant les conditions du corollaire I du théorème I de notre Note précitée du *Bull. Soc. math.*

En tenant compte de ce qui a été dit pour le *premier cas*, on obtient le théorème IV.

C. Q. F. D.

Ce théorème comporte encore un certain nombre de corollaires presque immédiats et qui valent la peine, semble-t-il, d'être énoncés isolément.

COROLLAIRE I. — δ étant un nombre réel de Liouville, positif ou négatif, satisfaisant à (17), a^δ , où a est rationnel > 0 et $\neq 1$, est transcendant.

COROLLAIRE II. — δ étant un nombre réel de Liouville, > 0 et satisfaisant à (17), δ^δ est transcendant.

COROLLAIRE III. — Le logarithme d'un nombre rationnel ou algébrique réel > 1 , dans le système de base a rationnelle > 0 et $\neq 1$, ne peut être un nombre de Liouville satisfaisant à (17); par suite son développement en fraction continue ⁽¹⁾ arithmétique a son ordre limité comme au corollaire II du théorème III.

(1) Ce logarithme peut être rationnel : le logarithme de $\sqrt{2}$ est $\frac{1}{2}$ avec la base 2; mais $\log \sqrt{2}$ est irrationnel avec la base 3. De même, la racine positive de $x^x = m$ peut être rationnelle car $2^2 = 4$; mais la racine de $x^x = 2$ est irrationnelle.

COROLLAIRE IV. — *La racine positive de l'équation $x^x = m$, où m est algébrique > 1 , ne peut être un nombre de Liouville satisfaisant à (17); par suite, son développement en fraction continue a son ordre limité comme ci-dessus.*

Enfin, je mentionnerai encore ce corollaire à titre d'exemple :

COROLLAIRE V. — *Tout étant posé comme au corollaire I, $\alpha^\beta + \alpha^{-\beta}$ est transcendant.*

Car si, par exemple, $\beta > 0$, $\alpha^{-\beta} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^\beta$.

Je me contenterai d'indiquer la possibilité d'extensions du théorème IV par les procédés précédents pour d'autres formes de $\psi^{(1)}$.

NOTE RELATIVE AUX POINTS D'INTERSECTION DES COURBES ALGÈBRIQUES;

PAR M. FÉLIX LUCAS.

On sait que le groupe des points d'intersection de deux courbes algébriques planes du même degré présente, lorsque ce degré surpasse 2, cette intéressante particularité qu'il existe entre ces points certaines liaisons inévitables. S'il s'agit, par exemple, de deux cubiques, leurs neuf points d'intersection sont tels que huit d'entre eux déterminent le neuvième, car toutes les cubiques du faisceau déterminé par ces huit points passent nécessairement par ce

(¹) Additions à la bibliographie indiquée par moi à la page 273 de mon *Introduction à la théorie des nombres transcendants*, article *Nombres transcendants*.

A. HURWITZ, *Acta mathematica*, t. XIV, 1890, p. 211; *Math. Ann.*, t. XXII, p. 211; t. XXXII, p. 583; t. XXXIII, p. 249; t. XLIV, p. 417; *Göttinger Nachr.*, 1893, p. 220; *Naturforsch. Gesellschaft*, 1896, p. 34. Le premier de ces Mémoires renferme des résultats très élégants sur la réductibilité des fonctions entières à coefficients rationnels, le dernier sur la théorie des fractions continues.

STAECKEL, *Acta Math.*, t. XXV.

FABER, *Math. Ann.*, t. LVIII.

Je dois en grande partie ces renseignements complémentaires à une obligeante communication de MM. Hurwitz et Landau.

neuvième. S'agit-il, plus généralement, de deux courbes du degré m supérieur à 2, il suffit de

$$\frac{m(m+3)}{2} - 1$$

points quelconques du plan pour déterminer un faisceau de ces courbes lesquelles ont m^2 points communs, en sorte que

$$\frac{m(m-3)}{2} + 1$$

points viennent s'adjoindre aux précédents en se liant avec eux.

Parmi les conséquences intéressantes qui résultent de ces liaisons, nous nous proposons ici d'en étudier une dont voici l'indication. Si l'on sépare un point du groupe des m^2 pivots, en imposant à une courbe algébrique passant par les $m^2 - 1$ autres pivots la condition de ne pas passer par le premier, le degré de cette courbe sera nécessairement supérieur à m . Quel sera le minimum possible du degré et quelle sera l'équation générale de la courbe? Tel est le problème que nous allons résoudre.

Je prends pour origine des coordonnées (les axes rectangulaires restant quelconques) celui des m^2 pivots qui doit être isolé du groupe. Les équations des deux courbes du degré m qui déterminent ces m^2 pivots seront alors dépourvues de terme constant; désignons ces équations par

$$(1) \quad U = 0$$

et

$$(2) \quad V = 0.$$

Considérant la première, je divise le coefficient de chacun de ses termes par le degré de ce terme, et j'obtiens l'équation d'une courbe auxiliaire du même degré m ,

$$(3) \quad u = 0;$$

je puis alors écrire l'équation (1) sous la forme

$$(4) \quad U = x u'_x + y u'_y = 0.$$

Opérant de même pour l'équation (2), je considère la courbe

auxiliaire

$$(5) \quad v = 0,$$

et je puis écrire

$$(6) \quad V = xv'_x + yv'_y = 0.$$

Prenons le rapport $\frac{y}{x}$ dans chacune des équations (4) et (6) et égalons les deux valeurs de ce rapport, nous aurons

$$(7) \quad W = u'_x v'_y - u'_y v'_x = 0,$$

équation du degré $2(m-1)$. Cette courbe passe par les (m^2-1) pivots, autres que l'origine des coordonnées, communs aux deux courbes U et V; elle passe, d'autre part, par les $(m-1)^2$ pivots du faisceau de courbes du degré $(m-1)$

$$u'_x + \lambda u'_y = 0,$$

λ désignant un paramètre arbitraire, ainsi que par les $(m-1)^2$ pivots du faisceau de courbes du degré $(m-1)$

$$v'_x + \lambda v'_y = 0.$$

Le nombre total des points ainsi désignés appartenant à la courbe W est

$$3m^2 - 4m + 1;$$

il est supérieur, lorsque m surpasse 2, au nombre

$$2m^2 - m - 1$$

des points nécessaires pour déterminer une courbe du même degré $2(m-1)$ que la courbe W; la valeur de l'excès dont il s'agit est $m^2 - 3m + 2$.

Cela posé, désignons par φ et ψ deux polynômes du degré $(m-2)$ à coefficients arbitraires, et formons l'équation

$$(8) \quad U\varphi + V\psi + W = 0;$$

nous aurons l'équation générale des courbes du degré $2(m-1)$ qui passent par les (m^2-1) pivots, autres que l'origine des coordonnées, communs aux deux courbes U et V. Je dis l'équation *générale*; en voici le motif. Pour déterminer une courbe du degré

$2(m-1)$ à laquelle on impose préalablement la condition de passer par m^2-1 points donnés, il est nécessaire et suffisant de se donner $m(m-1)$ autres points de cette courbe. Comme ce nombre $m(m-1)$ est précisément celui des coefficients arbitraires introduits dans l'équation (8) par les polynômes φ et ψ , on déterminera ces paramètres, considérés comme des inconnues, au moyen d'un système de $m(m-1)$ équations linéaires à nombre égal d'inconnues. Encore faut-il que les $m(m-1)$ points considérés ne soient pas groupés de manière à rendre incompatibles les équations linéaires; pour ne citer qu'un cas d'impossibilité, lequel est d'une complète évidence, indiquons la disposition de plus de $2(m-1)$ points sur une ligne droite qui passerait par l'origine des coordonnées. Si certains groupements des $m(m-1)$ points conduisaient à des cas d'indétermination, on pourrait imposer aux coefficients des polynômes φ et ψ quelques conditions supplémentaires. Quoi qu'il en soit, nous pouvons regarder comme un fait acquis que *l'équation (8) est l'équation générale des courbes du degré $2(m-1)$ qui passent par les $(m-1)^2$ points d'intersection (autres que l'origine des coordonnées) des deux courbes U et V.*

Dans cette équation (8) le nombre des termes du plus haut degré (c'est-à-dire du degré $2m-2$) est égal à $2m-1$, alors que le nombre des coefficients des termes du plus haut degré (c'est-à-dire du degré $m-2$) dans l'ensemble des deux polynômes φ et ψ est seulement de $2m-2$. Il est par conséquent impossible de choisir ces coefficients de manière à abaisser d'une unité le degré de l'équation (8). Cette observation nous indique qu'il ne doit pas exister de courbes d'un degré inférieur à $2(m-1)$ pouvant passer par les m^2-1 pivots, autres que l'origine des coordonnées, des courbes U et V, sans passer en même temps par cette origine. Encore reste-t-il à démontrer, pour confirmer cette prévision, que le premier membre de l'équation (8) ne peut pas se décomposer en deux facteurs dont l'un représenterait une courbe ne passant par aucun des pivots des courbes données U et V; voici d'abord à ce sujet une observation très simple.

Supposons qu'une courbe

$$\mu = 0,$$

d'un degré supérieur à m mais inférieur à $2(m-1)$, passe par les m^2-1 pivots sans passer par l'origine des coordonnées; nous pourrons lui adjoindre une courbe entièrement arbitraire

$$v = 0,$$

d'un degré égal à l'excès de $2(m-1)$ sur le degré de la courbe μ , cette courbe v ne passant par aucun des m^2 points d'intersection de U et de V . L'équation, du degré $2(m-1)$,

$$(9) \quad \mu v = 0,$$

devra se trouver comprise dans l'équation générale (8); il devra donc être possible de déterminer les coefficients des polynomes φ et ψ de manière à identifier les premiers membres des équations (8) et (9). Or, en supposant, ce qui est permis, que dans chacun des polynomes mis en cause la valeur absolue du terme constant soit égale à l'unité, nous voyons que, dans chacun des premiers membres des équations (8) et (9), le nombre des coefficients (autres que le terme constant) est égal à $2m^2 - m - 1$, tandis que dans l'ensemble des polynomes φ et ψ le nombre des coefficients n'est que de $m^2 - m$. Par conséquent l'identification des deux équations (8) et (9) exigerait la solution de $2m^2 - m - 1$ équations à $m^2 - m$ inconnues seulement; il ne paraît pas téméraire d'admettre que cette insuffisance du nombre des inconnues démontre l'impossibilité de l'identification.

Quoi qu'il en soit, on peut arriver au but avec une rigueur incontestable par le raisonnement suivant, qui nous a été indiqué par notre collègue de la Société mathématique, M. Blutel.

Dans la courbe arbitraire

$$v = 0,$$

nous pouvons faire entrer la droite

$$x = x_0,$$

parallèle à l'axe des y et assujettie à cette seule condition de ne passer par aucun des points communs aux courbes données U et V . En faisant $x = 0$ dans l'équation (8), nous obtiendrons l'identité, par rapport à y ,

$$(10) \quad U_0 \varphi_0 + V_0 \psi_0 + W_0 = 0.$$

Attribuons à γ la valeur d'une des m racines de l'équation

$$U_0 = 0,$$

que nous pouvons également écrire sous la forme

$$(11) \quad x_0(u'_x)_0 + \gamma(u'_y)_0 = 0;$$

l'identité (10) deviendra

$$V_0\psi_0 + W_0 = 0,$$

ou, sous une autre forme

$$(12) \quad [x_0(v'_x)_0 + \gamma(v'_y)_0]\psi_0 + (u'_x)_0(v'_y)_0 - (u'_y)_0(v'_x)_0 = 0.$$

Prenons dans (11) la valeur de $(u'_x)_0$ et portons-la dans (12); il viendra, réductions faites,

$$(13) \quad V_0[x_0\psi_0 - (u'_y)_0] = 0.$$

Le premier facteur V_0 ne peut pas être nul, car, s'il l'était, le point (x_0, γ) , qui appartient à la droite $x = x_0$, serait commun aux deux courbes U et V , contrairement à l'hypothèse que nous avons faite sur cette droite. Il faut donc que le second facteur soit nul et cela pour chacune des m valeurs racines de $U_0 = 0$ qu'il nous est possible d'attribuer à γ ; par conséquent ce second facteur est identiquement nul; il en résulte que notre droite $x = x_0$ doit faire partie de la courbe

$$(14) \quad x\psi - u'_y = 0.$$

En prenant dans (11) la valeur de $(u'_y)_0$, au lieu de $(u'_x)_0$, pour la porter dans (12) et raisonnant ensuite comme ci-dessus, nous trouverons que notre droite $x = x_0$ doit faire partie de la courbe

$$(15) \quad \gamma\psi + u'_x = 0.$$

Puisque les deux premiers membres des équations (14) et (15) sont divisibles par $(x - x_0)$, il en est de même du premier membre de l'équation

$$(16) \quad xu'_x + \gamma u'_y = 0,$$

que nous obtenons en éliminant ψ entre (14) et (15).

Or le premier membre de cette équation (16) est identiquement le polynome U . Nous arrivons donc à ce résultat inadmissible que notre droite $x = x_0$, laquelle est tout à fait arbitraire, ferait partie de la courbe $U = 0$. Il faut donc rejeter l'hypothèse de l'existence d'une courbe d'un degré inférieur à $2(m - 1)$ qui passerait par les $m^2 - 1$ points d'intersection, autres que l'origine des coordonnées, des courbes U et V , sans passer en même temps par ladite origine des coordonnées.

De là ce théorème : *Il est impossible de faire passer une courbe de degré inférieur à $2(m - 1)$ par tous les points d'intersection sauf un de deux courbes du degré m .*

La théorie que nous venons d'exposer peut être généralisée en attribuant aux polynomes U et V deux degrés différents m et n ; le polynome auxiliaire W est alors du degré $m + n - 2$. On trouve ainsi *qu'il est impossible de faire passer une courbe d'un degré inférieur à $(m + n - 2)$ par tous les points d'intersection sauf un de deux courbes des degrés m et n .* Et l'équation générale des courbes de ce degré satisfaisant à la condition indiquée est

$$U\varphi + V\psi + W = 0,$$

φ et ψ désignant des polynomes dont les degrés respectifs sont $(n - 2)$ et $(m - 2)$.

SUR UNE FAMILLE DÉNOMBRABLE DE SURFACES HYPERELLIPTIQUES DU QUATRIÈME ORDRE;

PAR M. L. REMY.

L'objet de cette Note est de définir et de caractériser une famille de surfaces hyperelliptiques du quatrième ordre à quinze points doubles. Cette famille comprend une infinité *dénombrable* de surfaces, dépendant chacune de trois modules, et elle se trouve liée à certaines équations arithmétiques du type de Pell.

On pourrait définir par le même procédé des familles de surfaces hyperelliptiques du quatrième ordre à un nombre moindre

de points doubles, également liées à des équations arithmétiques. Mais il suffira d'étudier le cas des surfaces à quinze points doubles qui présente le moins de complexité, pour mettre en évidence le caractère *arithmétique* du problème de la recherche des surfaces hyperelliptiques du quatrième ordre.

I.

1. Pour définir cette famille, considérons les fonctions θ de deux variables u, v , répondant au tableau de périodes ⁽¹⁾

$$(T_{\Delta}) \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{\Delta} & 0 & G & H \\ 0 & 1 & H & G' \end{vmatrix}$$

d'ordre $2n$, de caractéristique nulle, paires, et admettant le point $u=0, v=0$ pour zéro d'ordre $4p$.

En égalant les coordonnées homogènes d'un point $x_1, \dots, x_4$ à quatre de ces fonctions $\theta_1, \dots, \theta_4$, supposées linéairement distinctes, on obtient une surface algébrique telle qu'entre les points de cette surface et les couples de points d'une courbe de genre deux, il existe une correspondance $(1, \Delta)$.

La surface possède quinze points doubles correspondant aux demi-périodes autres que $u=0, v=0$. Son degré est égal à la moitié ⁽²⁾ du nombre des zéros communs à deux des fonctions considérées θ , non compris le point $u=0, v=0$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}(2\Delta \times 2n \times 2n - 4p \times 4p)$. Pour que la surface soit du quatrième ordre, il faut donc que les entiers Δ, n, p vérifient la relation

$$(E) \quad \Delta n^2 - 2p^2 = 1.$$

Dans ce cas il existe effectivement quatre fonctions θ linéairement distinctes.

⁽¹⁾ Ces fonctions ont été étudiées systématiquement par M. Traynard. Leur théorie était d'ailleurs implicitement contenue dans les travaux de M. Humbert, ainsi que nous l'avons montré (*Comptes rendus*, 26 mars 1905).

⁽²⁾ En effet, aux valeurs (u, v) et $(-u, -v)$ correspond un même point de la surface.

2. Inversement, étant donné un système d'entiers Δ, n, p , satisfaisant à la condition (E), peut-on lui faire correspondre une surface hyperelliptique du quatrième ordre à quinze points doubles Σ ? Il n'en est pas toujours ainsi, comme le montre l'exemple suivant : soit le système

$$\Delta = 1, \quad n = 17, \quad p = 12.$$

On peut mettre les quatre fonctions Θ_i correspondantes sous la forme

$$x_i = \theta_i(u, v) [F(u, v)]^3 \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

en désignant par $\theta_1, \dots, \theta_4$ les quatre fonctions thêta d'ordre *deux*, de caractéristique nulle, paires et par $F(u, v)$ la fonction thêta d'ordre *quatre*, de caractéristique nulle, paire et admettant le point $u = 0, v = 0$ comme zéro d'ordre *six*. Après suppression du facteur commun $[F(u, v)]^3$, on retrouve la représentation classique de la surface de Kummer.

Ainsi, lorsque les quatre fonctions Θ_i possèdent un facteur commun, la surface définie par les équations $x_i = \Theta_i(u, v)$ n'est pas nécessairement une surface du quatrième ordre à quinze points doubles; et, au cas où il en serait ainsi, la surface correspondrait en réalité, non pas au système d'entiers Δ, n, p , mais à un système Δ, n', p' ($n' < n$ et $p' < p$).

3. Il importe donc de reconnaître *a priori* si les fonctions Θ_i possèdent un facteur commun. A cet effet considérons une fonction $\theta(u, v)$ quelconque répondant au tableau (T_Δ) , d'ordre v , inférieur à $2n$, s'annulant à l'ordre ρ au point $u = 0, v = 0$, et formons l'expression

$$D(v, \rho) = \Delta n v - \rho \rho,$$

qui, en général, représente la moitié du degré de la courbe $\theta(u, v) = 0$ sur la surface définie par les équations $x_i = \Theta_i(u, v)$.

Dans certains cas cette formule peut donner pour D une valeur négative ou nulle. En premier lieu, si D est négatif, les fonctions $\theta(u, v)$ et $\Theta_i(u, v)$ possèdent plus de $4nv\Delta$ et, par suite, une infinité de zéros communs. Donc les quatre fonctions $\Theta_i(u, v)$ sont divisibles par $\theta(u, v)$.

Supposons en second lieu que $D = 0$ et posons

$$X_1 = x_1 + \lambda_1 x_4,$$

$$X_2 = x_2 + \lambda_2 x_4,$$

$$X_3 = x_3 + \lambda_3 x_4,$$

$$X_4 = x_4$$

on peut déterminer les constantes λ de manière que les fonctions X_1, X_2, X_3 possèdent $(4n\Delta + 1)$ zéros communs avec la fonction $\theta(u, v)$ et par suite renferment $\theta(u, v)$ en facteur. Dès lors l'équation $\theta(u, v) = 0$ représente sur la surface non pas une courbe mais un point singulier $X_1 = X_2 = X_3 = 0$, et la surface a plus de quinze points doubles.

En résumé, pour qu'il corresponde aux entiers Δ, n, p une surface du quatrième ordre à quinze points doubles, il est *nécessaire* qu'il n'existe aucune fonction $\theta(u, v)$ pour laquelle l'expression $D(v, \rho)$ soit nulle ou négative.

4. Cette condition est *suffisante* : pour le prouver, il suffit d'établir que, si les fonctions $\Theta_i(u, v)$ ont un facteur commun $F(u, v)$, en sorte que

$$x_i = \Phi_i(u, v) F(u, v),$$

l'expression $D(v, \rho)$ correspondant à la fonction $F(u, v)$ est nécessairement nulle ou négative.

Les fonctions F et Φ_i sont de même parité, de même caractéristique, et leurs ordres sont de même parité. Pour fixer les idées, nous les supposerons d'ordre pair, de caractéristique nulle, et paires; la démonstration serait analogue dans les autres cas.

Désignons par $2v$ l'ordre de F , par 2ρ l'ordre de multiplicité du zéro $u = 0, v = 0$, et enfin par $2v', 2\rho'$ les quantités analogues pour les fonctions Φ_i . En vertu des relations

$$n = v + v',$$

$$2p = \rho + \rho',$$

l'équation fondamentale

$$\Delta n^2 - 2p^2 = 1$$

peut se mettre sous la forme

$$[(2\Delta v^2 + 2 - \rho'^2) - 4] + (2\Delta v' - \rho\rho') + (2\Delta n v - 2p\rho) = 0.$$

Le premier terme est positif ou nul, car l'expression

$$(2\Delta v^2 + 2 - \rho'^2)$$

représente le nombre des fonctions thêta d'ordre $2v'$, de caractéristique nulle, paires, s'annulant à l'ordre $2\rho'$ pour $u = 0$, $v = 0$, et il y en a au moins quatre linéairement distinctes, à savoir $\Phi_1, \dots, \Phi_4$. Le second terme ne peut être négatif, car dans ce cas les fonctions F et Φ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) auraient plus de $2\Delta \times 2v \times 2v'$ zéros communs et par suite posséderaient un facteur commun. Dès lors le troisième terme est négatif ou nul : or c'est précisément $D(2v, 2\rho)$.

5. La condition précédente peut s'exprimer par un système de deux inégalités entre les entiers indéterminés v et ρ . En effet, considérons d'abord les fonctions thêta d'ordre pair $2v$, de caractéristique nulle, et paires : elles sont au nombre de $(2\Delta v^2 + 2)$ linéairement distinctes, et pour que l'on puisse en former une dont le développement de Mac Laurin au point $u = 0$, $v = 0$ commence par des termes d'ordre 2ρ , il faut que

$$2\Delta v^2 + 2 - \rho^2 \geq 1.$$

L'existence d'une surface Σ correspondant aux entiers Δ , n , p est donc subordonnée à l'impossibilité de la résolution en nombres entiers v , ρ du système d'inégalités

$$(I) \quad \begin{cases} \rho^2 - 2\Delta v^2 \leq 1, \\ \Delta n v \leq p\rho. \end{cases}$$

On obtient des systèmes analogues en considérant des fonctions thêta paires ou impaires et de caractéristique quelconque. La discussion n'offre pas de difficultés et montre que chacun de ces systèmes entraîne nécessairement le système (I).

Le problème se trouve donc ramené à la discussion de ce *seul* système d'inégalités.

6. Or la seconde inégalité du système (I) peut s'écrire

$$(\Delta n^2)(\Delta v^2) \leq p^2 \rho^2,$$

c'est-à-dire, en vertu de l'équation (E),

$$(1 + 2p^2)(\Delta v^2) \leq p^2 \rho^2$$

ou encore

$$\rho^2 - 2\Delta v^2 \geq \frac{\Delta v^2}{p^2},$$

ce qui exige, puisque ρ et v sont entiers,

$$\rho^2 - 2\Delta v^2 \geq 1.$$

La comparaison de cette inégalité avec la première du système (I) prouve que l'on doit avoir nécessairement l'égalité

$$(E') \quad \rho^2 - 2\Delta v^2 = 1.$$

Ainsi les entiers ρ , v vérifient l'équation de Pell (E'); et le système (I) sera impossible à résoudre si l'on a, pour toute solution ρ_k , v_k de cette équation,

$$\Delta n v_k > p \rho_k.$$

Or, d'après l'équation (E'), le rapport $\frac{v_k}{\rho_k}$ croît avec le rang k de la solution v_k , ρ_k ; l'inégalité précédente sera donc vérifiée pour toute valeur de k si elle l'est pour $k = 1$.

Voici donc quelle est la conclusion de l'analyse précédente :

Pour qu'il corresponde une surface Σ aux entiers Δ , n , p , supposés liés par la relation (E), il faut et il suffit que la plus petite solution ρ_1 , v_1 de l'équation de Pell (E') vérifie l'inégalité

$$(I') \quad \Delta n v_1 > p \rho_1.$$

II.

7. Les équations (E) et (E') se trouvent liées très simplement l'une à l'autre : les deux formes

$$\Delta X^2 - 2Y^2$$

et

$$x^2 - 2\Delta y^2$$

ont même discriminant; de plus, sous l'hypothèse que la forme $\Delta X^2 - 2Y^2$ peut représenter le nombre 1 (ce qui est le cas dans le problème actuel), ces deux formes sont équivalentes. Si l'on désigne en effet par n_1, p_1 une solution quelconque de l'équation

$$\Delta n^2 - 2p^2 = 1,$$

la substitution modulaire

$$(S) \quad \begin{cases} x = \Delta n_1 X + 2p_1 Y, \\ y = p_1 X + n_1 Y \end{cases}$$

fait passer d'une forme à l'autre.

Nous supposons désormais que dans ces formules n_1, p_1 désignent, non plus une solution quelconque, mais celle formée par les plus petits entiers *non négatifs*. Il est aisé de démontrer que, sous cette hypothèse, on obtient *toutes les solutions positives* x, y de l'équation (E') en remplaçant dans les formules (S) X, Y par toutes les solutions positives de l'équation (E) : il suffit, pour le prouver, de vérifier que les formules (S) ne peuvent donner pour x et y deux valeurs positives si X et Y ne sont pas tous deux positifs.

8. Il convient d'examiner à part le cas où p_1 serait nul, ce qui exige que

$$\Delta = 1;$$

dans ce cas les surfaces Σ correspondantes seraient représentables sur la surface de Kummer. Mais, en fait, il n'en existe pas, car à la solution

$$n_1 = 1, \quad p_1 = 0$$

correspond la représentation classique de la surface de Kummer et aucune autre solution n, p de l'équation (E) ne satisfait à l'inégalité (I').

Ce cas étant écarté, on peut démontrer qu'à la plus petite solution n_1, p_1 de l'équation (E) correspond certainement une surface Σ . En effet, la plus petite solution $x = p_1, y = n_1$ de l'équation

(E') s'exprime en fonction de n_1 et p_1 par les formules (S), d'où

$$p_1 = 4p_1^2 + 1,$$

$$v_1 = 2p_1 n_1.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'inégalité (I') elle devient

$$p_1 \bar{z} 0,$$

condition qui ne pourrait être satisfaite que dans le cas précédemment exclu où $p_1 = 0$.

Au contraire, si l'on considère la deuxième solution n_2, p_2 de l'équation (E), solution qui se calcule de suite par la résolution de l'équation de Pell (E') et par les relations (S), on reconnaît qu'elle ne vérifie pas l'inégalité (I'). Il en est de même *a fortiori* pour toutes les autres solutions de l'équation (E), puisque le rapport $\frac{p}{n}$ croît avec le rang de la solution n, p .

Il ne correspond donc de surface Σ qu'à la plus petite solution n_1, p_1 .

Nous parvenons ainsi au résultat suivant :

Il existe une famille dénombrable de surfaces hyperelliptiques du quatrième ordre Σ_Δ définies de la manière suivante : soit Δ un entier quelconque (sauf $\Delta = 1$) tel que la forme $\Delta X^2 - 2Y^2$ puisse représenter le nombre 1, et soit n, p la plus petite solution de l'équation

$$\Delta n^2 - 2p^2 = 1;$$

les coordonnées homogènes d'un point de la surface Σ_Δ sont proportionnelles à quatre fonctions thêta répondant au tableau de périodes (T_Δ) , d'ordre $2n$, de caractéristique nulle, paires et admettant le point $u = 0, v = 0$ pour zéro d'ordre $4p$.

Nous établirons un peu plus loin que ces surfaces sont effectivement toutes distinctes, ce qui n'est pas évident *a priori*; car à des représentations paramétriques distinctes pourrait correspondre une même surface.

III.

9. La surface générale du quatrième ordre à quinze points doubles dépend projectivement de *quatre* paramètres, alors qu'une surface hyperelliptique ne dépend que de *trois* modules : chacune des surfaces Σ_{Δ} doit donc être caractérisée par *une* condition.

A cet effet considérons l'unicursale singulière C_0 qui correspond sur la surface Σ_{Δ} à la demi-période $u = 0$, $v = 0$ annulant les quatre fonctions coordonnées $x_1, \dots, x_4$. Cette courbe est de degré $4p$, puisque les développements de Mac Laurin des fonctions x_1, x_2, x_3, x_4 autour du point $u = 0$, $v = 0$ sont supposés commencer par des termes de degrés $4p$; elle ne passe d'ailleurs par aucun des points doubles de la surface.

L'existence de cette unicursale entraîne une condition

$$f_p(a, b, c, d) = 0$$

entre les quatre paramètres a, b, c, d dont dépend la surface générale du quatrième ordre à quinze points doubles.

10. Pour former cette condition, nous ramènerons la question à un problème de Géométrie plane en projetant la surface à partir d'un de ses points doubles O : le contour apparent en projection se compose de quatre droites $\Delta_1, \dots, \Delta_4$ et d'une conique C , telles qu'il existe une conique Γ bitangente à C et tangente aux quatre droites Δ ⁽¹⁾. Inversement, à une telle figure plane correspond une surface du quatrième ordre à quinze points doubles

Si la surface possède une unicursale C_0 de degré $4p$ ne passant par aucun point double, il existe, en projection, une unicursale C'_0 de même degré, inscrite au contour apparent; de là résulte une condition, car cette unicursale est assujettie à $12p$ conditions de contact, alors qu'elle ne dépend que de $12p - 1$ paramètres.

Cette méthode permet donc, par un nombre fini d'opérations algébriques, de former une équation algébrique $F_p(a, b, c, d) = 0$ à laquelle satisfait toute surface du quatrième ordre à quinze

⁽¹⁾ Cette conique Γ correspond au cône des tangentes à la surface au centre de projection O .

points doubles qui possède une unicursale d'ordre $4p$ ne passant par aucun point double. Il en résulte que le polynôme $f_p(a, b, c, d)$ est divisible par $f_p(a, b, c, d)$.

Mais l'équation $F_p = 0$ peut renfermer des facteurs étrangers : ainsi cette circonstance se présente dans le cas où le cône qui projette l'unicursale C'_0 à partir du point double O coupe la surface suivant deux courbes unicursales qui passent toutes deux par le centre de projection O . En fait, la présence de ces facteurs étrangers dans l'équation $F_p = 0$ rendrait très difficile la formation effective de l'équation $f_p = 0$.

Nous nous bornerons à donner une application de cette méthode au cas où $p = 1$.

IV.

11. Dans le cas où $p = 1$ la relation fondamentale

$$\Delta n^2 - 2p^2 = 1$$

exige

$$\Delta = 3 \quad \text{et} \quad n = 1.$$

La surface correspondante Σ_3 est caractérisée par l'existence d'une quartique de deuxième espèce C_0 ne passant par aucun point double.

Elle possède d'ailleurs une deuxième quartique analogue C_1 qui est son intersection résiduelle par la quadrique menée par la quartique C_0 .

D'après la méthode du paragraphe III, pour former l'équation F_1 , on doit déterminer dans le plan quatre droites $\Delta_1, \dots, \Delta_4$ et une conique C jouissant des deux propriétés suivantes : d'une part, il existe une conique Γ inscrite au quadrilatère $\Delta_1, \dots, \Delta_4$ et bitangente à C ; d'autre part, il existe une quartique unicursale C'_0 bitangente à chacune des quatre droites et quadritangente à C .

A priori, ce problème se décompose et par suite l'équation

$$F_1(a, b, c, d) = 0$$

est réductible. En effet une quartique unicursale C'_0 possède quatre familles de coniques quadritangentes : l'une de ces familles ne comprend aucun couple de bitangentes, alors que chacune des

trois autres familles en comprend deux (à savoir les couples Δ_1, Δ_2 et Δ_3, Δ_4 ; Δ_1, Δ_3 et Δ_2, Δ_4 ; Δ_1, Δ_4 et Δ_2, Δ_3). De là quatre problèmes distincts, suivant que la conique C est supposée appartenir à l'une ou l'autre des familles de coniques quadritangentes à C'_0 .

Il serait facile de reconnaître que les trois dernières familles sont étrangères au problème actuel. Mais il est préférable pour former l'équation $f_1 = 0$ de partir d'une autre propriété de la surface Σ_2 qui conduit à une équation irréductible.

12. A cet effet considérons les fonctions thêta impaires, du premier ordre, répondant à une caractéristique impaire et au tableau de périodes (T_3) . Elles définissent sur la surface une famille linéaire de biquadratiques passant par cinq points doubles. Étant donné un autre point double O de la surface, il existe une biquadratique de la famille passant par O, et elle y présente un point double. Elle est donc projetée de ce point suivant un cône du second ordre γ . On reconnaît aisément que ce cône contient les arêtes du trièdre formé par trois des plans tangents singuliers passant par O, ainsi que les deux points doubles de la surface situés en dehors de ces plans; de plus il est tangent à la surface.

De là résulte la propriété suivante en projection :

Les droites Δ et la conique C formant le contour apparent sont telles qu'il existe une conique γ circonscrite au triangle $\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3$, passant par les points d'intersection de Δ_4 avec C et tangentes à C en un autre point ⁽¹⁾.

13. Cette condition peut se traduire analytiquement de la manière suivante : prenons les droites $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ pour triangle de référence $x = 0, y = 0, z = 0$ et soit

$$\Gamma(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx = 0$$

l'équation de la conique Γ qui correspond au cône des tangentes au centre de projection.

La droite Δ_4 qui doit être tangente à cette conique a pour équation

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 0,$$

⁽¹⁾ Cette méthode appartient pour le fond à M. Humbert (*Comptes rendus*, 2^e semestre 1899).

avec la condition

$$(1) \quad \alpha + \beta + \gamma = 0.$$

Enfin la conique C de contour apparent a une équation de la forme

$$C(x, y, z) = \Gamma(x, y, z) + (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 = 0.$$

Il est aisé de former l'équation de la conique γ , qui est la suivante :

$$C(x, y, z) - \left(\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} \right) [\alpha(\alpha^2 + 1)x + \beta(b^2 + 1)y + \gamma(c^2 + 1)z] = 0,$$

et il suffit dès lors d'exprimer que cette conique est tangente à C, ou encore que la droite

$$\alpha(\alpha^2 + 1)x + \beta(b^2 + 1)y + \gamma(c^2 + 1)z = 0$$

est tangente à C.

Après suppression du facteur étranger ⁽¹⁾

$$(ab + bc + ca - 1),$$

on obtient l'équation suivante,

$$(C) \quad A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + 2A'\beta\gamma + 2B'\gamma\alpha + 2C'\alpha\beta = 0,$$

en posant

$$\begin{aligned} A &= (\alpha^2 + 1)(ab + ac - bc + 1), \\ &\dots\dots\dots, \\ A' &= (b^2 + 1)(c^2 + 1), \\ &\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

les coefficients B, C se déduisant de A par permutation circulaire et de même B', C' de A'.

Si l'on pose $\beta = 1$ et $\gamma = -(\alpha + 1)$, de manière à satisfaire à la relation (1), l'équation (C) est du second degré par rapport à α . Elle est irréductible, car son discriminant n'est pas carré parfait (ce dont on s'assure en faisant par exemple $b = 0$, $c = 0$). En définitive, on peut considérer α, b, c, α comme les paramètres définissant une surface du quatrième ordre à quinze points doubles et l'équation (C) n'est autre que l'équation désignée plus haut par $f_1 = 0$.

(1) Si ce facteur était nul, la conique C se décomposerait en deux droites.

14. Énonçons en terminant quelques propriétés géométriques relatives à la surface particulière Σ_3 :

Soit une surface du quatrième ordre à quinze points doubles; on considère trois plans tangents singuliers P_1, P_2, P_3 menés par un point double O et le cône du second ordre γ , de sommet O , circonscrit au trièdre $P_1P_2P_3$ et passant par les deux points doubles de la surface situés en dehors des plans P_1, P_2, P_3 (on peut définir soixante cônes analogues).

Si la surface est tangente à l'un des cônes γ :

1° *Elle est hyperelliptique* ⁽¹⁾;

2° *Elle est tangente aux cinquante-neuf autres cônes γ ;*

3° *Elle est tangente à chacune des dix quadriques passant par les neuf points situés en dehors d'un plan tangent singulier et la coupe suivant deux quartiques de deuxième espèce;*

4° *Il existe une quadrique tangente en dix points à la surface, ne passant par aucun point double et la coupant suivant deux quartiques de deuxième espèce.*

V.

15. Pour aborder le cas général, il est nécessaire d'étudier sur la surface Σ_Δ correspondant aux entiers Δ, n_1, p_1 la famille des courbes unicursales C sans points multiples et ne passant par aucun point double de la surface.

En dehors de l'unicursale singulière C_0 , toute courbe algébrique de la surface Σ_Δ s'obtient en égalant à zéro une fonction $\theta(u, v)$ répondant au tableau de périodes (T_Δ) , paire ou impaire ⁽²⁾. Si la courbe ne passe par aucun point double de la sur-

⁽¹⁾ Pour pouvoir énoncer ce théorème, il était nécessaire de vérifier que la condition (C) est *indécomposable*.

⁽²⁾ Nous supposons ici que les périodes g, h, g' ne sont pas singulières, c'est-à-dire ne satisfont pas à une relation de la forme

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0,$$

à coefficients entiers.

face, cette fonction est nécessairement d'ordre 2ν , de caractéristique nulle et paire; elle peut d'ailleurs s'annuler pour la demi-période $u = 0$, $\nu = 0$, soit 2ρ l'ordre de multiplicité de ce zéro. Le genre de la courbe $\theta(u, \nu) = 0$, supposée sans point multiple, est égal à

$$2\Delta\nu^2 + 1 - \rho^2.$$

De là résulte que la surface possède une infinité d'unicursales C_k liées aux solutions de l'équation de Pell

$$(E') \quad \rho^2 - 2\Delta\nu^2 = 1,$$

que nous avons déjà rencontrée.

Le degré de la courbe C_k qui correspond à la $k^{\text{ième}}$ solution de l'équation de Pell a pour expression

$$4(\Delta n_1 \nu_k - p_1 \rho_k).$$

Cette valeur s'exprime plus simplement en fonction de la $k^{\text{ième}}$ solution de l'équation fondamentale

$$(E) \quad \Delta n^2 - 2p^2 = 1.$$

En effet les formules de la substitution S résolues par rapport à n_k et p_k donnent

$$\begin{aligned} n_k &= n_1 \rho_k - 2p_1 \nu_k, \\ p_k &= -p_1 \rho_k + \Delta n_1 \nu_k. \end{aligned}$$

Le degré de la courbe C_k est donc $4p_k$. Il croît avec l'indice; la courbe de degré minimum C_1 est de degré $4p_1$, de même que l'unicursale singulière C_0 .

L'entier $4p_1$ a donc une signification géométrique simple: il représente le degré minimum des unicursales C de la surface.

De là résulte que deux surfaces Σ_Δ , $\Sigma_{\Delta'}$ correspondant à deux entiers p_1 , p'_1 différents sont distinctes. Ce raisonnement tombe en défaut lorsque $p_1 = p'_1$, en sorte que

$$2p_1^2 + 1 = \Delta n_1^2 = \Delta' n_1'^2,$$

car les unicursales C_k et C'_k appartenant à ces deux surfaces et de

même indice sont de même degré. Dans ce cas, on s'assure que les surfaces sont distinctes par la considération d'une autre famille de courbes : par exemple la famille linéaire définie par les fonctions thêta d'ordre *deux*, de caractéristique nulle, et paires.

Nous énoncerons enfin le théorème suivant relatif aux unicursales C , et qui se déduit aisément de leur équation hyperelliptique :

Les courbes C_0 et C_1 forment l'intersection complète de la surface Σ par une surface algébrique d'ordre $2p_1$; plus généralement on peut faire passer par la courbe C_k une surface algébrique ayant avec la surface Σ un contact d'ordre $\left(\frac{n_k}{n_1} - 1\right)$ le long de l'unicursale singulière C_0 , et ne la coupant pas en dehors des courbes C_0 et C_k .

VI.

16. Les considérations précédentes permettent d'établir un lien entre l'équation $\Delta n^2 - 2p^2 = 1$ et l'équation algébrique

$$f_p(a, b, c, d) = 0,$$

qui exprime que la surface du quatrième ordre à quinze points doubles de paramètres a, b, c, d possède une unicursale d'ordre $4p$ (sans points multiples et ne passant par aucun point double de la surface).

Soit p un entier quelconque : décomposons le nombre $2p^2 + 1$ de toutes les manières possibles en un produit de deux facteurs dont l'un soit carré parfait,

$$2p^2 + 1 = \Delta n^2 = \Delta' n'^2 = \dots,$$

et considérons les surfaces hyperelliptiques $\Sigma_\Delta, \Sigma_{\Delta'}, \dots$

Remarquons tout d'abord que, dans le cas où $2p^2 + 1$ est carré parfait, on ne doit pas considérer la décomposition $\Delta = 1$, $n = \sqrt{2p^2 + 1}$, à laquelle ne correspond pas de surface. Au contraire, on doit considérer la décomposition $\Delta = 2p^2 + 1$, $n = 1$, à laquelle correspond la surface Σ_{2p^2+1} .

Ceci posé, nous distinguerons les décompositions en deux

classes, suivant que n et p forment ou non la *plus petite solution* de l'équation $\Delta n^2 - 2p^2 = 1$.

Dans ce dernier cas, soit k le rang de la solution n, p , et soit n_1, p_1 la plus petite solution. D'après les résultats du paragraphe V, la surface Σ_Δ qui correspond aux entiers Δ, n_1, p_1 possède une unicursale C de degré $4p$, à savoir celle d'indice k . L'équation $f_p(a, b, c, d) = 0$ renfermera donc en facteur le premier membre de l'équation $f_{p_1} = 0$, qui caractérise la surface Σ_Δ .

Supposons que l'on ait formé toutes les équations $f_1 = 0, f_2 = 0, \dots$, jusqu'à $f_{p-1} = 0$. Parmi les polynômes $f_\pi (\pi < p)$, on peut prévoir *a priori* ceux qui contiendra en facteur l'équation $f_p = 0$ et, par des opérations rationnelles, on débarrassera l'équation $f_p = 0$ de ces facteurs.

Il reste donc à étudier les décompositions Δn^2 de la première classe. A chacune d'elles correspond une surface Σ_Δ possédant deux unicursales C_0, C_1 d'ordre $4p$ et n'en possédant pas de degré moindre. L'équation $f_p(a, b, c, d) = 0$ proprement dite se décomposera donc en autant d'équations qu'il y a de décompositions Δn^2 de première classe.

17. Voici deux remarques qui permettront dans la plupart des cas de reconnaître de suite à quelle classe appartient une décomposition donnée $2p^2 + 1 = \Delta n^2$.

La deuxième solution n_2, p_2 de l'équation (E) se calcule aisément en fonction de n_1, p_1 par les formules S :

$$\begin{aligned} n_2 &= n_1(8p_1^2 + 1), \\ p_2 &= p_1(8p_1^2 + 3). \end{aligned}$$

Dès lors p_2 ne peut être un nombre premier que si $p_1 = 1$, et d'ailleurs il en serait de même de tous les nombres p_k qui contiennent p_1 en facteur : donc, si p est un nombre premier différent de onze, toutes les décompositions Δn^2 seront de la première classe.

D'autre part n_2 peut se mettre sous la forme

$$n_2 = n_1(4\Delta n_1^2 - 3);$$

or

$$n_1 \geq 1;$$

donc, si k est différent de 1,

$$n_k \geq 4\Delta - 3.$$

Dès lors, si $n < 4\Delta - 3$, on est assuré que n , p est la plus petite solution de l'équation (E), c'est-à-dire que la décomposition Δn^2 est de première classe.

18. Il résulte de l'étude que nous avons faite des unicursales C tracées sur la surface Σ_Δ qu'il n'existe pas d'autre surface de la famille étudiée qui possède une unicursale d'ordre $4p$ (sans points multiples et ne passant par aucun point double) en dehors de celles que nous venons de considérer. Mais l'analyse précédente ne prouve pas que l'équation $f_p = 0$ ne renferme pas d'autres facteurs étrangers correspondant par exemple à des surfaces qui ne seraient pas hyperelliptiques.

Quoi qu'il en soit, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Il existe autant de types de surfaces hyperelliptiques du quatrième ordre à quinze points doubles possédant une unicursale d'ordre $4p$ (sans points multiples et ne passant par aucun point double) que le nombre $2p^2 + 1$ admet de diviseurs carrés. Dans cet énoncé on doit comprendre le diviseur 1, mais non le diviseur $\sqrt{2p^2 + 1}$ au cas où $2p^2 + 1$ est un carré.

Sous une autre forme :

L'équation algébrique qui exprime qu'une surface du quatrième ordre à quinze points doubles possède une unicursale d'ordre $4p$ se décompose en autant de facteurs, au moins, que le nombre $2p^2 + 1$ possède de diviseurs carrés (y compris 1 et non compris $\sqrt{2p^2 + 1}$).

**SUR LES SURFACES DU TROISIÈME ET DU QUATRIÈME ORDRE
QUI ADMETTENT POUR LIGNE ASYMPTOTIQUE
UNE COURBE DE QUATRIÈME ORDRE ET DE QUATRIÈME CLASSE;**

PAR M. CH. BIOCHE.

1. La détermination du nombre des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface contienne une courbe donnée est dans le cas général un problème délicat. Il en est de même, évidemment, de la détermination du nombre des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une courbe soit ligne asymptotique, ou, autrement dit, ait, à la fois, ses points sur la surface et ses plans osculateurs tangents à la surface. Cependant, on peut traiter facilement le problème dans quelques cas simples ⁽¹⁾; il m'a semblé que les résultats obtenus dans des cas particuliers d'un problème généralement difficile pouvaient présenter quelque intérêt.

Je considère ici le cas où la courbe est de quatrième ordre et de quatrième classe. Je rappellerai qu'il y a deux sortes de courbes à distinguer ⁽²⁾; les unes sont les transformées homographiques de la biquadratique

$$\frac{X}{\lambda^4} = \frac{Y}{\lambda^3} = \frac{Z}{\lambda} = \frac{T}{1},$$

dont le plan osculateur a pour équation

$$X - 6\lambda^2 Y + 8\lambda^3 Z - 3\lambda^4 T = 0;$$

les autres sont les transformées homographiques de la quartique à sécantes triples

$$\frac{X}{\lambda^4} = \frac{Y}{\lambda^3} = \frac{Z}{\lambda} = \frac{T}{1},$$

dont le plan osculateur a pour équation

$$X - 2\lambda Y + 2\lambda^2 Z - \lambda^4 T = 0.$$

2. Surfaces du troisième ordre ayant pour ligne asymptotique

⁽¹⁾ J'ai déjà étudié le cas où la courbe donnée est une cubique gauche dans deux Mémoires (*Bull. Soc. math.*, t. XXVI, 1898 et t. XXVII, 1899).

⁽²⁾ Voir *Bull. Soc. math.*, t. XXXIII, 1905, p. 18.

tique une biquadratique de quatrième classe. — Il est facile de voir que les points d'intersection d'une biquadratique avec une surface algébrique d'ordre quelconque ne sont pas *indépendants*. En particulier, toutes les surfaces du troisième ordre qui passent par 11 points d'une pareille courbe ont en commun un 12^e point, l'équation qui donne les λ des points d'intersection n'ayant pas de terme du onzième degré.

Il suffit donc d'écrire que la surface passe par un point indépendant des 11 premiers pour qu'elle contienne 13 points, et, par suite, tous les points de la courbe. On a donc, dans l'équation générale des surfaces du troisième ordre qui contiennent la courbe, 12 paramètres de moins que dans l'équation générale du troisième ordre. Il est facile de vérifier que la première équation peut s'écrire

$$F(X, Y, Z, T) = (Y^2 - XT)(AX + BY + CZ + DT) \\ + (Z^2 - YT)(A'X + B'Y + C'Z + D'T) = 0.$$

Pour exprimer que le plan osculateur à la biquadratique est tangent à la surface il suffit, comme ce plan contient déjà la tangente à la courbe, d'écrire qu'il coupe une arête du tétraèdre de référence au même point que le plan osculateur, on a ainsi l'équation

$$\frac{F'_x(\lambda^4, \lambda^3, \lambda, 1)}{1} = - \frac{F'_y(\lambda^4, \lambda^3, \lambda, 1)}{6\lambda^2}.$$

Cette équation est du sixième degré en λ . Donc il y a 6 plans osculateurs qui touchent la surface en leurs points de contact avec la courbe; l'équation n'ayant pas de terme en λ^5 ces points ne sont pas indépendants; il y a donc 6 conditions seulement à exprimer pour que la courbe soit ligne asymptotique; on obtient alors, comme équation générale des surfaces cherchées,

$$\alpha(Y^3 + XYT - 4XZ^2) + \beta(4YZ^2 - 5Y^2T + XT^2) = 0.$$

On a en évidence dans cette équation deux surfaces du quatrième ordre, qui se conservent par toute transformation homographique conservant la biquadratique. Ces surfaces se coupent suivant la biquadratique, le long de laquelle elles se touchent et suivant la droite $X = Y = 0$.

3. *Surfaces du quatrième ordre ayant pour asymptotique une biquadratique de quatrième classe.* — Il suffit de 16 conditions pour que la surface du quatrième ordre contienne une biquadratique de quatrième classe; il reste alors, dans l'équation d'une pareille surface, 19 termes et l'on peut l'écrire

$$\begin{aligned} &[(Z^2 - YT)(AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + 2BYZ + 2B'ZX \\ &\quad + 2B''XY + 2CXT + 2C'YT + 2C''ZT + DT^2) \\ &\quad + (Y^2 - XT)[A_1X^2 + A'_1Y^2 + 2B_1YZ + 2B'_1ZX \\ &\quad + 2B''_1XY + 2C_1XT + 2C'_1YT + 2C''_1ZT + D_1T^2] = 0. \end{aligned}$$

On a en évidence, dans cette équation, outre les premiers membres des équations de deux quadriques simples contenant la biquadratique, ceux qui correspondent à deux autres quadriques, les premiers membres des équations de ces dernières contenant l'un 10 termes, l'autre 9 seulement, car on peut ne pas y écrire de terme en Z^2 .

Si l'on forme, en opérant comme précédemment, l'équation qui donne les points où les plans osculateurs sont tangents à la surface, on obtient une équation du 10^e degré. Il y a donc 10 plans osculateurs tangents à la surface; mais, *ces plans n'étant pas indépendants*, il suffit encore de 10 équations de condition pour exprimer que tous les plans sont tangents à la surface. Il reste donc 9 termes seulement dans l'équation que l'on peut écrire, en mettant en évidence les deux surfaces particulières du troisième ordre, obtenues au paragraphe précédent,

$$\begin{aligned} &(Y^2 + 3XYT - 4XZ^2)(AX + BY + CZ + DT) \\ &\quad + (4YZ^2 - 5Y^2T + XT^2)(A'X + B'Y + C'Z + D'T) + K(Z^2 - YT)^2 = 0. \end{aligned}$$

4. *Surfaces du troisième ordre ayant pour ligne asymptotique une quartique à sécantes triples.* — Les points d'intersection d'une telle courbe avec une surface sont *indépendants*; il y a donc 13 équations de condition à écrire pour exprimer qu'une surface du troisième ordre contient la courbe; l'équation de cette surface peut s'écrire

$$\begin{aligned} &A(X^2Z - Y^2) + B(XZ^2 - Y^2T) + C(YT^2 - Z^3) \\ &\quad + (XT - YZ)(\alpha X + \beta Y + \gamma Z + \delta T) = 0; \end{aligned}$$

l'équation qui détermine les points de contact des plans oscula-

teurs tangents à la surface est

$$A\lambda^6 + \alpha\lambda^5 + \beta\lambda^4 + \gamma\lambda^3 + \delta\lambda + C = 0.$$

Il y a donc 6 plans osculateurs tangents à la surface, mais l'équation n'ayant pas de terme en λ^3 ces plans ne sont pas indépendants. Il en résulte qu'il suffit, pour exprimer que la ligne est asymptotique, d'écrire 6 équations de condition. On voit immédiatement que l'équation de la surface est

$$XZ^2 - Y^2T = 0.$$

Il n'y a donc qu'une surface du troisième ordre admettant comme asymptotique une quartique de quatrième classe à sécantes triples, c'est la surface réglée à directrices distinctes. On savait bien qu'une pareille surface avait ses lignes asymptotiques du quatrième ordre et de quatrième classe, avec des sécantes triples; on voit que c'est la seule catégorie de surfaces du troisième ordre admettant une ligne asymptotique de cette nature.

5. *Surfaces du quatrième ordre ayant pour ligne asymptotique une quartique de quatrième classe à sécantes triples.* — On a 17 équations de condition à écrire pour exprimer qu'une surface du quatrième ordre contient la courbe; il reste donc dans l'équation de la surface 18 termes. L'équation qui donne les λ des points où le plan osculateur est tangent à la surface est du dixième degré; cette équation est complète et il n'existe aucune relation entre coefficients de termes de degrés différents, de sorte que *les plans sont indépendants*, tandis qu'il n'en était pas de même dans les autres cas traités déjà. On a alors 11 conditions nouvelles à exprimer pour que la courbe soit asymptotique, et il reste 7 termes dans l'équation qui peut s'écrire :

$$(X^2Z - Y^2T)(AX + BY + CZ + DT) + \alpha(YZ - XT)^2 \\ + \beta(Y^4 - 2X^2YZ + X^3T) + \gamma(Z^4 - 2YZT^2 + XT^3) = 0.$$

On a en évidence dans l'équation une surface particulière se décomposant en un plan et une surface réglée du troisième ordre, un système de deux quartiques confondues, et deux surfaces du quatrième ordre proprement dites.

Les équations de ces dernières se déduisent l'une de l'autre en

remplaçant X, Y, Z, T par T, Z, Y, X . Ce sont des surfaces réglées ayant chacune pour directrice triple la tangente à la ligne asymptotique, en un de ses points d'inflexion linéaire. Les génératrices de chacune de ces surfaces appartiennent à une congruence linéaire ayant ses directrices confondues ⁽¹⁾.

6. *Points doubles des surfaces.* — Les surfaces passant par une courbe algébrique et ayant cette courbe comme asymptotique possèdent des points doubles situés sur la courbe. C'est une propriété générale que j'ai déjà eu occasion de signaler dans le cas où la courbe est une cubique gauche ⁽²⁾.

Il suffit, pour le voir, de remarquer que les dérivées partielles du premier membre de l'équation de la surface, qui sont les coefficients de l'équation du plan tangent, sont proportionnelles aux coefficients de l'équation du plan osculateur. Or le coefficient de X dans cette équation étant 1, le coefficient de proportionnalité est F'_x . Donc on aura des points doubles donnés par

$$F'_x(\lambda^4, \lambda^3, \lambda, 1) = 0$$

dans le cas de la biquadratique, et par

$$F'_x(\lambda^4, \lambda^3, \lambda, 1) = 0$$

dans le cas de l'autre courbe. Il est facile de reconnaître que la première équation est du huitième degré en λ et la seconde du sixième.

On voit ainsi que, bien que les courbes soient du même ordre et de la même classe, les degrés des équations déterminant les points doubles ne sont pas les mêmes.

J'ajouterai que les équations peuvent avoir des racines multiples, et que, par suite, plusieurs points doubles peuvent se confondre. Ce fait se produit sans que l'ordre de multiplicité des points augmente, en général. Ordinairement il y a seulement décomposition du cône des tangentes. Des faits analogues se produisaient quand la ligne asymptotique était une cubique gauche.

⁽¹⁾ Voir *Bull. Soc. math.*, t. XIX, p. 120.

⁽²⁾ Voir *Bull. Soc. math.*, t. XXVI, 1898, p. 226.

SUR LE GROUPE DES ÉQUATIONS TRINOMES;

PAR M. T. LALESCO.

1. Toute équation trinome peut être réduite à la forme

$$(1) \quad x^n - kax + a = 0,$$

où a désigne un paramètre arbitraire et k la constante $n : (n-1)^{\frac{n-1}{n}}$.

Je me propose de démontrer que le groupe de Galois de cette équation, si son degré est premier, *est le groupe symétrique*.

En effet, les seules racines en a de son discriminant sont 0 et 1; si donc on envisage les racines de (1) comme fonctions de a , autour de l'origine elles formeront un seul cycle et autour du point $a=1$ il y en a seulement deux qui se permutent, puisque la dérivée seconde de (1) ne s'annule plus pour $x \neq 0$.

Le groupe de monodromie de (1) est donc d'abord transitif à cause du cycle de n racines; il contient d'ailleurs une transposition provenant de la permutation de deux racines autour du point $a=1$. D'après un théorème bien connu, ce groupe est donc ou imprimitif ou bien identique au groupe symétrique; comme n est premier, la seconde hypothèse est la seule admissible.

Dès lors, le groupe de Galois de l'équation (1), admettant le groupe de monodromie comme sous-groupe invariant, se confondra lui aussi avec le groupe symétrique.

2. D'après un théorème de M. D. Hilbert, il existe *dans ce cas* une infinité de valeurs rationnelles du paramètre a pour lesquelles le groupe de l'équation (1) sera toujours le groupe symétrique. Par conséquent *une équation trinome, en général, sera sans affect*.

Voici d'ailleurs une démonstration très simple de l'important théorème de M. Hilbert, que nous venons de rappeler.

Soit u un élément primitif du corps de l'équation (1) et soient $u_1, u_2, \dots, u_n$ ses valeurs conjuguées; par définition, deux quelconques de ces expressions ne peuvent pas être *identiquement*

égales ⁽¹⁾. Par conséquent, il existera une infinité de valeurs rationnelles du paramètre α telles que les valeurs numériques correspondantes des éléments u_i soient toutes différentes entre elles, ce qui suffit pour démontrer la proposition.

**CONSTRUCTION DES RAYONS DE COURBURE D'UNE CLASSE
DE COURBES ET DE SURFACES;**

PAR M. A. PELLET.

1. Par un point T pris sur la tangente en M à une conique, menons une perpendiculaire sur la polaire de ce point T, et soit N sa rencontre avec la normale en M; par les points T et N, menons des perpendiculaires sur la tangente et la normale et soit τ le point de rencontre de ces perpendiculaires; le lieu du point τ lorsque T se déplace sur la tangente en M est une droite qui passe par le centre de courbure en M, par le pôle de la normale MN, et coupe à angle droit la symétrique du diamètre de la conique qui passe en M. Nous appellerons ce lieu du point τ , pour abrégér, *axe de déviation* de la conique au point M. En un point M d'une courbe quelconque, les coniques ayant un contact du troisième ordre avec la courbe ont même axe de déviation, qui par suite peut être désigné par les mots *axe de déviation de la courbe en M*. En un point de rencontre de deux coniques homofocales, les axes de déviation de deux coniques coïncident. Plus généralement, soit M un point d'une quadrique : le plan tangent en M coupe les deux quadriques homofocales passant en M suivant deux coniques qui ont le même axe de déviation, lequel n'est autre que la polaire de la normale en M à la première quadrique par rapport à cette quadrique. En effet, menons par cette normale un plan quelconque; le lieu des pôles de ce plan par rapport aux quadriques homofocales est une droite qui lui est perpendiculaire, se trouve dans le plan tangent en M et rencontre les normales des qua-

(¹) Elles ne sont donc égales que pour un nombre fini de valeurs de α , racines d'un certain nombre d'équations algébriques en α .

driques homofocales passant par M en deux points d'où l'on déduit un point τ appartenant à la fois aux deux axes de déviation.

2. Soit

$$y = \frac{a}{2} x^2 + \frac{a_1 x^3}{6} + \dots$$

l'équation d'une courbe rapportée à une tangente et la normale correspondante. a_1 est égale à $\frac{da}{ds}$. L'équation du diamètre de la courbe à l'origine est

$$ax + \frac{a'}{3a} y = 0;$$

et celle de l'axe de déviation

$$ay + \frac{a'}{3a} x = 1.$$

La normale à l'axe de déviation menée par l'origine va couper le rayon de courbure de la développée au tiers de sa longueur, comptée à partir du point de contact avec la normale $x = 0, y = \frac{1}{a}$.

Pour une courbe normale,

$$x = \frac{a' y^2}{2} + \frac{a_1' y^3}{6} + \dots,$$

ayant même axe de déviation, on aura

$$aa' = \frac{a'}{3} = \frac{a_1'}{3}.$$

3. Prenons un triangle de référence ABC; et soient X_0, Y_0, Z_0 les coordonnées d'un point M, $AX + BY + CZ = 0$ l'équation d'une droite passant par ce point M, MT.

Les courbes

$$(1) \quad AX_0 \left(\frac{X}{X_0} \right)^m + BY_0 \left(\frac{Y}{Y_0} \right)^m + CZ_0 \left(\frac{Z}{Z_0} \right)^m = 0,$$

$$(2) \quad \left(\frac{X}{X_0} \right)^{Ax_0} \left(\frac{Y}{Y_0} \right)^{By_0} \left(\frac{Z}{Z_0} \right)^{Cz_0} = 1$$

passent par le point M et sont tangentes à MT; rapportons ces courbes à leurs coordonnées normales en M, la droite MT, et la

perpendiculaire menée par M à cette droite, axes des x et des y , il vient

$$y = \frac{(1-m)a}{2} x^2 + \frac{(1-m)(a_1 m + a'_1)}{6} x^3 + \dots;$$

l'équation de la courbe (2) correspond à $m = 0$.

L'axe de déviation de ces courbes au point M a pour équation

$$(1-m)ay + \frac{a_1 m + a'_1}{3a} x = 1.$$

Ainsi, lorsque m varie, l'axe de déviation passe par un point fixe, et, pour construire l'axe de déviation d'une de ces courbes, il suffit de connaître les axes de déviation des courbes correspondant à deux valeurs de m .

Or, pour $m = 2$, l'équation (1) représente une conique conjuguée au triangle ABC. Soient a, b, c les points de rencontre de BC, CA, AB avec MT; a est le pôle de MA, b celui de MB et c de MC. On en déduit trois points de l'axe de déviation de cette conique au point M.

Pour $m = -1$, l'équation (1) représente une conique circonscrite au triangle ABC; a est le pôle de la droite joignant M au conjugué harmonique de a par rapport aux points B et C; b celui de la droite joignant M au conjugué harmonique de b par rapport aux points B et C; c celui de la droite joignant M au conjugué harmonique de c par rapport aux points A et B. Pour $m = \frac{1}{2}$, l'équation (1) représente une conique inscrite au triangle ABC; et l'on peut construire les pôles des droites MA, MB, MC. Le pôle de la droite AM, par exemple, est à l'intersection de la droite conjuguée harmonique de AM par rapport aux droites AB, AC avec MT. Ainsi, pour $m = 2$, $m = -1$ et $m = \frac{1}{2}$, on peut construire les axes de déviation des coniques correspondantes et l'on en déduira l'axe de déviation de la courbe (1) pour les autres valeurs de m .

4. L'enveloppe des polaires d'un point fixe P pris sur la droite $AX + BY + CZ = 0$ par rapport aux coniques conjuguées au triangle ABC et tangentes à cette droite est la conique inscrite au

triangle ABC et tangente à cette droite $AX + BY + CZ = 0$ au point P.

L'équation de ces coniques est, en effet,

$$A \frac{X^2}{X_0} + B \frac{Y^2}{Y_0} + C \frac{Z^2}{Z_0} = 0,$$

X_0, Y_0, Z_0 étant reliées par la relation

$$AX_0 + BY_0 + CZ_0 = 0.$$

La polaire du point P, X_1, Y_1, Z_1 étant ses coordonnées, a pour équation

$$A \frac{X_1 X}{X_0} + B \frac{Y_1 Y}{Y_0} + C \frac{Z_1 Z}{Z_0} = 0,$$

et l'enveloppe de cette droite lorsqu'on fait varier X_0, Y_0, Z_0

$$A \sqrt{X_1 X} + B \sqrt{Y_1 Y} + C \sqrt{Z_1 Z} = 0,$$

conique qui passe par le point X_1, Y_1, Z_1 si ce point est situé sur la droite $AX + BY + CZ = 0$.

Une conique est conjuguée par rapport au triangle formé par ses deux axes et la droite de l'infini; on en déduit que l'axe de déviation d'une conique en un point M est la polaire de ce point par rapport à la parabole inscrite dans le quadrilatère formé par les deux axes de la conique, la tangente et la normale en M. Les axes des coniques ayant un contact du troisième ordre avec une courbe en un point M de cette courbe sont tangents à une même parabole.

5. Soit ABCD un tétraèdre de référence, X_0, Y_0, Z_0, T_0 un point P du plan

$$(1) \quad AX + BY + CZ + DT = 0,$$

les surfaces

$$(2) \quad AX_0 \left(\frac{X}{X_0} \right)^m + BY_0 \left(\frac{Y}{Y_0} \right)^m + CZ_0 \left(\frac{Z}{Z_0} \right)^m + DT_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^m = 0,$$

$$(3) \quad \left(\frac{X}{X_0} \right)^{AX_0} \left(\frac{Y}{Y_0} \right)^{BY_0} \left(\frac{Z}{Z_0} \right)^{CZ_0} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{DT_0} = 1$$

sont tangentes au plan (1) au point X_0, Y_0, Z_0, T_0 . Si on les rap-

porte à une perpendiculaire en ce point à ce plan, axe des z , et à deux droites rectangulaires situées dans ce plan, il vient

$$z = \frac{1-m}{2} u_2 + \frac{(1-m)(2-m)}{2.3} u_3 + \dots \\ + \frac{(1-m)(2-m)\dots(n-m)}{1.2\dots n} u_n + \dots,$$

$u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ étant des fonctions homogènes de x, y, z , indépendantes de m . Ces surfaces ont donc mêmes directions asymptotiques en P, et les rayons de courbure d'une section plane sont inversement proportionnels à $1-m$.

Or, pour $m=2$, l'équation (2) représente une quadrique conjuguée au tétraèdre ABCD. Les faces de ce tétraèdre coupent le plan (1) suivant un quadrilatère; les droites joignant le point P aux sommets opposés de ce quadrilatère forment trois couples de droites en involution; les directions asymptotiques des surfaces (2) et (3) sont les rayons doubles de cette involution, PI et PI₁. Menons dans le plan (1) une droite PJ; elle coupe les faces du tétraèdre BCD, CDA, DAB, ABC aux points a, b, c, d , dont on peut construire les plans polaires par rapport à la quadrique

$$AX_0 \left(\frac{X}{X_0} \right)^2 + BY_0 \left(\frac{Y}{Y_0} \right)^2 + CZ_0 \left(\frac{Z}{Z_0} \right)^2 + DT_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^2 = 0.$$

Le plan polaire de a , par exemple, est le plan mené par les droites PJ, et PA, PJ, étant la conjuguée harmonique de PJ par rapport aux directions asymptotiques PI, PI₁.

Menons par PJ un plan quelconque; il coupe la quadrique (2) suivant une conique et les plans polaires de a, b, c, d suivant des droites qui sont les polaires de ces points par rapport à la conique. On en déduira quatre points de l'axe de déviation de la conique en P.

EXTRAIT DES STATUTS ET DU RÈGLEMENT.

La Société mathématique de France a pour objet l'avancement et la propagation des études de Mathématiques pures et appliquées. Elle y concourt par ses travaux et ses publications. Elle a son siège à Paris.

La Société se compose de sociétaires perpétuels, de membres résidents et de membres non résidents, en nombre illimité.

Sont considérés comme résidents les membres qui ont à Paris leur domicile ou leurs occupations professionnelles.

Les Étrangers peuvent faire partie de la Société.

Les conditions à remplir, pour être membre de la Société, sont les suivantes : 1° avoir été présenté par deux de ses membres et agréé par le Conseil d'administration ou par le Bureau agissant en vertu d'un mandat du Conseil; 2° avoir obtenu, à l'une des séances qui ont suivi la présentation, les suffrages de la majorité des membres présents; 3° avoir versé un droit d'admission de *dix francs*; 4° payer une cotisation annuelle dont le montant est de *vingt francs* pour les membres résidents, et de *quinze francs* pour les membres non résidents.

La cotisation annuelle peut toujours être rachetée par une somme de *trois cents francs*, versée dans les conditions fixées par le règlement administratif de la Société.

Ce versement confère le titre de *sociétaire perpétuel*.

La cotisation annuelle est payée au commencement de chaque exercice dont l'origine est fixée au 1^{er} novembre de chaque année.

Les nouveaux membres doivent payer la totalité de la cotisation de l'exercice en cours, quelle que soit l'époque de leur admission.

La Société tient des séances ordinaires deux fois par mois; elle prend trois mois de vacances, de la mi-juillet à la mi-octobre.

Pour assister aux séances, les personnes étrangères à la Société doivent être présentées par l'un de ses membres.

La Société publie par livraisons un Recueil annuel qui a pour titre : *Bulletin de la Société mathématique de France*, et qui contient, avec un extrait des procès-verbaux des séances, des Notes et Mémoires sur les Mathématiques pures ou appliquées, ayant pour auteurs des membres de la Société, et présentant quelque originalité au point de vue de la méthode ou des résultats.

Les livraisons du *Bulletin* sont adressées à tous les membres de la Société, au fur et à mesure de leur publication. Toutefois, dans le cas où un sociétaire se met en retard dans le paiement de sa cotisation, l'envoi du *Bulletin* est suspendu pour lui, jusqu'à ce qu'il ait acquitté l'arriéré.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS.

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6^e).

HUMBERT (G.), Membre de l'Institut, Professeur à l'École Polytechnique.
— *Cours d'Analyse* professé à l'École Polytechnique. 2 volumes in-8 (25 × 16), se vendant séparément.

TOME I : *Calcul différentiel. Principes du calcul intégral. Applications géométriques*, avec 111 figures; 1902..... 16 fr.

TOME II : *Complément du calcul intégral. Fonctions analytiques et elliptiques. Équations différentielles*, avec 91 figures; 1904. 16 fr.

TABLE DES MATIÈRES

(FASCICULE I).

	Pages.
État de la Société mathématique au commencement de 1907.....	v
Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels la Société échange son <i>Bulletin</i>	xiv
Règlement.....	xvi
Liste des Présidents de la Société depuis sa fondation.....	xx
Comptes rendus des séances.....	1
[R 9a] LECORNU (L.). — Sur l'extinction du frottement.....	3
[L ² 17a] FONTENÉ (G.). — Extension à l'espace du théorème des polygones de Poncelet par des polyèdres réticulés.....	9
[I24c] MAILLET (EDM.). — Sur diverses propriétés des nombres transcendants de Liouville.....	27
[M ¹ 1a] LUCAS (Félix). — Note relative aux points d'intersec- tion des courbes algébriques.....	47
[M ² 4m] REMY (L.). — Sur une famille dénombrable de surfaces hyperelliptiques du quatrième ordre.....	53
[O5j] BIOCHE (CH.). — Sur les surfaces du 3 ^e et du 4 ^e ordre qui admettent pour ligne asymptotique une courbe de 4 ^e ordre et de 4 ^e classe.....	70
[A4a] LALESKO (T.). — Sur le groupe des équations trinomes...	75
[M ¹ 8a, M ² 9c] PELLET (A.). — Construction du rayon de courbure d'une classe de courbes et de surfaces.....	76

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6^e).

GOURSAT (Edouard), Professeur à la Faculté des Sciences de Paris. —
Cours d'Analyse mathématique. 2 volumes grand in-8 (25 × 16) se
vendant séparément.

**TOME I: Dérivées et différentielles. Intégrales définies. Développements
en séries. Applications géométriques.** Volume de vi-620 pages, avec
52 figures; 1902..... 20 fr.

**TOME II: Théorie des fonctions analytiques. Équations différentielles.
Équations aux dérivées partielles. Éléments de calcul des varia-
tions.** Volume de vi-640 pages, avec 95 figures; 1905..... 20 fr.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE

PUBLIÉ
PAR LES SECRÉTAIRES.

S'adresser, pour la rédaction, à M. RAFFY, rue Pierre-Nicole, 7, Paris, 5^e ;
pour la distribution, à M. SERVANT, rue des Saints-Pères, 8, Paris, 7^e.

TOME XXXV. — FASCICULE II.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
A LA SORBONNE.

1907

MM. les Membres de la Société sont priés d'adresser leur cotisation à M. Claude-Lafontaine, banquier, rue de Trévise, n° 32, à Paris, Trésorier de la Société.

On s'abonne et l'on trouve les Volumes déjà publiés au siège de la Société et à la Librairie Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, Paris.

Les séances de la Société mathématique ont lieu les premier et troisième jeudis de chaque mois à 9 heures du soir.

Depuis le 1^{er} mars 1900 les séances de la Société ont lieu dans une salle de la Faculté des Sciences (entrée place de la Sorbonne, escalier tout au bout de la galerie, deuxième étage à droite).

Les Membres de la Société ont dû recevoir une carte, portant le timbre du Secrétariat, leur donnant accès à la Bibliothèque de l'Université, et fournissant à ce sujet les renseignements nécessaires; ceux qui ne l'auraient pas reçue sont priés d'en informer le Secrétariat.

La correspondance peut être adressée, soit à la Faculté des Sciences, place de la Sorbonne, soit au domicile de l'un des secrétaires, de préférence à M. Servant, sauf ce qui concerne la rédaction du Bulletin qui doit être adressé de préférence à M. Raffy.

AVIS.

Dans sa séance du 15 mars 1906, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé qu'à l'avenir tout Membre de la Société qui voudra compléter sa collection du *Bulletin* aura le droit personnel de le faire, une seule fois pour chacun des volumes publiés avant son admission, aux prix suivants :

3 francs le volume pour chacun des trente premiers tomes;
6 francs le volume pour chacun des tomes suivants, ce dernier prix devant être réduit à 4 francs pour les acheteurs de *dix volumes* au moins.

Dans sa séance du 28 février 1900, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé qu'à l'avenir tout Membre de la Société, auteur d'un travail *quelconque* inséré dans le Bulletin et désirant en obtenir des tirages à part, **devra en faire la demande en retournant l'épreuve corrigée.**

Si le nombre demandé ne dépasse pas *cinquante*, les frais du tirage à part seront faits par la Société.

Conformément à des décisions prises par le Conseil et par la Commission d'impression :

1^o Le *Bulletin*, depuis le Tome XXVII, paraît tous les trois mois;

2^o Les auteurs de tous les travaux destinés au *Bulletin* sont instamment priés d'inscrire en tête de leurs manuscrits la classification que leur assigne, d'après le sujet traité, l'*Index du Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*;

3^o Ils sont également invités à ne pas dépasser, autant que possible, la proportion de *une figure* pour quatre pages de texte imprimé.

SUR LES SÉRIES ENTIÈRES ET LES APPROXIMATIONS SUCCESSIVES;

PAR M. E. GOURSAT.

1. Étant donnée une équation différentielle du premier ordre

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

où le second membre est une fonction holomorphe des variables x et y dans le domaine D défini par les conditions

$$|x| \leq a, \quad |y| \leq b,$$

et dont le module ne dépasse pas un nombre positif M dans ce domaine D , on sait que l'intégrale de l'équation (1) qui prend la valeur $y = 0$ pour $x = 0$ est holomorphe à l'intérieur d'un cercle décrit de l'origine pour centre, dont le rayon est au moins égal au plus petit des deux nombres a et $\frac{b}{M}$. C'est là un résultat aujourd'hui classique, qui se déduit aisément de la première méthode de Cauchy, ainsi que de la méthode des approximations successives de M. Picard.

Il paraît difficile d'avoir une limite plus avantageuse pour le rayon du domaine où l'intégrale est holomorphe, si l'on ne possède pas sur la fonction $f(x, y)$ d'autres renseignements que ceux qui figurent dans l'énoncé que je viens de rappeler. Mais, si l'on connaît le domaine de convergence de la série entière $f(x, y)$, on peut énoncer un résultat plus précis, qui donne dans tous les cas le moyen d'avoir la limite la plus grande possible fournie par l'application du théorème précédent.

2. Nous rappellerons d'abord, en les précisant sur certains points, les propositions principales relatives aux séries entières à plusieurs variables.

Soit

$$(2) \quad \sum a_{mn} x^m y^n$$

xxxv.

6

une série entière en x et y , à coefficients quelconques. D'après un théorème classique, si cette série est convergente pour $x = x_0$, $y = y_0$ (ou du moins si le module du terme général $a_{mn} x_0^m y_0^n$ reste inférieur à un nombre fixe, quels que soient m et n), la série (2) est absolument convergente pour tout système de valeurs de x et de y tel que l'on ait à la fois

$$|x| < |x_0|, \quad |y| < |y_0|.$$

Si l'on décrit de l'origine comme centre, dans les plans des x et des y respectivement, deux cercles C et C' de rayon $|x_0|$ et $|y_0|$ respectivement, la somme $F(x, y)$ de la série (2) est une fonction holomorphe des variables x et y , lorsque la variable x reste dans le cercle C et la variable y dans le cercle C' . On se contente généralement d'établir ce résultat dans la plupart des Cours d'Analyse, et d'étudier la fonction $F(x, y)$ dans le domaine qui vient d'être défini.

Pour avoir une idée plus précise du domaine de convergence de la série (2), commençons par étudier la série des modules

$$(3) \quad \sum A_{mn} X^m Y^n, \quad A_{mn} = |a_{mn}|, \quad X = |x|, \quad Y = |y|,$$

et cherchons dans quelle partie de l'angle XOY on doit prendre le point de coordonnées (X, Y) pour que cette série (3) soit convergente.

D'après le théorème rappelé au début de ce paragraphe, si la série (3) est convergente pour les coordonnées d'un point M pris dans l'angle XOY , elle est aussi convergente en tout point pris à l'intérieur ou sur les côtés du rectangle $OPMQ$, ayant deux côtés sur OX et OY et dont le point M est un sommet. Au contraire, si la série est divergente au point M , elle est forcément divergente en tout point N pris dans l'angle $P'MQ'$ ou sur les côtés MP' , MR' de cet angle; car, si la série était convergente au point N , elle le serait *a fortiori* au point M .

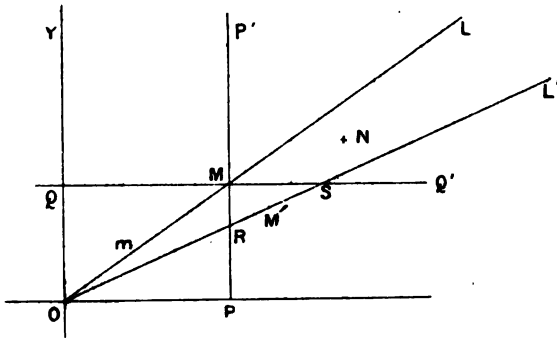
Cela posé, considérons une demi-droite indéfinie OL dans l'angle XOY , et un point m décrivant cette droite à partir de l'origine. Les coordonnées de ce point m , et par suite tous les termes de la série (3), vont en croissant lorsque le point m s'éloigne de l'origine. Il y a donc sur la droite OL un point séparatif M tel que la

série (3) est convergente pour tout point du segment OM compris entre l'origine et le point M, et divergente pour tout point de OL au delà du point M ⁽¹⁾.

Comme cas particuliers, il peut arriver que le point M soit à l'origine; les deux séries (3) et (2) sont alors divergentes sauf pour $x = y = 0$. Si le point M est rejeté à l'infini, la série (3) est au contraire absolument convergente, quels que soient x et y , et représente une fonction entière des deux variables x et y .

Laissant de côté ces cas extrêmes, sur chaque demi-droite située dans l'angle XOY, nous avons ainsi un point M, dont la distance à l'origine varie d'une manière continue avec le coefficient angulaire λ de cette droite. Soit en effet OL' une demi-droite voisine de OL (fig. 1). La série (3) est convergente pour tout

Fig. 1.



point du segment OM et par suite pour tout point du segment OR; au contraire, cette série (3) est divergente en tout point de la demi-droite indéfinie ML et par suite en tout point de la demi-droite indéfinie SL'. Le point séparatif M' de la demi-droite OL' est donc un point du segment RS, et par conséquent ce point M' vient se confondre avec le point M lorsque OL' vient se confondre avec OL. Il est à remarquer que la démonstration ne s'applique plus aux axes eux-mêmes OX et OY. Lorsque OL vient se con-

(¹) Si λ est le coefficient angulaire de la droite OL, l'abscisse du point M est l'inverse de la limite supérieure pour n infini de l'expression $\sqrt[n]{\lambda_{pq} \lambda^n}$, où $n = p + q$ (LEMAIRE, *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1906, p. 286). Il serait intéressant d'étudier, au moins dans quelques cas simples, la fonction de λ ainsi définie.

fondre avec OY, le point M ne tend pas forcément vers le point séparatif situé sur OY, comme nous en verrons tout à l'heure un exemple.

Le lieu décrit par le point M lorsque la demi-droite OL décrit l'angle XOY est donc une courbe continue Γ . Il résulte de la façon même dont on a obtenu cette courbe que, si $x = R$, $y = R'$ sont les coordonnées d'un point quelconque de Γ , la série (2) est absolument convergente si l'on a à la fois

$$|x| < R, \quad |y| < R',$$

et divergente si l'on a à la fois

$$|x| > R, \quad |y| > R'.$$

Les cercles C et C', de rayon R et R', décrits de l'origine pour centre dans les plans des variables x et y respectivement, constituent un système de *cercles de convergence associés*. A tout point de la courbe Γ correspond un pareil système de cercles associés.

D'une façon générale, la série (2) est absolument convergente pour un système de valeurs des variables x et y , si le point m de coordonnées $|x|$ et $|y|$ est intérieur à la courbe Γ , divergente si ce point m est extérieur à Γ . Il y a doute si le point m est sur Γ .

L'ensemble des systèmes de valeurs des variables complexes x et y , tels que le point m de coordonnées $|x|$ et $|y|$ soit à l'intérieur de Γ constitue un continuum connexe D de l'espace à quatre dimensions, à l'intérieur duquel la série (2) est absolument convergente, et la somme $F(x, y)$ de cette série est une fonction holomorphe des variables x et y dans ce domaine D.

3. Cette courbe séparatrice Γ peut avoir des formes très diverses, suivant la série considérée. Il résulte seulement du raisonnement fait plus haut que l'ordonnée d'un point de cette courbe ne peut augmenter lorsque l'abscisse augmente et inversement. Pour voir ce qui arrive lorsque OL tend vers OX, il suffit de remarquer que l'abscisse du point M ne peut décroître et que l'ordonnée de ce point ne peut augmenter; y tend donc vers une limite finie, tandis que x peut tendre vers une limite ou augmenter indéfiniment. La courbe Γ peut donc aboutir à un point de OX, ou avoir une

asymptote parallèle à OX, qui peut être l'axe lui-même. Il est clair que tout cela s'applique aussi à l'axe OY. Nous allons donner quelques exemples.

1° La série double

$$\sum_{m,n} M \left(\frac{x}{a}\right)^m \left(\frac{y}{b}\right)^n = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right)}$$

est convergente si l'on a à la fois

$$|x| < a, \quad |y| < b,$$

et dans ce cas seulement. La courbe Γ est formée ici des deux côtés d'un rectangle parallèle aux axes. On prend généralement une fonction majorante de ce type dans les démonstrations du calcul des limites, mais il y aurait souvent avantage à prendre des majorantes appartenant à des types différents.

2° La série double

$$\sum_{m,n} M \frac{(m+n)!}{m! n!} \left(\frac{x}{a}\right)^m \left(\frac{y}{b}\right)^n = \frac{M}{1 - \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)}$$

n'est absolument convergente que si l'on a

$$\left|\frac{x}{a}\right| + \left|\frac{y}{b}\right| < 1.$$

La courbe Γ est ici le segment de la droite

$$\frac{X}{a} + \frac{Y}{b} = 1,$$

compris entre les axes OX, OY.

3° La série double $\sum a_{mn} x^m y^n$, où l'on a $a_{mm} = 1$, et $a_{mn} = 0$ (pour $m \neq n$), n'est convergente que si l'on a $|xy| < 1$. La courbe Γ est une branche d'hyperbole asymptote aux deux axes.

4° La série

$$\sum' M \left(\frac{x}{a}\right)^m \left(\frac{y}{b}\right)^n,$$

où les indices m et n varient de un à $+\infty$, est encore divergente si l'on a $|x| > a$ ou $|y| > b$. La courbe Γ se compose donc, comme dans le second exemple, des deux côtés d'un carré, et

cependant la série est aussi convergente pour $x=0$ ou pour $y=0$. Lorsque la demi-droite OL tend vers OX, le point M de OL tend vers le point d'abscisse a sur OX, tandis que le point séparatif sur l'axe est rejeté à l'infini.

4. Reprenons l'équation différentielle

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

et soit Γ la courbe que nous venons de définir relativement à la série entière

$$f(x, y) = \sum a_{mn} x^m y^n.$$

La fonction $f(x, y)$ est holomorphe dans le domaine D correspondant, et nous supposons que $|f(x, y)|$ ne dépasse jamais un nombre positif M dans ce domaine. On peut toujours satisfaire à cette condition en remplaçant au besoin la courbe Γ par une courbe homothétique Γ' relativement à l'origine, et infiniment voisine de Γ .

Soit N un point de Γ de coordonnées (a, b) . La fonction $f(x, y)$ est holomorphe lorsque l'on a à la fois $|x| < a$, $|y| < b$, et, d'après le résultat classique rappelé au début de cet article, l'intégrale de l'équation (1), qui est nulle pour $x=0$, est certainement holomorphe dans un cercle de rayon h , h étant le plus petit des deux nombres

$$a = OP, \quad \frac{b}{M} = \frac{NP}{M}.$$

Pour avoir la valeur de h la plus grande possible, il faut choisir le point N sur Γ de façon que le plus petit des deux nombres OP et $\frac{NP}{M}$ soit le plus grand possible.

Il suffit pour cela de prendre le point d'intersection de la courbe Γ avec la demi-droite OL de coefficient angulaire M.

En effet, si le point N est sur cette droite, on a $NP = M \times OP$, ou

$$OP = \frac{NP}{M}.$$

Pour un point N' de Γ à droite du point N (fig. 2), on a $OP' > OP$,

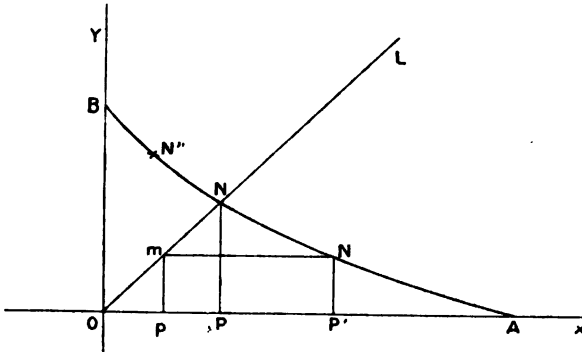
mais

$$\frac{N'P'}{M} = \frac{mP}{M} = Op < OP.$$

Pour un point N'' de Γ à gauche de N , l'abscisse au contraire est inférieure à OP .

En définitive, l'intégrale de l'équation (1), qui est nulle pour

Fig. 2.



$x = 0$, est holomorphe dans un cercle décrit de l'origine pour centre, dont le rayon est au moins égal à l'abscisse du point d'intersection de la courbe Γ avec la droite $Y = MX$.

Lorsque la courbe Γ se réduit aux deux côtés du rectangle formé par les axes et les deux droites $X = a$, $Y = b$, on retrouve bien la limite ordinaire.

5. Les considérations développées plus haut s'étendent évidemment aux séries entières à un nombre quelconque de variables. Prenons en particulier une série entière à trois variables

$$(4) \quad \sum a_{mnp} x^m y^n z^p,$$

et soit

$$(5) \quad \sum A_{mnp} X^m Y^n Z^p$$

la série des modules correspondante. Sur chaque demi-droite OL située dans le trièdre $OXYZ$, il existe un point M séparant les points pour lesquels la série (5) est convergente des points pour lesquels elle est divergente. Le lieu de ce point M est une surface Σ

située dans le trièdre OXYZ, qui peut avoir des formes très variées, mais qui satisfait toujours à la condition suivante : si (a, b, c) sont les coordonnées d'un point de Σ , tous les points intérieurs au parallélépipède formé par les 6 plans

$$X = 0, \quad X = a, \quad Y = 0, \quad Y = b, \quad Z = 0, \quad Z = c,$$

sont aussi intérieurs à Σ .

La série (4) est absolument convergente pour un système de valeurs x, y, z des variables, si le point de coordonnées $|x|, |y|, |z|$ est intérieur à la surface Σ , et divergente si ce point est à l'intérieur de Σ . L'ensemble des systèmes de valeurs de (x, y, z) tels que le point de coordonnées $|x|, |y|, |z|$ soit intérieur à Σ , constitue un domaine D où la somme $F(x, y, z)$ de la série (4) est une fonction holomorphe de ces variables, et à chaque point de Σ on peut encore faire correspondre un système de trois cercles de convergence associés.

Si l'on a une seconde série entière

$$(6) \quad \sum b_{mnp} x^m y^n z^p,$$

il lui correspond une surface de séparation Σ' , généralement différente de Σ . Toute demi-droite OL, située dans le trièdre OXYZ, rencontre Σ en un point M et Σ' en un point M'. Celui de ces deux points qui est le plus rapproché décrit une surface S, d'une forme analogue à celle des surfaces Σ et Σ' ; si R et R' sont deux points de S, les trois coordonnées de R' ne peuvent être à la fois plus grandes ou plus petites que les coordonnées de R. L'ensemble des systèmes de valeurs des variables x, y, z tels que le point de coordonnées $|x|, |y|, |z|$ soit du même côté que l'origine par rapport à S, constitue un domaine D, à l'intérieur duquel les sommes des deux séries

$$F(x, y, z) = \sum a_{mnp} x^m y^n z^p,$$

$$\Phi(x, y, z) = \sum b_{mnp} x^m y^n z^p$$

sont des fonctions régulières de x, y, z . Nous supposons de plus que ces fonctions sont finies sur la frontière de ce domaine, et nous désignerons par M et N des limites supérieures de $|F|$ et

de $|\Phi|$ respectivement. On peut toujours satisfaire à cette dernière condition en remplaçant, si c'est nécessaire, la surface S par une surface infiniment voisine.

Cela étant, considérons le système d'équations différentielles

$$(7) \quad \frac{dy}{dx} = F(x, y, z), \quad \frac{dz}{dx} = \Phi(x, y, z),$$

et soient (a, b, c) les coordonnées d'un point R de la surface S . On voit aisément, en reprenant la méthode des approximations successives, que les intégrales du système (7) qui s'annulent pour $x = 0$ sont holomorphes à l'intérieur d'un cercle de centre $x = 0$, dont le rayon est au moins égal au plus petit des trois nombres

$$a, \quad \frac{b}{M}, \quad \frac{c}{N}.$$

Pour avoir la limite la plus grande possible, on doit prendre pour R le point d'intersection de la surface S avec la droite représentée par les équations

$$Y = MX, \quad Z = NX.$$

En effet, si a, b, c sont les coordonnées de ce point, on a les égalités

$$a = \frac{b}{M} = \frac{c}{N} = h;$$

soient a', b', c' les coordonnées d'un autre point R' de S ; on ne peut avoir à la fois

$$a' > a, \quad b' > b, \quad c' > c,$$

et par conséquent le plus petit des nombres $a', \frac{b'}{M}, \frac{c'}{N}$ ne peut être supérieur à h .

6. La règle précédente peut être étendue aux fonctions non analytiques. Bornons-nous, pour fixer les idées, au cas d'une équation unique du premier ordre

$$(8) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y);$$

la fonction $f(x, y)$ est supposée continue à l'intérieur d'un

contour C formé d'un arc de courbe Γ dans l'angle xOy , joignant un point A de Ox à un point B de Oy , et des segments OA, OB, et satisfait dans ce domaine à la condition de Lipschitz, c'est-à-dire qu'il existe un nombre positif K tel que l'on ait

$$|f(x, y'') - f(x, y')| < K |y'' - y'|,$$

(x, y') et (x, y'') désignant les coordonnées de deux points quelconques pris à l'intérieur ou sur le contour de C. La courbe Γ peut avoir une forme quelconque; mais, comme on peut toujours la remplacer par une courbe Γ' intérieure à Γ , nous supposons que les coordonnées d'un point de Γ ne peuvent croître ou diminuer en même temps. Cela posé, soient M la limite supérieure de $|f(x, y)|$ dans le domaine précédent, et h l'abscisse du point de rencontre de l'arc de courbe Γ avec la droite $y = Mx$. L'intégrale de l'équation (8) qui se réduit à zéro pour $x = 0$ est certainement continue lorsque x varie de 0 à h .

On sait que M. E. Lindelöf a indiqué une autre expression de l'intervalle où cette intégrale est certainement continue (*Journal de Mathématiques*, 1894). Soient (a, b) les coordonnées d'un point de l'arc Γ et M_a le maximum de $|f(x, 0)|$ lorsque x varie de 0 à a ; M_a est une fonction $\varphi(a)$ de l'abscisse a qui ne peut diminuer lorsque a augmente et qui est au plus égale à M. D'après M. E. Lindelöf, l'intégrale de l'équation (8), qui s'annule pour $x = 0$, est certainement continue dans l'intervalle $(0, \rho)$, ρ désignant le plus petit des deux nombres

$$a \quad \text{et} \quad \frac{1}{K} \log \left(1 + \frac{Kb}{M_a} \right).$$

Soit N le point de l'arc Γ pour lequel les deux nombres précédents sont égaux,

$$a = \frac{1}{K} \log \left(1 + \frac{Kb}{M_a} \right);$$

ce point est à l'intersection de Γ avec la courbe qui a pour équation

$$(9) \quad y = \frac{\varphi(x)}{K} (e^{Kx} - 1).$$

Tout autre point N' de coordonnées (a', b') sur l'arc Γ donnera pour ρ une limite plus petite que le point N. Cela est évident

si $a' < a$; si a' est $> a$, on aura

$$b' \leq b, \quad M_{a'} \geq M_a, \quad \frac{1}{M_{a'}} \leq \frac{1}{M_a}, \quad \frac{b'}{M_{a'}} \leq \frac{b}{M_a},$$

et par suite

$$\log\left(1 + \frac{Kb'}{M_{a'}}\right) < \log\left(1 + \frac{Kb}{M_a}\right).$$

On aura donc la valeur de ρ la plus favorable en prenant le point d'intersection N de la courbe Γ avec la courbe (9).

Pour savoir laquelle des deux méthodes fournit le plus grand intervalle, il suffira de prendre les points d'intersection de Γ avec les deux courbes

$$y = Mx, \quad y = \frac{\varphi(x)}{K}(e^{Kx} - 1),$$

et de prendre celui de ces deux points dont l'abscisse est la plus grande. Il est clair que le résultat dépend de la forme de l'arc Γ , et aussi de la fonction $\varphi(x)$.

SUR UNE GÉNÉRALISATION DU MOUVEMENT DE POINSOT;

PAR M. L. LECORNU.

On sait, depuis Poinso, que le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe O s'effectue, en l'absence de forces extérieures, de façon que l'ellipsoïde d'inertie relatif à ce point roule et pivote sur un plan fixe, avec une vitesse angulaire représentée vectoriellement par le diamètre joignant le point fixe au point de contact de l'ellipsoïde et du plan.

Supposons qu'au lieu de l'ellipsoïde d'inertie relatif à O, nous considérons un autre ellipsoïde, de même centre O et de mêmes directions principales, dont les axes ne soient pas proportionnels à ceux de l'ellipsoïde d'inertie : tel est par exemple le cas de la surface d'un corps homogène ayant une forme ellipsoïdale. Si nous assujettissons cet ellipsoïde, que nous appellerons *l'ellipsoïde superficiel*, à se mouvoir autour de son centre, en roulant et

pivotant, sans glissement, au contact d'un plan fixe, nous obtenons un mouvement fort analogue à celui de Poinso, en ce sens que le déplacement s'effectue, géométriquement parlant, d'une façon identique, et que, dans un cas comme dans l'autre, la force vive demeure constante. Mais l'action du plan cesse alors d'avoir un moment nul par rapport au point O. Je me propose d'étudier la nature de ce mouvement et de déterminer en outre l'action du plan.

Soit $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1$ l'équation de l'ellipsoïde superficiel, rapporté à ses axes. Il roule et pivote sur un plan fixe Π , placé à la distance $\frac{1}{\delta}$ de son centre O. Le lieu du pôle P, c'est-à-dire du point de contact avec le plan Π , est la polhodie définie par les deux équations

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1, \\ \alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 = \delta^2. \end{cases}$$

Soient p, q, r les composantes de la rotation instantanée ω . Cette rotation s'effectue autour de OP, et l'on a, en appelant x, y, z les coordonnées de P,

$$(2) \quad \frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r} = \lambda;$$

le rapport λ est généralement variable.

Si nous imprimons au système une rotation — ω autour de OP, l'ellipsoïde est ramené à l'immobilité et le plan Π , qui était fixe, devient mobile. L'équation de ce plan est, en appelant ξ, η, ζ les coordonnées courantes,

$$\alpha x \xi + \beta y \eta + \gamma z \zeta = 1;$$

les cosinus directeurs de la normale au plan sont

$$a = \frac{\alpha x}{\delta} = \lambda \frac{\alpha p}{\delta},$$

$$b = \frac{\beta y}{\delta} = \lambda \frac{\beta q}{\delta},$$

$$c = \frac{\gamma z}{\delta} = \lambda \frac{\gamma r}{\delta}.$$

Écrivons que le point dont les coordonnées sont a, b, c est

entraîné par la rotation $-\omega$. Nous obtenons les relations

$$\frac{da}{dt} = rb - qc, \quad \frac{db}{dt} = pc - ra, \quad \frac{dc}{dt} = qa - pb,$$

ou bien

$$(3) \quad \alpha \frac{dx}{dt} = \lambda(\beta - \gamma)qr, \quad \beta \frac{dy}{dt} = \lambda(\gamma - \alpha)rp, \quad \gamma \frac{dz}{dt} = \lambda(\alpha - \beta)pq.$$

Revenons maintenant au mouvement réel.

La vitesse absolue du pôle P étant nulle, le travail de l'action du plan sur l'ellipsoïde est également nul, et la force vive de celui-ci est par conséquent constante. Si A, B, C désignent les moments d'inertie principaux et h la force vive, on a

$$(4) \quad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h,$$

ou bien

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = h\lambda^2;$$

d'où

$$(5) \quad Ax \frac{dx}{dt} + By \frac{dy}{dt} + Cz \frac{dz}{dt} = h\lambda \frac{d\lambda}{dt}.$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$(6) \quad D = \frac{A}{\alpha}(\beta - \gamma) + \frac{B}{\beta}(\gamma - \alpha) + \frac{C}{\gamma}(\alpha - \beta),$$

et si l'on remplace $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ par leurs valeurs (3), l'équation (5) devient

$$(7) \quad D\lambda pqr = h \frac{d\lambda}{dt}.$$

D'ailleurs

$$\frac{dx}{dt} = \lambda \frac{dp}{dt} + p \frac{d\lambda}{dt}.$$

Portons dans cette équation les valeurs de $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{d\lambda}{dt}$ tirées de (3) et (7). Nous obtenons la première des relations suivantes (les deux autres s'en déduisent par permutation)

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{dp}{dt} = \frac{\beta - \gamma}{\alpha} qr - \frac{p^2 qr}{h} D, \\ \frac{dq}{dt} = \frac{\gamma - \alpha}{\beta} rp - \frac{pq^2 r}{h} D, \\ \frac{dr}{dt} = \frac{\alpha - \beta}{\gamma} pq - \frac{pqr^2}{h} D. \end{cases}$$

Soient L, M, N les composantes de l'action du plan. Les formules connues

$$L = A \frac{dp}{dt} + (C - B)qr,$$

.....

donnent, en tenant compte de (8),

$$(9) \quad \begin{cases} L = \left[\frac{A}{\alpha} (\beta - \gamma) - (B - C) - \frac{D}{h} p^2 \right] qr, \\ M = \left[\frac{B}{\beta} (\gamma - \alpha) - (C - A) - \frac{D}{h} q^2 \right] rp, \\ N = \left[\frac{C}{\gamma} (\alpha - \beta) - (A - B) - \frac{D}{h} r^2 \right] pq. \end{cases}$$

On connaît ainsi l'effort exercé par le plan sur le corps. Si l'on veut que cet effort soit constamment nul, il faut d'abord, puisque p, q, r sont variables, que l'on ait $D = 0$. Cette condition étant remplie, on doit en outre poser

$$\frac{\beta - \gamma}{\alpha} = \frac{B - C}{A}, \quad \frac{\gamma - \alpha}{\beta} = \frac{C - A}{B}, \quad \frac{\alpha - \beta}{\gamma} = \frac{A - B}{C},$$

ou bien

$$\begin{aligned} A\beta - B\alpha &= A\gamma - C\alpha, \\ B\gamma - C\beta &= B\alpha - A\beta, \\ C\alpha - A\gamma &= C\beta - B\gamma. \end{aligned}$$

En retranchant l'une de l'autre les deux premières de ces égalités, il vient

$$C\beta - B\gamma = A\gamma - C\alpha,$$

et en comparant à la troisième on en conclut les relations

$$\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta} = \frac{C}{\gamma}.$$

L'action du plan n'est donc nulle que si l'ellipsoïde superficiel est semblable à l'ellipsoïde d'inertie.

Pour trouver, dans le cas général, la loi du mouvement écrivons les deux équations

$$\begin{aligned} \lambda^2 (\alpha p^2 + \beta q^2 + \gamma r^2) &= 1, \\ \lambda^2 (\alpha^2 p^2 + \beta^2 q^2 + \gamma^2 r^2) &= \delta^2. \end{aligned}$$

Par élimination de λ il vient

$$(10) \quad \alpha(\alpha - \delta^2)p^2 + \beta(\beta - \delta^2)q^2 + \gamma(\gamma - \delta^2)r^2 = 0.$$

Les équations (4) et (10) permettent d'exprimer linéairement q^2 et r^2 en fonction de p^2 , et, en portant les valeurs trouvées dans la première équation (8), on voit que le temps est donné en fonction de p par une intégrale elliptique de troisième espèce.

Nous allons maintenant nous occuper spécialement du cas où la quantité D est nulle. L'équation (7) montre que λ est alors une constante, de sorte que la vitesse de rotation est dans un rapport constant avec la longueur OP . D'après cela :

Si D est nul, le mouvement de l'ellipsoïde superficiel est un mouvement de Poinso.

Mais l'action du plan n'est pas nulle, à moins que A, B, C ne soient proportionnels à α, β, γ , ce que nous ne supposons pas.

Cherchons ce que signifie l'équation $D = 0$.

Quels que soient A, B, C on peut, en admettant que α, β, γ soient inégaux, trouver trois constantes R, S, T telles que l'on ait

$$A = R + S\alpha + T\alpha^2,$$

$$B = R + S\beta + T\beta^2,$$

$$C = R + S\gamma + T\gamma^2.$$

En portant ces expressions dans l'équation (7), il vient

$$D = R \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right).$$

Si donc D est nul, on a simplement

$$A = S\alpha + T\alpha^2,$$

$$B = S\beta + T\beta^2,$$

$$C = S\gamma + T\gamma^2.$$

D'après cela, la relation $D = 0$ exprime que l'ellipsoïde d'inertie $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$ et l'ellipsoïde superficiel $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1$ se coupent suivant une courbe pour laquelle $\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2$ est une quantité constante, c'est-à-dire suivant une polhodie de l'ellipsoïde superficiel. La réciproque est évidemment vraie. Comme l'échelle de construction de l'ellipsoïde d'inertie est arbitraire, on peut toujours, quand D est nul, supposer que cet ellipsoïde passe par la polhodie que décrit le pôle P . Admettons en outre que l'unité de temps soit choisie de façon à rendre la con-

stante λ égale à l'unité. Alors les coordonnées x, y, z de P ne diffèrent pas de p, q, r .

En remplaçant, dans les valeurs (g) de L, M, N les moments d'inertie A, B, C par leurs valeurs ci-dessus on trouve

$$L = T(\beta - \gamma)(\alpha - \beta - \gamma)qr,$$

$$M = T(\gamma - \alpha)(\beta - \gamma - \alpha)rp,$$

$$N = T(\alpha - \beta)(\gamma - \alpha - \beta)pq.$$

D'après le théorème connu de Resal, L, M, N sont identiques aux composantes de la vitesse du point G, extrémité du vecteur représentant le moment cinétique. Les coordonnées de G sont Ap, Bq, Cr. Pour construire ce point, il suffit d'abaisser, à partir de O, une perpendiculaire sur le plan tangent en P à l'ellipsoïde d'inertie, et de prendre sur cette perpendiculaire une longueur OG égale à l'inverse de la distance du point O au plan tangent.

Il existe d'ailleurs une infinité d'autres points dont la vitesse peut servir à représenter le moment de l'action du plan II. Cette propriété appartient à tous les points K dont les coordonnées sont

$$\xi = (U\alpha + T\alpha^2)p,$$

$$\eta = (U\beta + T\beta^2)q,$$

$$\zeta = (U\gamma + T\gamma^2)r,$$

U désignant une constante arbitraire.

En effet, la vitesse relative d'un pareil point a pour projection sur Ox

$$\frac{d\xi}{dt} = (U\alpha + T\alpha^2)\frac{dp}{dt} = (U + T\alpha)(\beta - \gamma)qr.$$

La vitesse d'entraînement du même point a pour projection

$$q\zeta - r\eta = [U + T(\beta + \gamma)](\gamma - \beta)qr.$$

Par suite la projection de la vitesse absolue est

$$T(\beta - \gamma)(\alpha - \beta - \gamma)qr,$$

expression identique à celle de L.

Le lieu des points K, quand l'on fait varier U, est une droite passant par G et dirigée perpendiculairement au plan tangent à

l'ellipsoïde superficiel : c'est donc une droite de direction fixe dans l'espace.

Lorsque le corps est homogène, les moments d'inertie A, B, C ont pour valeurs, en appelant μ la masse totale,

$$A = \frac{\mu}{5} \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right), \quad B = \frac{\mu}{5} \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\alpha} \right), \quad C = \frac{\mu}{5} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right),$$

ce qui peut s'écrire

$$A = \frac{\mu}{5\alpha\beta\gamma} [(\alpha + \beta + \gamma)\alpha - \alpha^2],$$

$$B = \frac{\mu}{5\alpha\beta\gamma} [(\alpha + \beta + \gamma)\beta - \beta^2],$$

$$C = \frac{\mu}{5\alpha\beta\gamma} [(\alpha + \beta + \gamma)\gamma - \gamma^2].$$

Il suffit alors de poser

$$S = \frac{\mu(\alpha + \beta + \gamma)}{5\alpha\beta\gamma}, \quad T = -\frac{\mu}{5\alpha\beta\gamma},$$

pour rentrer dans le cas précédent.

La condition $D = 0$ est encore vérifiée lorsque le corps est composé de couches ellipsoïdales homothétiques dont chacune est homogène. On le reconnaît immédiatement en considérant une pareille couche comme la différence de deux ellipsoïdes homothétiques et homogènes.

Par conséquent :

Un ellipsoïde homogène, ou composé de couches homothétiques et homogènes, qui a son centre fixe et qui se meut en roulant et pivotant au contact d'un plan fixe, obéit à la loi de Poinsot.

SUR UN ÉLÉMENT GÉOMÉTRIQUE NOUVEAU DES SURFACES;

PAR M. E. BARRÉ.

Dans deux Communications insérées au *Bulletin de la Société mathématique* (19 janvier et 16 mars 1887), M. le professeur Demartres, de l'Université de Lille, signalait à l'attention des géomètres l'intérêt d'un élément géométrique nouveau auquel il donnait le nom de *flexion*.

Le présent Mémoire a pour objet de continuer le travail de M. Demartres et d'établir dans ses grandes lignes la théorie de cet élément.

Je rappellerai ici les définitions et les résultats généraux signalés dans les Mémoires précités, afin de présenter une étude qui se suffise à elle-même; mais je me bornerai à renvoyer le lecteur, pour les démonstrations, aux Communications du savant professeur de l'Université de Lille.

PREMIÈRE PARTIE. — DÉFINITION DE LA FLEXION. PREMIÈRES PROPRIÉTÉS. APPLICATIONS.

1. *Définition.* — Considérons sur une surface un point M et prenons un plan de référence fixe P. Si l'on se déplace infiniment peu sur la surface, suivant une direction MM', on s'éloignera du plan P d'une quantité dh ; en même temps, la trace du plan tangent sur le plan de référence tourne de l'angle $d\Psi$. L'angle du plan tangent en M avec le plan de référence étant θ , nous appellerons *flexion* de l'élément MM' par rapport au plan P le rapport

$$(1) \quad \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{dh}{d\Psi}.$$

2. THÉORÈME I. — Si l'on considère sur une même surface deux directions conjuguées dont les flexions relatives à un même plan P soient $\tilde{f}_1$ et $\tilde{f}_2$, on a

$$(2) \quad \tilde{f}_1 \cdot \tilde{f}_2 + R_1 R_2 = 0,$$

R_1 et R_2 étant les rayons de courbure principaux de la surface au point M.

COROLLAIRE. — *Si le déplacement a lieu suivant une asymptotique, on aura*

$$(3) \quad \mathcal{F} = \sqrt{-R_1 R_2},$$

et l'on remarquera que cette valeur est indépendante de la direction choisie pour le plan de référence. (Voir Communication du 19 janvier.)

3. Expressions diverses de la flexion. — Soient MM' l'élément de courbe, Q le plan tangent en M. Soit δ la trace sur Q d'un plan parallèle au plan de référence mené par M.

Si l'on désigne par ϵ l'angle que δ fait avec la direction MT de la tangente en M à l'élément MM' et par ϵ_1 l'angle de δ avec la direction conjuguée de MT, on démontre (Communication du 16 mars) la formule

$$(4) \quad \mathcal{F} = \frac{ds}{d\sigma} \frac{\sin \epsilon}{\sin \epsilon_1},$$

ds désignant l'élément d'arc du déplacement, $d\sigma$ l'élément correspondant de l'arc d'indicatrice des normales.

La formule (4) conduit immédiatement au théorème suivant :

THÉORÈME II. — *La flexion d'un élément n'est pas changée quand le plan de référence tourne d'un angle quelconque autour de sa trace sur le plan tangent en M.*

Nous pouvons donc donner la définition suivante :

Définition. — La flexion d'un élément MM' par rapport à une direction δ du plan tangent en M est la flexion de l'élément MM' relativement à un plan quelconque parallèle à δ .

Nous la désignerons par le symbole $(T\delta)$ et nous l'appellerons, pour abréger, *flexion de T par rapport à δ* .

Formules diverses. — Le Mémoire précité contient une série de formules que je me borne à rappeler.

Soient φ l'angle de MT avec la direction principale de rayon de courbure normale R_1 ; ω celui de M δ avec la même direction, et φ_1 celui de la droite MT₁ conjuguée de MT avec cette direction; on a en valeur absolue

$$(5) \quad \mathcal{J} = \frac{ds}{d\sigma} \frac{\sin(\omega - \varphi)}{\sin(\omega - \varphi_1)}.$$

Si l'on prend pour sens positif des ω , φ celui qui amène la direction relative à R_1 sur celle relative à R_2 , par une rotation d'un quadrant, l'observateur étant supposé les pieds au point M et la tête vers le centre de courbure, on trouve

$$(6) \quad \mathcal{J} = (T\delta) = \frac{\sin(\omega - \varphi)}{\frac{\cos \omega \cos \varphi}{R_1} + \frac{\sin \omega \sin \varphi}{R_2}} = \frac{\text{tang} \omega - \text{tang} \varphi}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \text{tang} \omega \text{tang} \varphi},$$

ce qui peut aussi s'écrire

$$(6 \text{ bis}) \quad \frac{\mathcal{J}}{R_2} \text{tang} \omega \text{tang} \varphi + \text{tang} \varphi - \text{tang} \omega + \frac{\mathcal{J}}{R_1} = 0;$$

et en désignant par R le rayon de courbure normale de MT et par R' celui de M δ :

$$(7) \quad \mathcal{J} = \frac{R \sin(\omega - \varphi) \sin(\varphi - \varphi_1)}{\sin(\omega - \varphi_1)}$$

et

$$(8) \quad \left\{ \mathcal{J} = \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} \right) \left[\frac{1}{R_1} \sqrt{\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R_1} \right) \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R'} \right)} + \frac{1}{R_2} \sqrt{\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} \right) \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R} \right)} \right]^{-1} \right.$$

De l'une ou l'autre de ces relations on tire $(T\delta) + (\delta T) = 0$; ainsi :

THÉORÈME III. — *La flexion de T par rapport à δ est égale et de signe contraire à celle de δ par rapport à T.*

On obtient de même les résultats suivants :

THÉORÈME IV. — *A chaque direction T en correspond une autre δ , telle que T δ ait une valeur donnée. Les faisceaux*

correspondants T et δ sont homographiques et ont pour rayons doubles les directions asymptotiques.

THÉORÈME V. — *Quand deux directions sont rectangulaires, la flexion de l'une par rapport à l'autre a pour valeur absolue l'inverse de la torsion géodésique de l'élément correspondant ⁽¹⁾.*

THÉORÈME VI. — *La courbure totale est égale et de signe contraire à l'inverse du produit des flexions d'un même déplacement par rapport à deux directions conjuguées.*

La considération de la formule (6) m'amène immédiatement à deux théorèmes nouveaux; écrivons que la valeur de $\mathcal{F}$ est indépendante de φ , on obtient, tous calculs faits :

$$\tan^2 \omega = - \frac{R_2}{R_1};$$

d'où l'on conclut :

THÉORÈME VII. — *Il existe deux directions δ et deux seulement telles que la flexion $(T\delta)$ ait une valeur indépendante de la direction MT : ce sont les deux directions asymptotiques.*

Cette valeur constante de la flexion est en valeur absolue $\sqrt{-R_1 R_2}$.

THÉORÈME VIII. — *Il existe deux directions et deux seulement, les directions asymptotiques, pour lesquelles la flexion soit indépendante du plan de référence choisi.*

Cette valeur est encore $\sqrt{-R_1 R_2}$ au signe près.

Remarque sur les modifications à apporter aux énoncés précédents dans le cas d'un point parabolique. — La flexion en un pareil point ne sera, pour aucune direction, définie et indépendante de la direction du plan ou de la direction de référence; car la direction asymptotique unique pour laquelle seule cela pourrait arriver donne une flexion infinie ou indéterminée suivant le choix du plan ou de la direction de référence.

⁽¹⁾ Dans ce cas, la formule $(T\delta) + (\delta T) = 0$ conduit au théorème de M. Bertrand sur les torsions géodésiques de deux déplacements rectangulaires.

Même remarque si l'on cherche une direction δ telle que $(T\delta)$ soit indépendante de la direction T .

4. *Nouvelle expression de la flexion.* — On peut transformer l'expression (4) d'une manière qui nous conduira à une formule qui nous sera utile plus tard.

Soit $M\Phi$ la parallèle à la tangente à l'indicatrice des normales relatives au point M . $M\Phi$ est, comme l'on sait, la direction du plan tangent en M perpendiculaire à MT , conjuguée de MT . La formule (4) donne donc immédiatement en valeur absolue

$$(9) \quad \mathcal{F} = (T\delta) = \frac{ds}{d\sigma} \frac{\sin(\delta T)}{\cos(\delta\Phi)}.$$

5. *Flexion relative au déplacement du plan osculateur d'une courbe.* — La définition générale de la flexion (n° 1) peut évidemment s'appliquer au déplacement du plan osculateur à une courbe en associant à chacun de ces plans son point de contact avec la courbe.

Si alors l'on prend pour Oz une perpendiculaire au plan de référence, on aura

$$\mathcal{F} = \frac{dz}{d\psi} \frac{1}{\sin^2 \theta},$$

où $d\psi$, θ ont les significations précédemment définies et x , y , z représentent les coordonnées d'un point courant de la courbe.

Soient α , β , γ les cosinus directeurs de la tangente à la courbe; α' , β' , γ' ceux de sa normale principale, et α'' , β'' , γ'' ceux de la binormale. On a

$$\sin^2 \theta = 1 - \gamma'^2.$$

Mais la trace du plan osculateur sur xOy a pour coefficient angulaire $-\frac{\alpha'}{\beta'}$.

Soit alors T le rayon de torsion de la courbe; il vient

$$d\psi = \frac{\alpha' d\beta' - \beta' d\alpha'}{\alpha'^2 + \beta'^2} = \frac{\alpha' \beta' - \beta'' \alpha'}{\alpha'^2 + \beta'^2} \frac{ds}{T} = \frac{\gamma}{\gamma'^2 - 1} \frac{ds}{T}$$

et enfin $\mathcal{F} = -T$. Donc :

THÉORÈME IX. — *La flexion relative au déplacement du*

plan osculateur à une courbe est égale, au signe près, à son rayon de torsion.

6. Étude de la flexion pour un déplacement suivant une asymptotique. — Nous savons que la flexion pour un tel déplacement est, au signe près, égale à $\sqrt{-R_1 R_2}$.

D'après le théorème précédent, elle est égale au rayon de torsion de l'asymptotique; d'où la relation connue

$$T_0 = \sqrt{-R_1 R_2},$$

où T_0 est le rayon de torsion de l'asymptotique considérée.

Remarquons qu'en s'appuyant sur le théorème V on pourrait retrouver ces résultats.

Cas où l'asymptotique est une génératrice d'une surface réglée. — Il ne peut plus être question ici de torsion de l'asymptotique, mais on peut arriver à d'autres conclusions.

Soit M le point considéré, O le point central. Prenons un plan de référence perpendiculaire à la génératrice; dans ces conditions, en posant $OM = \rho$, on aura

$$\mathcal{F} = \frac{d\rho}{d\psi}, \quad \text{tang } \psi = \frac{\rho}{K},$$

K étant le paramètre de distribution de la surface considérée. On déduit de là

$$d\psi = \frac{K d\rho}{\rho^2 + K^2}, \quad \mathcal{F} = \frac{\rho^2 + K^2}{K},$$

et finalement

$$(10) \quad \frac{1}{R_1 R_2} = - \frac{K^2}{(K^2 + \rho^2)^2},$$

expression simple de la courbure totale d'une surface réglée.

7. Application des résultats précédents à la recherche des surfaces réglées à courbure totale constante. — D'après l'expression (10), on voit que, sauf le cas où K est nul ou infini (développables et cylindres et courbure totale nulle), la courbure ne

peut être constante que si ρ est constant tout le long d'une génératrice. Ceci n'est possible que pour des génératrices isotropes. On arrive dès lors facilement au théorème suivant :

THÉORÈME X. — 1° *Il n'existe aucune surface réglée à génératrices réelles applicables sur la sphère ou sur la pseudo-sphère.*

2° *Les seules surfaces réglées réelles applicables sur une sphère sont les sphères égales.*

3° *Aucune surface réglée réelle n'est applicable sur une pseudo-sphère.*

Les deux dernières parties de l'énoncé résultent de ce que, si la surface admet la génératrice isotrope G , et si elle est réelle, elle admet également la droite imaginaire conjuguée G_1 comme génératrice et se réduit nécessairement à une sphère.

Remarque I. — Il existe toutefois des surfaces réglées imaginaires, mais à équation réelle, applicables sur une pseudo-sphère. Ce sont les sphères imaginaires.

$$x^2 + y^2 + z^2 + R^2 = 0.$$

Remarque II. — Le paramètre de distribution d'une sphère de rayon R est Ri .

8. THÉORÈME XI. — *La torsion géodésique de la trajectoire orthogonale d'une ligne asymptotique est, au signe près, égale à la torsion de cette asymptotique au point considéré.*

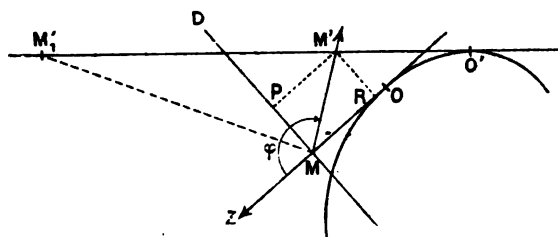
Car la flexion prise par rapport à la direction perpendiculaire au déplacement, direction qui n'est autre ici que la tangente principale, est égale, au signe près, à $\sqrt{-R_1 R_2}$, c'est-à-dire précisément au rayon de torsion de l'asymptotique.

Remarque. — Ce théorème se déduit immédiatement de la proposition de M. Bertrand sur les torsions géodésiques de deux éléments rectangulaires.

9. *Étude géométrique de la flexion dans les développables.*

— Soit M le point considéré. Prenons un plan de référence perpendiculaire à la génératrice OM de la développable, O désignant le point de contact de cette génératrice avec l'arête de rebroussement. Posons $OM = l$. Soit MM' la direction suivant laquelle on veut étudier la flexion par rapport à la direction MD , perpendiculaire à OM dans le plan tangent en M . Soit $M'O'$ la génératrice

Fig. 1.



du point M' . Soient $d\sigma_n$, $d\sigma$, $d\sigma'$, $d\sigma''$ les éléments d'indicatrices : de la normale à la surface au point M , de la tangente et des deux normales à l'arête de rebroussement au point correspondant O . Comme ici l'on a $d\psi = d\sigma_n$ et $\sin \theta = 1$, la flexion $\mathcal{F}$ a pour expression

$$\mathcal{F} = \frac{dl}{d\sigma_n}.$$

D'autre part, on a évidemment

$$d\sigma_n = d\sigma'';$$

d'où, φ étant l'angle indiqué sur la figure,

$$\mathcal{F} = \frac{\overline{PM}}{d\sigma_n} = \frac{\overline{MR}}{d\sigma_n} = \frac{l}{\sin \varphi} (-\cos \varphi) \frac{1}{d\sigma''}.$$

En réduisant et faisant usage des formules de Frenet, on arrive à la formule suivante :

$$(11) \quad \mathcal{F} = -l \cot \varphi \frac{T}{R},$$

où T et R sont les rayons de courbure et de torsion de l'arête de la développable.

D'autre part, si K est le point de $M'O'$ situé dans le plan de

référence dont MD est la trace sur le plan tangent, les segments M'R et MK sont des infiniment petits équivalents en grandeur absolue; ils sont, d'ailleurs, dirigés en sens inverse. On a évidemment

$$\lim \frac{MK}{d\psi} = R_1,$$

R_1 désignant le rayon de courbure de la section normale principale MK. Donc

$$R_1 = \lim \frac{\overline{MK}}{d\psi} = - \lim \frac{\overline{M'R}}{d\psi} = \lim \frac{MR}{d\psi} \cot \varphi;$$

d'où enfin l'expression nouvelle de la flexion,

$$(12) \quad \mathcal{F} = R_1 \cot \varphi.$$

En comparant les relations (11) et (12) on obtient la formule connue qui donne l'expression du rayon de courbure principal fini d'une développable,

$$(13) \quad R_1 = -l \frac{T}{R}.$$

Si l'on prend un plan de référence perpendiculaire à MM' défini par sa trace MM'_1 dans le plan tangent, la flexion relative à cette direction prend les formes suivantes :

$$\mathcal{F} = \frac{l d\sigma}{\sin \varphi d\psi} = l \frac{T}{R} \frac{1}{\sin \varphi} \frac{d\sigma_n}{d\psi} = l \frac{T}{R} \frac{1}{\sin \psi} \frac{1}{\cos(MK, MM'_1)}.$$

Or, on a

$$(MK, MM'_1) = \frac{\pi}{2} + \varphi,$$

d'où

$$(14) \quad \mathcal{F} = \frac{1}{Q} = \frac{2 R_1}{\sin 2\psi},$$

Q désignant la torsion géodésique de l'élément MM' . Cette formule aurait d'ailleurs pu être écrite de suite en se rappelant l'expression de la torsion géodésique.

DEUXIÈME PARTIE. — ÉTUDE DE LA FLEXION EN COORDONNÉES
CARTÉSIENNES RECTANGLES.

1. *Expressions diverses de la flexion, le plan de référence étant l'un des plans de coordonnées.* — Nous supposons d'abord l'équation de la surface ramenée à la forme

$$(1) \quad z = f(xy),$$

laissant de côté le cas simple, où la surface se réduirait à un cylindre dont les génératrices seraient parallèles à l'axe Oz .

Premier cas. — Le plan de référence est parallèle à l'un des plans $x = 0$ ou $y = 0$. On démontre (Communication du 19 janvier) que dans le premier cas la flexion $\mathcal{F}$ est donnée par la formule

$$(2) \quad \mathcal{F} = (p^2 + q^2 + 1) \frac{dx}{s \, dx + t \, dy},$$

où p et q sont les dérivées premières de f ; r , s et t ses dérivées secondes.

Une formule absolument analogue donne la solution de la question pour un plan de référence parallèle à $y = 0$,

$$(2 \text{ bis}) \quad \mathcal{F} = (p^2 + q^2 + 1) \frac{dy}{r \, dx + s \, dy}.$$

Deuxième cas. — Le plan de référence est parallèle au plan xOy . On obtient, par une marche identique à celle suivie par M. Demartres, l'expression

$$(3) \quad \mathcal{F} = (p^2 + q^2 + 1) \frac{p \, dx + q \, dy}{p \, dq - q \, dp},$$

ou

$$(4) \quad \mathcal{F} = (p^2 + q^2 + 1) \frac{p \, dx + q \, dy}{(ps - qr) \, dx + (pt - qs) \, dy}.$$

2. *Points d'une surface pour lesquels la flexion, par rapport à un plan fixe, est indépendante du déplacement élémentaire choisi.* — Prenons le plan zOy parallèle au plan de référence.

En se reportant à la formule (2), on voit que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que t soit nul : le lieu cherché est donc défini par les équations

$$(5) \quad \begin{cases} t = 0, \\ z = f(x, y); \end{cases}$$

on voit que c'est le lieu des points pour lesquels une direction asymptotique est parallèle au plan de référence; on pouvait le prévoir d'après le théorème VII. Sous une autre forme ce résultat s'énonce ainsi :

THÉORÈME XII. — *Le lieu Γ des points d'une surface Σ pour lesquels la flexion par rapport à un plan donné est indépendante du déplacement élémentaire est le lieu des points d'inflexion des sections faites dans la surface Σ par des plans parallèles au plan de référence.*

3. Il peut arriver que le lieu précédent ne soit plus une ligne mais bien une surface; ceci arriverait dans le cas où la surface considérée comprendrait une nappe pour laquelle on aurait en tout point $t = 0$. L'équation $t = 0$ représentant une surface réglée à plan directeur, nous obtenons le théorème suivant :

THÉORÈME XIII. — *Toute surface telle qu'en chacun de ses points la flexion par rapport à un plan fixe P soit indépendante du déplacement élémentaire est une surface réglée ayant le plan P comme plan directeur. Inversement, sur toute surface réglée à plan directeur, la flexion prise par rapport à ce plan pour un déplacement élémentaire quelconque est indépendante de la direction de ce déplacement.*

Remarque. — Cette dernière partie se généralise sans peine : dans toute surface réglée, la flexion suivant un déplacement quelconque, à partir d'un point, prise par rapport à la génératrice de ce point, est constante et égale au signe près à $\sqrt{-R_1 R_2}$. C'est une conséquence immédiate du théorème VIII.

4. **PROBLÈME.** — *On peut se proposer de rechercher les lignes*

de la surface Σ telles que la flexion prise pour un déplacement sur cette ligne, par rapport à un plan donné, soit en chaque point donnée par une fonction déterminée $\mathcal{F}(x, y)$ de ses coordonnées indépendantes, la surface étant supposée représentée par l'équation (1).

Si nous adoptons le choix de coordonnées correspondant à la formule (2), le lieu sera représenté par les équations

$$(6) \quad \begin{cases} z = f(x, y), \\ \frac{dy}{dx} = \left[\frac{p^2 + q^2 + 1}{\mathcal{F}(x, y)} - s \right] \frac{1}{t}. \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi une famille de courbes. Toutefois la discussion de la seconde des équations (6) amène à des développements analytiques que je crois hors de proportion avec l'intérêt qui s'y attache, aussi me bornerai-je à étudier quelques applications particulières.

Applications. — 1° La fonction $\mathcal{F}$ se réduit à la constante zéro. La seconde équation (6) ne peut plus être appliquée en toute rigueur. Toutefois, en considérant le résultat obtenu comme cas limite, on trouve

$$dx = 0.$$

Les courbes cherchées sont les sections de la surface par des plans parallèles au plan de référence.

2° La surface est une surface réglée dont le plan de référence est le plan directeur. On a, dans ce cas, $t = 0$; par suite dx est nul, ce qui donne les génératrices rectilignes : ce résultat peut s'expliquer géométriquement, la flexion prise dans ces conditions étant évidemment indéterminée.

On trouve, en outre, la solution singulière seule intéressante :

$$(7) \quad \begin{cases} p^2 + q^2 + 1 = s \mathcal{F}(x, y), \\ z = f(x, y) = y f_1(x) + f_2(x), \end{cases}$$

qui représente une courbe bien définie sur la surface.

Supposons, par exemple, que la surface soit un parabolôïde équilatère et le plan de référence un de ses plans directeurs. Elle

a pour équation

$$(8) \quad z = \frac{1}{a}xy.$$

La première des équations (7) donne ici

$$(9) \quad x^2 + y^2 + a^2 = a \mathcal{F}(x, y).$$

Dans le cas spécial où la fonction $\mathcal{F}$ serait du premier degré en x et y et, en particulier, une constante, cette courbe serait tracée sur un cylindre de révolution. Donc, *les lignes d'égale flexion du parabolôide équilatère par rapport à un de ses plans directeurs sont ses intersections avec la famille des cylindres de révolution autour de l'axe de la surface.*

5. *Flexion dans l'hélicoïde gauche à plan directeur, la flexion étant prise par rapport à ce plan.* — L'équation de la surface rapportée à son plan directeur est

$$(10) \quad \frac{y}{x} = \tan \frac{z}{a},$$

d'où, en vertu de la formule (3), l'on conclut

$$\mathcal{F} = a + \frac{x^2 + y^2}{a}.$$

Ainsi, *les lignes d'égale flexion sont les hélices asymptotiques de la surface*; nous négligeons, bien entendu, les génératrices rectilignes.

6. *Flexion dans le parabolôide de révolution.* — Nous prendrons comme plan de référence, soit un plan parallèle au plan tangent au sommet, soit un plan parallèle à l'axe, c'est-à-dire à un plan méridien.

I. L'équation de la surface étant

$$(11) \quad z = \frac{x^2 + y^2}{2a},$$

supposons d'abord le plan de référence perpendiculaire à l'axe. La

formule (3) donne pour expression de la flexion

$$(12) \quad \mathcal{J} = \frac{x^2 + y^2 + a^2}{a} \frac{x dx + y dy}{x dy - y dx}.$$

Une intégration immédiate donne en termes finis l'équation des lignes d'égale flexion. Elles sont gauches, sauf quand cette flexion doit être nulle, auquel cas elles se réduisent aux parallèles de la surface.

II. Si le plan de référence est parallèle à l'axe, nous pouvons le supposer parallèle au plan $x = 0$. La formule (2) donne alors

$$(13) \quad \mathcal{J} = \frac{a^2 + x^2 + y^2}{a} \frac{dx}{dy}.$$

Cette formule permet de trouver les lignes à flexion constante et de résoudre d'autres problèmes du même genre. On voit qu'elle montre que *le long d'un méridien la flexion varie comme la distance du point considéré au plan tangent au sommet.*

7. Il resterait, pour compléter cet exposé, à rechercher l'expression de la flexion pour une surface donnée par une équation

$$z = f(x, y),$$

le plan de référence étant quelconque. Ce problème pouvant être considéré comme cas particulier du problème général qui termine ce travail, je ne le traiterai pas ici. On en déduit la solution du problème lorsque la surface est donnée par une équation de la forme

$$f(x, y, z) = 0.$$

TROISIÈME PARTIE. — ÉTUDE DE LA FLEXION EN COORDONNÉES CURVILIGNES RAPPORTÉES A UN TRIÈDRE TRIANGLE.

Nous supposons dans tout ce qui va suivre la surface définie par des équations

$$(1) \quad \begin{cases} x = f(u, v), \\ y = \varphi(u, v), \\ z = \psi(u, v), \end{cases}$$

et nous poserons suivant l'usage

$$(2) \quad A = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial \psi}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \end{vmatrix},$$

$$(2') \quad \begin{cases} E = \Sigma \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^2, & F = \Sigma \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v}, & G = \Sigma \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)^2, \\ H = (A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{1}{2}} = (EG - F^2)^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} D = \begin{vmatrix} f''_{uu} & \varphi''_{uu} & \psi''_{uu} \\ f'_{uv} & \varphi'_{uv} & \psi'_{uv} \\ f'_{vv} & \varphi'_{vv} & \psi'_{vv} \end{vmatrix}, & D' = \begin{vmatrix} f''_{vv} & \varphi''_{vv} & \psi''_{vv} \\ f'_{vu} & \varphi'_{vu} & \psi'_{vu} \\ f'_{vu} & \varphi'_{vu} & \psi'_{vu} \end{vmatrix}, \\ D'' = \begin{vmatrix} f''_{vv} & \varphi''_{vv} & \psi''_{vv} \\ f'_{vu} & \varphi'_{vu} & \psi'_{vu} \\ f'_{vu} & \varphi'_{vu} & \psi'_{vu} \end{vmatrix}. \end{cases}$$

$$(3') \quad E' = \frac{D}{H}, \quad F' = \frac{D'}{H}, \quad G' = \frac{D''}{H}.$$

1. Établissement direct de la formule donnant la flexion par rapport au plan xOy . — On trouve, comme dans le travail de M. Demartres, la formule

$$(4) \quad \mathcal{J} = \frac{H^2 dz}{A dB - B dA}.$$

Cette dernière formule mène, par des calculs identiques à ceux que nous rencontrerons prochainement, à la suivante

$$(5) \quad \mathcal{J} = \frac{(\psi'_u du + \psi'_v dv) H^2}{(D' \psi'_u - D \psi'_v) du + (D' \psi'_u - D' \psi'_v) dv}.$$

2. Applications. — Dans le cas où l'on prend des sections horizontales comme courbe $v = \text{const.}$, c'est-à-dire où la fonction ψ se réduit à une fonction de la seule variable Y , la formule (5) se simplifie considérablement et devient

$$(6) \quad \mathcal{J} = - \frac{H^2 dv}{D du + D' dv},$$

elle s'écrit encore

$$(7) \quad \mathcal{F} = - \left(\frac{F'}{H} + \frac{E'}{H} \frac{du}{dv} \right).$$

On tire très simplement de cette dernière forme divers résultats.

Quand $E' = 0$, c'est-à-dire quand la direction de référence, intersection du plan tangent et du plan de référence, est asymptotique, $\mathcal{F}$ est indépendant du rapport $\frac{du}{dv}$, c'est-à-dire du déplacement choisi et c'est le seul cas où cela ait lieu; c'est un résultat déjà trouvé.

Soient maintenant Q_z la torsion géodésique des courbes horizontales $v = \text{const.}$ et Q_u celle des courbes $u = \text{const.}$ Ces deux fonctions sont données par les relations

$$Q_z = \frac{1}{EH} (E'F - F'E), \quad Q_u = \frac{1}{GH} (F'G - FG').$$

La flexion $\mathcal{F}$ suivant le déplacement $du = 0$ satisfait donc aux deux relations

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{1}{\mathcal{F}} + Q_z = \frac{E'F}{EH}, \\ \frac{1}{\mathcal{F}} - Q_u = \frac{G'F}{HG}. \end{cases}$$

Les formules (8) conduisent aux résultats suivants :

1° Si les courbes coordonnées $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$ sont rectangulaires, F est nul et il vient

$$\frac{1}{\mathcal{F}} = Q_u = -Q_z,$$

résultat déjà trouvé.

2° On a également $\frac{1}{\mathcal{F}} = Q_u$ si $G' = 0$, c'est-à-dire si les courbes $u = \text{const.}$ sont asymptotiques. C'est un résultat connu (Théorème XI).

Si $E' = 0$, on retrouve le résultat suivant : *la flexion d'une asymptotique par rapport à une direction quelconque est égale à son rayon de torsion.*

3° Soient R_u et R_z les rayons des sections normales tangentes aux courbes $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$ Les formules (8) s'écrivent

$$(9) \quad \frac{1}{\mathcal{F}} + Q_z = \frac{\cos \theta}{R_z}, \quad \frac{1}{\mathcal{F}} - Q_u = \frac{\cos \theta}{R_u}.$$

On obtient ainsi le théorème suivant :

THÉORÈME XIV. — *L'inverse de la flexion d'une direction uT par rapport à une direction de référence $M\delta$ est égale :*

1° *A la somme de la torsion géodésique relative à la direction considérée et du produit de sa courbure normale par le cosinus de l'angle $(T\delta)$.*

2° *A la différence entre le produit de la courbure normale de la direction de référence par le cosinus de l'angle $(T\delta)$ et de la torsion géodésique de cette direction de référence.*

3. Revenons aux conséquences de l'équation générale (7). Si l'on pose $\frac{du}{dv} = \mu$, la formule considérée s'écrit

$$\frac{1}{\mathcal{F}} = - \left(\frac{F'}{H} + \mu \frac{F'}{H} \right);$$

1° Soient μ_1 et μ_2 deux valeurs de μ telles que $\mu_1 + \mu_2 = 0$. En appelant $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ les flexions relatives aux directions qui correspondent à μ_1 et μ_2 ,

$$\frac{1}{\mathcal{F}_1} + \frac{1}{\mathcal{F}_2} = -2 \frac{F'}{H} = \frac{2}{\mathcal{F}_0},$$

où $\mathcal{F}_0$ désigne la flexion du déplacement suivant $u = \text{const.}$ Ainsi :

THÉORÈME XV. — *La flexion prise par rapport à une direction quelconque pour un déplacement déterminé est moyenne harmonique des flexions relatives à deux déplacements conjugués harmoniques par rapport à la direction de référence et au déplacement considéré.*

Corollaire. — *La flexion d'un élément prise par rapport à une direction perpendiculaire, égale à la torsion géodésique de la*

direction du déplacement, est moyenne harmonique des flexions prises par rapport à la même direction, de deux déplacements quelconques symétriques par rapport au déplacement considéré.

Remarque. — Le théorème V n'est qu'un cas particulier du théorème XIV.

2° Soient μ_1 et μ_2 deux valeurs quelconques de μ ; on a

$$(10) \quad \frac{1}{\mathcal{F}_1 \mathcal{F}_2} = \frac{F'^2}{H^2} + \frac{(\mu_1 + \mu_2) E' F'}{H^2} + \mu_1 \mu_2 + \frac{E'^2}{H^2}.$$

Dans le cas où les déplacements sont conjugués, on a

$$E' \mu_1 \mu_2 + F'(\mu_1 + \mu_2) + G' = 0,$$

et il vient

$$\frac{1}{\mathcal{F}_1 \mathcal{F}_2} = \frac{F'^2 - E' G'}{H^2} = - \frac{1}{R_1 R_2},$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{F}_1 \mathcal{F}_2 + R_1 R_2 = 0,$$

résultat déjà trouvé autrement.

4. *Calcul de l'expression générale de la flexion ($T\delta$) d'un déplacement par rapport à une direction de référence.* — On voit sans peine que l'on a en valeur absolue l'égalité

$$(11) \quad \mathcal{F} = \frac{ds}{d\sigma} \frac{\sin(\delta T)}{\cos(\delta \Phi)} = \frac{[\Sigma(\alpha_1 dy - \beta_1 dx)^2]^{\frac{1}{2}}}{\alpha_1 dA + \beta_1 dB + \gamma_1 dC}$$

en désignant par $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ les cosinus directeurs de $M\delta$ et par a_1, b_1, c_1 ceux de la normale à la surface; or ici

$$a = \frac{A}{H}, \quad b = \frac{B}{H}, \quad c = \frac{C}{H},$$

la formule (11) devient alors

$$\mathcal{F} = \frac{H^2 [\Sigma(\alpha_1 dy - \beta_1 dx)^2]^{\frac{1}{2}}}{H(\alpha_1 da + \beta_1 db + \gamma_1 dc) - (a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1) dH}.$$

La direction de référence étant dans le plan tangent, cette expression se réduit à

$$(12 \text{ bis}) \quad \mathcal{F} = \frac{H [\Sigma(\alpha_1 dy - \beta_1 dx)^2]^{\frac{1}{2}}}{\alpha_1 dA + \beta_1 dB + \gamma_1 dC}.$$

Soient λ et μ les coefficients directeurs superficiels de la direction de référence; on a

$$\alpha_1 = \lambda \frac{\partial f}{\partial u} + \mu \frac{\partial f}{\partial v}, \quad dx = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv$$

et la formule analogue; d'où

$$\alpha_1 dy - \beta_1 dx = C(\lambda dr - \mu du).$$

Il vient alors

$$(12) \quad \mathcal{F} = \frac{(\lambda dr - \mu du) H^2}{\alpha_1 dA + \beta_1 dB + \gamma_1 dC}.$$

Le dénominateur est de la forme $I du + J dv$; il reste à calculer I et J . Dans l'expression de $\alpha_1 dA$ qui, développée, s'écrit

$$\alpha_1 dA = \frac{\partial A}{\partial u} \left(\lambda \frac{\partial f}{\partial u} + \mu \frac{\partial f}{\partial v} \right) du + \frac{\partial A}{\partial v} \left(\lambda \frac{\partial f}{\partial u} + \mu \frac{\partial f}{\partial v} \right) dv,$$

faisons les substitutions

$$\frac{\partial A}{\partial u} = \varphi''_{u^2} \psi' - \varphi'_{u^2} \psi''_{u^2} + \varphi'_{uv} \psi''_{uv} - \psi'_{uv} \varphi''_{uv},$$

$$\frac{\partial A}{\partial v} = \varphi''_{uv} \psi' - \psi''_{uv} \varphi'_{uv} + \varphi'_{v^2} \psi''_{v^2} - \psi'_{v^2} \varphi''_{v^2}.$$

Nous aurons, comme coefficient de du ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial u} \left(\lambda \frac{\partial f}{\partial u} + \mu \frac{\partial f}{\partial v} \right) = & \lambda [f'_{u^2} (\varphi''_{u^2} \psi' - \varphi'_{u^2} \psi''_{u^2}) + f'_{uv} (\varphi'_{uv} \psi''_{uv} - \psi'_{uv} \varphi''_{uv})] \\ & + \mu [f'_{uv} (\varphi''_{u^2} \psi' - \varphi'_{u^2} \psi''_{u^2}) + f'_{v^2} (\varphi'_{uv} \psi''_{uv} - \psi'_{uv} \varphi''_{uv})]. \end{aligned}$$

Faisant la somme des termes analogues dans $\alpha_1 dA$, $\beta_1 dB$, $\gamma_1 dC$, nous trouvons

$$I = -(\lambda D + \mu D'),$$

$$J = -(\lambda D' + \mu D'').$$

Nous avons donc au signe près

$$\mathcal{F} = \frac{(\mu du - \lambda dv) H^2}{(\lambda D + \mu D') du + (\lambda D' + \mu D'') dv}.$$

Pour voir quel signe il faut adopter, comparons avec la formule (5), qui donne sans ambiguïté la flexion par la direction

définie par la relation $\psi'_u du + \psi'_v dv = 0$. Nous constatons que la formule précédente convient en grandeur et en signe. On a donc

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{J} &= \frac{(\mu du - \lambda dv) H^2}{(\lambda D + \mu D') du + (\lambda D' + \mu D'') dv} \\ &= \frac{H(\mu du - \lambda dv)}{(\lambda E' + \mu F') du + (\lambda F' + \mu G') dv} \end{aligned} \right.$$

et, si l'on définit le déplacement par ses paramètres superficiels ξ, η , on obtient la formule

$$(14) \quad \mathcal{J} = \frac{H(\mu\xi - \lambda\eta)}{(\lambda E' + \mu F')\xi + (\lambda F' + \mu G')\eta},$$

et, si l'on pose

$$\theta(\lambda, \mu) = E'\lambda^2 + 2F'\lambda\mu + G'\mu^2,$$

on peut encore écrire

$$(15) \quad \mathcal{J} = \frac{2H(\mu\xi - \lambda\eta)}{\xi\theta'_\lambda + \eta\theta'_\mu} = \frac{2H(\mu\xi - \lambda\eta)}{\lambda\theta'_\xi + \mu\theta'_\eta}.$$

On vérifie immédiatement sur ces formules la relation

$$(T\delta) + (\delta T) = 0$$

et le fait que, si les directions (ξ, η) et (λ, μ) sont conjugués, $\mathcal{J}$ est infini.

5. *Interprétation géométrique nouvelle de la formule (15).*

— Rapportons la surface à ses lignes de courbure : l'équation de l'indicatrice en un point (u, v) rapportée à ses axes sera

$$E'\lambda^2 + G'\mu^2 = 1,$$

l'homogénéité de la formule (15) permettant de prendre pour valeurs des paramètres λ et μ les coordonnées rectangulaires (λ, μ) du point correspondant de l'indicatrice.

I. *Indicatrice elliptique.* — On peut poser

$$E' = \frac{1}{a^2}, \quad G' = \frac{1}{b^2}$$

La formule (18) donne immédiatement

$$(21) \quad \mathcal{F} = \sqrt{R_1 R_2} \tan \zeta.$$

Les formules (20) et (21) ont des significations géométriques qu'on aperçoit immédiatement en faisant intervenir le cercle principal de l'indicatrice.

Dans le cas d'un ombilic, les deux formules se réduisent à

$$\mathcal{F} = R \tan \epsilon.$$

II. *Cas d'une indicatrice hyperbolique.* — On posera ici

$$(22) \quad \begin{cases} \lambda = a \sec \varphi_1, & \xi = a \sec \varphi_2, \\ \mu = b \tan \varphi_1, & \eta = b \tan \varphi_2, \end{cases}$$

et l'on trouvera

$$(23) \quad \mathcal{F} = \frac{R_1 R_2}{\sqrt{RR'}} \frac{\sin \epsilon}{\tan \psi}$$

en posant

$$\tan \psi = \frac{1 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2}{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}.$$

L'interprétation de cette formule ne présente pas le même intérêt géométrique que celle de la formule (20). Même observation pour la formule qui remplace la formule (21).

Remarque. — Il est évident qu'on pourrait ramener ce second cas au premier par l'introduction d'angles imaginaires.

III. *Cas d'une indicatrice réduite à deux parallèles. (Points paraboliques.)* — L'équation de l'indicatrice est ici

$$E' \lambda^2 = 1.$$

On a successivement

$$\mathcal{F} = \frac{H. OR. OS \sin \epsilon}{E' \lambda \xi} = \frac{H}{E'} \frac{\sin \epsilon}{\sin \theta \sin \theta'},$$

d'où résulte

$$(24) \quad \mathcal{F} = R_1 \frac{\sin \epsilon}{\sin \theta \sin \theta'},$$

Remarque. — Ces formules se simplifient un peu si les coordonnées u, v forment un système conjugué.

7. Application. — Nous nous bornerons à faire de la formule (27) l'application signalée à la fin de la seconde Partie : la surface étant donnée par son équation cartésienne

$$z = f(x, y),$$

et le plan de référence étant représenté par l'équation

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0,$$

calculer la flexion. En appliquant la formule (27), on trouve

$$(29) \quad \mathcal{J} = \frac{(p^2 + q^2 + 1) [(\alpha + \gamma p) dx + (\beta + \gamma q) dy]}{[xs - \beta t + \gamma(ps - qs)] dx + [xs - \beta s + \gamma(pt - qs)] dy}.$$

**SUR LE DÉVELOPPEMENT
EN FRACTION CONTINUE D'UNE IRRATIONNELLE AMBIGUË
DU SECOND DEGRÉ;**

PAR M. AURIC.

Considérons une irrationnelle ω racine de l'équation du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

d'où

$$\omega = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \Delta = b^2 - 4ac.$$

Le développement en fraction continue de ω est périodique et nous pouvons écrire

$$\omega \equiv (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

La racine conjuguée $\omega' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ donne naissance au développement renversé et l'on a

$$\omega' \equiv (\lambda_n, \lambda_{n-1}, \dots, \lambda_2, \lambda_1).$$

Si l'irrationnelle ω appartient à une classe ambiguë, ces deux développements sont identiques et cela ne peut se produire que si la suite indéfinie

$$(1) \quad \dots, \lambda_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots$$

est symétrique soit par rapport à un terme λ , soit par rapport à l'intervalle compris entre deux termes consécutifs.

Nous savons que, dans le premier cas, ω est racine d'une équation de la forme

$$ax^2 + \mu ax + c = 0,$$

d'où $\omega = -\frac{\mu}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$, et nous dirons que ω est une *pseudo-fraction*.

Dans le second cas ω est racine d'une équation de la forme

$$ax^2 + bx + a = 0,$$

d'où $\omega\omega' = 1$, et nous dirons que ω est une *pseudo-unité* ⁽¹⁾.

Trois cas seulement peuvent se présenter :

A. La suite (1) est symétrique par rapport à deux intervalles : en d'autres termes il existe deux pseudo-unités distinctes équivalentes au sens de Dedekind.

B. La suite (1) est symétrique par rapport à un intervalle et par rapport à un terme, ce qui se présentera évidemment si la période renferme un nombre impair de termes.

C. La suite (1) est symétrique par rapport à deux termes, c'est-à-dire qu'il existe deux pseudo-fractions équivalentes.

Nous allons examiner successivement chacun de ces cas et nous verrons que, si l'on appelle t , u la plus petite solution de l'équation de Fermat

$$t^2 - \Delta u^2 = 4,$$

la nature de la suite (1) dépend exclusivement de la décomposition en facteurs des deux nombres $t + 2$ et $t - 2$.

(1) Voir *Journal de M. Jordan*, 1903, p. 416. La distinction entre pseudo-fractions et pseudo-unités a pour but de faire ressortir des résultats différents au point de vue des identités arithmétiques. Mais elle n'est pas essentielle : en effet, toute période $(\dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i, \lambda_i, \lambda_{i-1}, \dots)$, symétrique par rapport à l'intervalle (λ_i, λ_i) , se ramène à la période $(\dots, \lambda_{i-1}, \pm 1 + \lambda_i, \pm 1 + \lambda_i, \lambda_{i-1}, \dots)$, qui est symétrique par rapport au terme ± 1 .

A. Appelons ω, ω_1 les deux pseudo-unités, on aura

$$\omega\omega' = \omega_1\omega'_1 = 1, \quad \omega_1 = \frac{A\omega - B}{C\omega - D},$$

avec

$$BC - AD = 1.$$

Cette relation subsiste évidemment si l'on remplace chaque irrationnelle par son inverse, ce qui donne

$$\frac{1}{\omega_1} = \frac{A - B\omega}{C - D\omega},$$

d'où en substituant on obtient les deux relations :

$$\omega = \frac{(A^2 - C^2)\omega - (AB - CD)}{(AB - CD)\omega - (B^2 - D^2)}, \quad \omega_1 = \frac{(A^2 - B^2)\omega_1 - (AC - BD)}{(AC - BD)\omega_1 - (C^2 - D^2)}$$

qui donnent sous une forme explicite les équations dont ω et ω_1 sont racines.

La quantité placée sous le radical est égale à

$$(B^2 + C^2 - A^2 - D^2)^2 - 4,$$

ce qui permet d'écrire

$$B^2 + C^2 - A^2 - D^2 = t$$

et, comme $BC - AD = 1$, il vient

$$t + 2 = (B + C)^2 - (A + D)^2 = (B + C + A + D)(B + C - A - D),$$

$$t - 2 = (B - C)^2 - (A - D)^2 = (B - C + A - D)(B - C - A + D).$$

Si $t + 2 = mn$ et $t - 2 = pq$ sont des décompositions acceptables on aura évidemment

$$B = \frac{m + n + p + q}{4}, \quad A = \frac{m - n + p - q}{4},$$

$$C = \frac{m + n - p - q}{4}, \quad D = \frac{m - n - p + q}{4}.$$

B. Admettons en second lieu que l'on ait

$$\omega\omega' = 1, \quad \omega_1 + \omega'_1 = \lambda, \quad \omega_1 = \frac{A\omega - B}{C\omega - D}$$

avec

$$BC - AD = 1.$$

On trouvera comme seconde relation

$$\lambda - \omega_1 = \frac{A - B\omega}{C - D\omega}$$

et en éliminant il viendra

$$\omega = \frac{D(2B - D\lambda)\omega - (BC + AD - CD\lambda)}{(BC + AD - CD\lambda)\omega - C(2A - C\lambda)},$$

$$\omega_1 = \lambda - \frac{(AC - BD)\omega_1 - (A^2 - B^2)}{(C^2 - D^2)\omega_1 - (AC - BD)}.$$

La quantité placée sous le radical sera égale à

$$[\lambda(C^2 - D^2) - 2(AC - BD)]^2 - 4,$$

d'où l'on peut poser

$$\lambda(C^2 - D^2) - 2AC + 2BD = t$$

et par suite, en tenant compte de $BC - AD = 1$,

$$t + 2 = (C + D)[\lambda(C - D) - 2A + 2B],$$

$$t - 2 = (C - D)[\lambda(C + D) - 2A - 2B].$$

Si les décompositions $t + 2 = mn$, $t - 2 = pq$ sont acceptables, on aura

$$C = \frac{m+p}{2}, \quad A = \frac{\lambda m - n - q}{4}, \quad D = \frac{m-p}{2}, \quad B = \frac{\lambda p + n - q}{4}.$$

Remarquons que l'on peut mettre le produit $t\lambda$ sous la forme d'une somme algébrique de quatre carrés

$$t\lambda = B^2 + (C\lambda - A)^2 - A^2 - (D\lambda - B)^2$$

avec

$$B(C\lambda - A) - A(D\lambda - B) = \lambda.$$

C. Admettons, enfin, que l'on ait

$$\omega + \omega' = \lambda, \quad \omega_1 + \omega'_1 = \lambda_1, \quad \omega_1 = \frac{A\omega - B}{C\omega - D}$$

avec

$$BC - AD = 1.$$

On aura comme seconde relation

$$\lambda_1 - \omega_1 = \frac{A(\lambda - \omega) - B}{C(\lambda - \omega) - D},$$

et, par suite, en éliminant,

$$\omega = \lambda - \frac{(CD\lambda_1 - BC - AD)\omega - D(D\lambda_1 - 2B)}{C(C\lambda_1 - 2A)\omega - (CD\lambda_1 - BC - AD)},$$

$$\omega_1 = \lambda_1 - \frac{(AC\lambda - BC - AD)\omega_1 - A(A\lambda - 2B)}{C(C\lambda - 2D)\omega_1 - (AC\lambda - BC - AD)}.$$

La quantité placée sous le radical est

$$(C^2\lambda\lambda_1 - 2AC\lambda - 2DC\lambda_1 + 2BC + 2AD)^2 - 4,$$

ce qui permet de poser

$$C^2\lambda\lambda_1 - 2AC\lambda - 2DC\lambda_1 + 2BC + 2AD = t$$

et, par suite, puisque $BC - AD = t$,

$$t + 2 = C(C\lambda\lambda_1 - 2A\lambda - 2D\lambda_1 + 4B),$$

$$t - 2 = (C\lambda_1 - 2A)(C\lambda - 2D),$$

et, si l'on pose encore $t + 2 = mn$, $t - 2 = pq$, il viendra

$$C = m, \quad A = \frac{m\lambda_1 - p}{2}, \quad D = \frac{m\lambda - q}{2}, \quad B = \frac{m\lambda\lambda_1 - p\lambda - q\lambda_1 + n}{4}.$$

Enfin, nous remarquerons que l'on peut mettre le produit $t\lambda\lambda_1$ sous la forme d'une somme algébrique de quatre carrés

$$t\lambda\lambda_1 = B^2 + (C\lambda\lambda_1 - A\lambda - D\lambda_1 + B)^2 - (A\lambda - B)^2 - (D\lambda_1 - B)^2$$

avec

$$B(C\lambda\lambda_1 - A\lambda - D\lambda_1 + B) - (A\lambda - B)(D\lambda_1 - B) = \lambda\lambda_1.$$

Il sera possible de déduire de nombreuses identités arithmétiques des formules que nous venons d'établir.

NOTE SUR LES ÉQUATIONS $x^2 - ay^2 = 1$ ET $x^2 - ay^2 = -1$;

PAR M. B. NIEWENGLOWSKI.

1. On sait que l'équation

$$(1) \quad x^2 - ay^2 = 1,$$

dans laquelle a est un entier non carré, a une infinité de solutions entières. Si x et y sont deux entiers positifs vérifiant l'équation, $\frac{x}{y}$ est une réduite de rang pair du développement de $\sqrt{a}$ en fraction continue.

2. Soit x_1, y_1 une solution entière positive de l'équation (1), telle que $x_1 > 1$, et soient α, β les racines de l'équation

$$(2) \quad x^2 - 2x_1x + 1 = 0,$$

en posant

$$(3) \quad x_n = \frac{\alpha^n + \beta^n}{2}, \quad y_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{2\sqrt{a}} \quad (\alpha > \beta);$$

x_n, y_n sera une solution entière de (1). Si x_1, y_1 désigne la plus petite solution entière et positive de l'équation considérée, on démontre aisément que les formules (3) donnent toutes les solutions entières positives de la même équation.

On calcule ces solutions par les formules de récurrence

$$(4) \quad \begin{cases} x_{n+1} = 2x_1x_n - x_{n-1}, \\ y_{n+1} = 2x_1y_n - y_{n-1}. \end{cases}$$

3. L'équation (1) représente, en axes rectangulaires, une hyperbole de sommets $(1, 0)$ et $(-1, 0)$. Nous appellerons *points entiers* les points de cette hyperbole ayant pour coordonnées des nombres entiers.

On établit facilement les propriétés suivantes de ces points. Si M et M' sont deux points entiers, la parallèle à la tangente en M' menée par M rencontre une seconde fois l'hyperbole (1) en un

point entier M'' . Si M et M' sont sur une même branche et que l'arc MM' ne possède aucun autre point entier que ses extrémités, nous dirons que M et M' sont des points entiers consécutifs; alors M' et M'' sont aussi des points entiers consécutifs.

Soient $A(1, 0)$ le sommet, $A_1(x_1, y_1)$ le premier point entier à coordonnées positives; la parallèle menée par A à la tangente en A_1 donnera le point $A_2(x_2, y_2)$; la corde $A_1 A_2$ sera parallèle à la tangente en A_2 , etc., et l'on obtiendra ainsi tous les points à coordonnées entières et positives. Par symétrie, on aura tous les points entiers à coordonnées positives ou négatives.

Au moyen de ces remarques, on voit par exemple que, si x', y' est une solution entière, les formules

$$x = 2x'^2 - 1, \quad y = 2x'y'$$

en fournissent une nouvelle. De même

$$x = 4x'^3 - 3x', \quad y = 4xy'^3 + 3y', \quad \dots,$$

formules qu'on obtient aisément à l'aide des équations (4).

On peut encore remarquer qu'il y a une infinité de manières de distribuer les points entiers deux à deux sur des cordes parallèles.

4. L'équation $x^2 - an^2y^2 = 1$ a une infinité de solutions entières. Soit x', y' l'une d'elles; alors x', ny' est une solution de l'équation (1). Donc cette équation (1) a une infinité de solutions x, y telles que y soit un multiple d'un entier n donné arbitrairement.

5. Occupons-nous maintenant de l'équation

$$(1) \quad x^2 - ay^2 = -1.$$

Elle n'a pas toujours de solutions entières. Si elle en a, elle en a une infinité et, si l'on désigne l'une quelconque par ξ, η , la fraction $\frac{\xi}{\eta}$ est une réduite de rang impair du développement de $\sqrt{a}$. En outre, si ξ_1, η_1 désigne la solution entière positive composée des plus petits entiers possibles, on a $\xi_1 > 1$ et en outre

$$\xi_1 < x_1, \quad \eta_1 < y_1.$$

Soient γ, δ les racines de l'équation

$$(2)' \quad x^2 - 2\xi_1 x - 1 = 0;$$

si l'on pose

$$(3)' \quad \xi_n = \frac{\gamma^n + \delta^n}{2}, \quad \eta_n = \frac{\gamma^n - \delta^n}{2\sqrt{\alpha}} \quad (\gamma > \delta),$$

on aura

$$\xi_n^2 - \alpha \eta_n^2 = \varepsilon,$$

ε étant égal à $+1$ ou à -1 , suivant que n est pair ou impair.

On a

$$(4)' \quad \begin{cases} \xi_{n+1} = 2\xi_1 \xi_n + \xi_{n-1}, \\ \eta_{n+1} = 2\xi_1 \eta_n + \eta_{n-1}. \end{cases}$$

On obtient ainsi, en remarquant que $\xi_0 = 1, \eta_0 = 0$,

$$\xi_2 = 2\xi_1^2 + 1,$$

$$\eta_2 = 2\xi_1 \eta_1,$$

d'où

$$\xi_1 = \sqrt{\frac{\xi_2 - 1}{2}}, \quad \eta_1 = \sqrt{\frac{\xi_2 + 1}{2\alpha}}.$$

Plus généralement, si l'on pose

$$(5) \quad \xi = \sqrt{\frac{x-1}{2}}, \quad \eta = \sqrt{\frac{x+1}{2\alpha}},$$

ou, inversement,

$$(6) \quad x = 2\xi^2 + 1, \quad y = 2\xi\eta,$$

si les formules (5) attribuent à ξ, η des valeurs entières, ξ, η sera une solution de l'équation (1)'. D'autre part, si ξ, η est une solution entière de (1)', les formules (6) donnent pour x, y des valeurs entières vérifiant l'équation (1).

Or,

$$\eta_2 = 2\xi_1 \eta_1 < 2x_1 y_1,$$

c'est-à-dire

$$\eta_2 < y_2.$$

Mais

$$\xi_2^2 - \alpha \eta_2^2 = 1;$$

donc

$$\xi_2 = x_1, \quad \eta_2 = y_1.$$

La relation
 peut donc s'écrire
 et de même

$$\xi_2 = 2\xi_1^2 + 1$$

$$x_1 = 2\xi_1^2 + 1,$$

$$y_1 = 2\xi_1 \eta_1.$$

De là cette conséquence : *pour que l'équation*

$$x^2 - ay^2 = -1$$

ait des solutions entières, il faut et il suffit que la plus petite solution positive entière autre que 1, 0 de l'équation (1) soit de la forme

$$x_1 = 1 + 2u^2,$$

$$y_1 = 2uv,$$

et alors $\xi_1 = u, \eta_1 = v.$

6. Cela posé, des formules

$$\xi_{p+2} = 2\xi_1 \xi_{p+1} + \xi_p,$$

$$\xi_{p+1} = 2\xi_1 \xi_p + \xi_{p-1},$$

$$\xi_p = 2\xi_1 \xi_{p-1} + \xi_{p-2}$$

on tire

$$(7) \quad \xi_{p+2} = 2x_1 \xi_p - \xi_{p-2}$$

et de même

$$(7)' \quad \eta_{p+2} = 2x_1 \eta_p - \eta_{p-2}.$$

Si nous supposons p impair, $\xi_{p-2}, \eta_{p-2}; \xi_p, \eta_p; \xi_{p+2}, \eta_{p+2}$ sont trois solutions de (1)' fournies par les formules (3)'; désignons-les par

$$x'_{n-1}, y'_{n-1}; x'_n, y'_n; x'_{n+1}, y'_{n+1}.$$

Nous aurons ainsi

$$(8) \quad \begin{cases} x'_{n+1} = 2x_1 x'_n - x'_{n-1}, \\ y'_{n+1} = 2x_1 y'_n - y'_{n-1}. \end{cases}$$

Ces formules ne peuvent servir qu'à partir de $n = 2$.

On a donc

$$x'_3 = 2x_1 x'_2 - x'_1,$$

$$y'_3 = 2x_1 y'_2 - y'_1.$$

D'ailleurs,

$$\xi_3 = 2\xi_1\xi_2 + \xi_1$$

ou

$$x'_2 = (2x_1 + 1)x'_1,$$

et de même

$$y'_2 = 2x'_1y_1 + y'_1.$$

Cela étant, on déduit des formules (8)

$$x'_{n+1}y'_n - x'_ny'_{n+1} = x'_ny'_{n-1} - y'_nx'_{n-1},$$

et par suite, de proche en proche, on arrive à

$$x'_{n+1}y'_n - x'_ny'_{n+1} = x'_2y'_1 - x'_1y'_2,$$

$$x'_{n+1}y'_n - x'_ny'_{n+1} = 2x'_1(x_1y'_1 - x'_1y_1),$$

ou enfin

$$x'_{n+1}y'_n - x'_ny'_{n+1} = y_1.$$

7. Je dis maintenant que nous avons obtenu toutes les solutions entières de l'équation (1)'. En effet, soit x' , y' une solution différente de celles que nous avons trouvées. On voit immédiatement que x' est compris entre deux valeurs telles que x'_n et x'_{n+1} , et y' entre y'_n et y'_{n+1} .

Si l'on pose

$$x = x'x'_{n+1} - ay'y'_{n+1},$$

$$y = y'x'_{n+1} - x'y'_{n+1},$$

x, y sera une solution de l'équation (1).

Or,

$$y = (x'_{n+1} - y'_{n+1}\sqrt{a})y' - (x' - y'\sqrt{a})y'_{n+1}$$

ou

$$y = \frac{y'_{n+1}}{x' + y'\sqrt{a}} - \frac{y'}{x'_{n+1} + y'_{n+1}\sqrt{a}} > 0.$$

D'autre part, nous avons trouvé

$$x'_{n+1}y'_n - x'_ny'_{n+1} = y_1,$$

ce qui peut s'écrire

$$y_1 = (x'_{n+1} - y'_{n+1}\sqrt{a})y'_n - (x'_n - y'_n\sqrt{a})y'_{n+1},$$

ou encore

$$y_1 = \frac{y'_{n+1}}{x'_n + y'_n\sqrt{a}} - \frac{y'_n}{x'_{n+1} + y'_{n+1}\sqrt{a}},$$

ce qui donne, par comparaison,

$$0 < y < y_1,$$

ce qui est impossible.

8. Reprenons les relations (7), (7)' et supposons maintenant que p soit pair. Alors, ξ_{p-2} , ξ_p , ξ_{p+2} sont trois solutions de l'équation (1) et, si on les désigne par x_{n-1} , x_n , x_{n+1} , on aura entre ces quantités les relations (4).

Donc, en réunissant les résultats obtenus, on voit que, si l'équation (1)' a des solutions, les formules (4)' donnent alternativement toutes les solutions de l'équation (1)' et de l'équation (1), pourvu que ξ_1 , η_1 désigne la plus petite solution positive entière de (1)'.

9. Remarquons enfin que les points entiers de l'hyperbole représentée par l'équation (1)' ont des propriétés analogues à ceux de sa conjuguée; mais les sommets de (1)' ne sont pas des points entiers.

SUR L'EXTINCTION DU FROTTEMENT;

PAR M. PAUL APPELL.

Dans un intéressant article publié dans ce Recueil (1), M. Lecomte a étudié, sur un exemple assez général, le problème de l'extinction du frottement.

1. Je me propose d'étudier la même question pour un système matériel présentant les caractères suivants, qui se trouvent réalisés dans la plupart des systèmes usuels.

1° Le système considéré est d'abord assujéti à des liaisons quelconques, sans frottement, indépendantes de temps;

2° Il est soumis à des forces intérieures dérivant d'un potentiel Π qui est positif dans toutes les configurations possibles du système

(1) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXXV, p. 3, 1907.

et qui devient *nul* dans une configuration spéciale, constituant une configuration d'équilibre stable du système sous l'action des seules forces intérieures;

3° Le système est en contact avec des solides fixes $S_1, S_2, \dots, S_p$, sur lesquels il glisse avec frottement;

4° Il est soumis enfin à d'autres forces extérieures dérivant d'une fonction U , qui reste inférieure à une limite fixe L , pour toutes les positions du système dans lesquelles le contact subsiste avec l'un au moins des corps $S_1, S_2, \dots, S_p$.

II. Le système étant ainsi défini, le théorème des forces vives donne l'équation

$$(1) \quad d(T + \Pi - U) = -f_1 N_1 v_1 dt - f_2 N_2 v_2 dt - \dots - f_p N_p v_p dt,$$

où T est la demi-force vive, où $f_1, f_2, \dots, f_p$ sont les coefficients de frottement, $N_1, N_2, \dots, N_p$ les valeurs absolues des réactions normales, $v_1, v_2, \dots, v_p$ les valeurs absolues des vitesses des points matériels en contact avec les solides $S_1, S_2, \dots, S_p$.

On déduit de cette équation la conséquence suivante :

Si les réactions restent finies, il est impossible que l'un quelconque des produits $N_1 v_1, N_2 v_2, \dots, N_p v_p$, ainsi que la somme $\Sigma f N v$, ait une limite inférieure autre que zéro.

En effet, supposons, par exemple, que pour les valeurs croissantes du temps t , $N_k v_k$ reste supérieur à un nombre positif fixe λ , différent de zéro. On aura

$$\frac{d}{dt}(T + \Pi - U) < -\lambda f_k,$$

d'où, en intégrant,

$$T + \Pi - U < -\lambda f_k t + C;$$

comme, par hypothèse, U est limité, $U < L$, tant que le système est en contact avec S_k , on a

$$T + \Pi < -\lambda f_k t + C + L.$$

Mais alors, au bout d'un temps t suffisamment grand, $T + \Pi$ deviendrait *nul*, et les vitesses de tous les points du système

s'annuleraient dans la configuration d'équilibre stable correspondant à $\Pi = 0$.

Ce résultat est en contradiction avec l'hypothèse faite

$$N_k v_k > \lambda,$$

car, puisque les vitesses s'annulent, v_k tend vers zéro et N_k est supposé fini.

Les limites inférieures de tous les produits $N_1 v_1, N_2 v_2, \dots, N_p v_p$ et de la somme $\sum f N v$ sont donc nulles.

Il arrivera, en général, que ces produits tendront tous vers zéro. Donc, certaines des réactions, $N_1, N_2, \dots, N_k$, par exemple, tendront vers zéro; le système tendra à abandonner les liaisons avec frottement d'où proviennent ces réactions. En même temps les vitesses des autres points frottants $v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_p$ tendront vers zéro et les glissements correspondants tendront à disparaître.

Le système, dans son ensemble, cherchera donc bien à échapper au frottement.

Ces considérations s'étendent au cas où les corps du système frottent les uns sur les autres. Je laisse à d'autres, qui auront plus de loisirs que moi, le soin de les généraliser et de les préciser.

SUR LE PROBLÈME DES MULTIPLICATEURS RÉCIPROQUES;

PAR M. C. POPOVICI.

1. A propos de la théorie des derniers multiplicateurs, on peut formuler le problème suivant : *Quels sont les systèmes d'équations*

$$(I) \quad \frac{dx_1}{A_1} = \frac{dx_2}{A_2} = \dots = \frac{dx_n}{A_n},$$

$$(II) \quad \frac{dx_1}{f_1} = \frac{dx_2}{f_2} = \dots = \frac{dx_n}{f_n},$$

tels que les coefficients d'un système soient les multiplicateurs

de l'autre? C'est ce qu'on pourrait appeler le *problème des multiplicateurs réciproques*.

Pour le traiter, il faut résoudre le système de $2(n-1)$ équations :

$$(III) \quad \begin{cases} A_1 \frac{\partial f_k}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial f_k}{\partial x_2} + \dots + A_n \frac{\partial f_k}{\partial x_n} + f_k \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial A_n}{\partial x_n} \right) = 0, \\ f_1 \frac{\partial A_k}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial A_k}{\partial x_2} + \dots + f_n \frac{\partial A_k}{\partial x_n} + A_k \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right) = 0 \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Nous ne considérerons que le cas de deux variables. Dans ce cas, les derniers multiplicateurs sont en même temps facteurs intégrants.

Deux questions se posent :

1° *Quels sont les deux groupes de facteurs intégrants réciproques A, B; f, φ?*

2° *Quelles sont les intégrales que l'on obtient avec ces facteurs?*

Nous résoudrons les deux questions en même temps.

2. Pour traiter la première, il faut intégrer le système

$$(1) \quad \begin{cases} A \frac{\partial f}{\partial x} + B \frac{\partial f}{\partial y} + f \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} \right) = 0, & f \frac{\partial A}{\partial x} + \varphi \frac{\partial A}{\partial y} + A \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = 0, \\ A \frac{\partial \varphi}{\partial x} + B \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \varphi \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} \right) = 0, & f \frac{\partial B}{\partial x} + \varphi \frac{\partial B}{\partial y} + B \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = 0. \end{cases}$$

En ce qui regarde la deuxième question, il faut remarquer que, si l'on fait

$$\frac{A}{B} = u, \quad \frac{f}{\varphi} = v,$$

on a

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dx}{u} = dy & \text{pour } v = \text{const.}; \\ \frac{dx}{v} = dy & \text{pour } u = \text{const.} \end{cases}$$

Il s'ensuit que chaque intégrale obtenue avec la combinaison $A dy - B dx$ sera une fonction de v et chaque intégrale obtenue avec la combinaison $f dy - \varphi dx$ sera une fonction de u ; par

conséquent, on aura

$$(3) \quad \begin{cases} z(v) = \int f(A dy - B dx), & t(u) = \int A(f dy - \varphi dx); \\ \zeta(v) = \int \varphi(A dy - B dx), & \tau(u) = \int B(f dy - \varphi dx). \end{cases}$$

Maintenant, si nous égalons les premiers membres de celles des équations (1) qui sont écrites sur une même ligne, nous obtenons

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial y} Bf = \frac{\partial}{\partial y} A\varphi, \quad \frac{\partial}{\partial x} Bf = \frac{\partial}{\partial x} A\varphi.$$

Donc

$$(5) \quad A\varphi - Bf = \text{const.} = k,$$

ce qui revient à

$$u - v = \frac{k}{B\varphi},$$

et, en vertu des équations (3),

$$(6) \quad \begin{cases} kx = z(v) - t(u), \\ ky = \zeta(v) - \tau(u). \end{cases}$$

Ces formules font voir que les courbes $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$ sont des courbes de translation, ce qui résulte aussi des équations (2).

En vertu des équations (2), on peut écrire

$$(7) \quad uv'_x + v'_y = 0, \quad vu'_x + u'_y = 0,$$

d'où, par élimination de v ,

$$(8) \quad u = - \frac{\frac{\partial}{\partial y} \frac{u'_y}{u'_x}}{\frac{\partial}{\partial x} \frac{u'_y}{u'_x}}.$$

Pour intégrer cette équation, remarquons qu'en vertu des équations (2) et (6), on a

$$(9) \quad \frac{z'(v)}{\zeta'(v)} = v, \quad \frac{t'(u)}{\tau'(u)} = u.$$

Donc, si l'on fait $k = 1$, il viendra

$$(10) \quad \begin{cases} x = \int v \zeta'(v) dv - \int u \tau'(u) du, \\ y = \zeta(v) - \tau(u), \end{cases}$$

ou, en éliminant v ,

$$(11) \quad x + u \tau(u) - \int \tau(u) du = \pi[y + \tau(u)],$$

qui est l'intégrale générale de l'équation (8). On tirera v de la seconde équation (7).

L'intégration du système (1) est terminée si l'on se souvient que nous avons encore obtenu l'intégrale (5). En effet, les équations (4) et (7) sont équivalentes au système (1).

Il est intéressant de remarquer que les fonctions ζ et τ peuvent être prises arbitrairement, en tant qu'elles sont regardées comme fonctions de v et u ; mais, si on les regarde ensuite comme fonctions de x et y , elles ne sont plus arbitraires. En effet, les équations (3) nous donnent

$$\zeta'_x = \tau'_x = -B\varphi.$$

On voit que le problème dépend de trois fonctions arbitraires. Supposons que l'on se donne, par exemple, B , ζ et τ ; alors les équations (10) donnent u et v , l'équation (5) fait connaître φ ; puis on a $A = Bu$, $f = \varphi v$ et enfin z et t par les équations (9).

Si l'on se donne d'avance les équations

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B}, \quad \frac{dx}{f} = \frac{dy}{\varphi},$$

ce sont les équations (5) et (7) qui permettent de reconnaître si les coefficients sont des multiplicateurs réciproques.

3. On peut résoudre un problème plus général : *Déterminer les fonctions u et v telles que l'on ait*

$$\frac{dx}{\lambda(u)} = dy \quad \text{pour } v = \text{const.}; \quad \frac{dx}{\mu(v)} = dy \quad \text{pour } u = \text{const.}$$

Il faut intégrer le système

$$(7') \quad \lambda(u)v'_x + v'_y = 0, \quad \mu(v)u'_x + u'_y = 0,$$

qui nous conduit à l'équation

$$\lambda(u) = D^2(u),$$

D désignant le symbole $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x}$.

Le problème est le même; car, si u est une intégrale de l'équation $dx = v dy$, $\lambda(u)$ en sera une aussi; de même $\mu(v)$ sera comme v une intégrale de l'équation $dx = u dy$.

Faisons donc $\lambda(u) = U$ et $\mu(v) = V$; le système (γ') se réduit à

$$UV'_x + V'_y = 0, \quad VU'_x + U'_y = 0,$$

dont nous avons trouvé l'intégrale générale. En passant de U à u , on a, pour cette dernière fonction,

$$(11') \quad x - \lambda(u)T(u) + \int T(u) du = \pi[y - T(u)].$$

On pourrait trouver encore cette solution en remarquant que, d'après les équations (γ') , les courbes u et v sont des courbes de translation. Dès lors on doit avoir

$$x = z(v) + t(u),$$

$$y = \zeta(v) + \tau(u),$$

avec

$$\frac{z'(v)}{\zeta'(v)} = \mu(v), \quad \frac{t'(u)}{\tau'(u)} = \lambda(u).$$

4. Une question plus générale encore, que nous allons formuler, conduit à une équation de la forme

$$(12) \quad H(z, t) = \frac{P(z, t)q + \frac{\partial t}{\partial y}}{P(z, t)p + \frac{\partial t}{\partial x}}, \quad t = \frac{q}{p},$$

que nous pourrions étudier et même intégrer dans certains cas en la réduisant à l'équation classique de Laplace

$$s + ap + bq = 0,$$

où a et b ne dépendent que de x et y .

Nous avons intégré l'équation (12) dans le cas où P est nul et H fonction de z ; son intégrale générale est exprimée par la relation (11').

On arrive à cette équation quand on se propose de trouver les fonctions u et v telles que l'on ait

$$\frac{dx}{\lambda(u, v)} = dy \quad \text{pour } v = \text{const.}; \quad \frac{dx}{\mu(u, v)} = dy \quad \text{pour } u = \text{const.}$$

Pour cela il faut intégrer le système

$$(13) \quad \lambda(u, v)v'_x + v'_y = 0, \quad \mu(u, v)u'_x + u'_y = 0.$$

De la deuxième équation on tire

$$v = F(u, t), \quad t = \frac{u'_y}{u'_x},$$

et en remplaçant dans la première on obtient l'équation (12) où z représente la fonction u .

Réciproquement, on peut revenir de l'équation (12) au système (13) si l'on intègre l'équation

$$\frac{du}{dt} = P(u, t).$$

Essayons maintenant d'intégrer le système (13).

Remarquons que $\varphi(v)$ et $f(u)$ seront comme u et v des intégrales respectives des équations (13). Nous pourrions donc user des substitutions $U = f(u)$, $V = \varphi(v)$ pour simplifier les expressions de λ et de μ .

Au lieu de chercher u et v en fonction de x et y , cherchons x et y en fonction de u et v . A cet effet, posons

$$(14) \quad x = \pi(u, v), \quad y = \varpi(u, v).$$

Faisons successivement $v = \text{const.}$, $u = \text{const.}$; nous trouvons

$$\frac{\pi'_u}{\varpi'_u} = \lambda(u, v), \quad \frac{\pi'_v}{\varpi'_v} = \mu(u, v).$$

Donc, si l'on connaît la fonction ϖ , on aura

$$(15) \quad \pi(u, v) = \int_{u_0}^u \lambda \varpi'_u du + \int_{v_0}^v \mu \varpi'_v dv.$$

Exprimons que le second membre est intégrable; nous arrivons à

$$(16) \quad \varpi''_{uv} + \frac{\lambda'_v}{\lambda - \mu} \varpi'_u - \frac{\mu'_u}{\lambda - \mu} \varpi'_v = 0,$$

ce qui est une équation de Laplace. Supposons que l'on connaisse l'intégrale de l'équation (16); alors on aura l'expression de ϖ avec deux fonctions arbitraires, puis π ; les équations (14) nous donneront enfin la solution générale du système (13).

5. **EXEMPLE I.** — On suppose λ fonction de u et μ fonction de v . On a

$$\begin{aligned} \varpi''_{uv} &= 0, \\ \gamma &= \varpi(u, v) = \zeta(v) - \tau(u). \end{aligned}$$

On retombe sur une solution connue que nous avons exprimée par la formule (11').

6. **EXEMPLE II.** — On suppose $\lambda = \mu$. Les équations (13) donnent alors

$$\frac{u'_y}{u'_x} = \frac{v'_y}{v'_x}, \quad v = \varphi(u).$$

Les deux équations (13) se réduisent à une seule

$$\lambda[u, \varphi(u)] u'_x + u'_y = 0.$$

et il n'y a pas lieu de chercher x et y . On a

$$x - \lambda[u, \varphi(u)] \gamma = \pi(u),$$

avec deux fonctions arbitraires φ et π .

7. **EXEMPLE III.** — On se donne le système

$$f(u)^{n'-1} \varphi(v)^n v'_x + v'_y = 0, \quad f(u)^{n'} \varphi(v)^{n-1} u'_x + u'_y = 0.$$

Cet exemple contient comme cas particulier l'exemple I pour $n = n' = 0$ et aussi le cas $\lambda = \varphi(v)$, $\mu = f(u)$ pour $n = n' = 1$.

Par un changement de variables on est ramené aux équations

$$u^{n'-1} v^n v'_x + v'_y = 0, \quad u^{n'} v^n u'_x + u'_y = 0.$$

La détermination de y dépend de l'équation

$$w''_{uv} + \frac{n}{v-u} w'_v - \frac{n'}{v-u} w'_u = 0,$$

qui est l'équation d'Euler et de Poisson. Son intégrale générale est donnée par la formule

$$y = w(u, v) = \int_{u_0}^u \frac{f_1(\alpha) d\alpha}{(u-\alpha)^{n'}(v-\alpha)^n} + \int_{v_0}^v \frac{f_2(\beta) d\beta}{(u_0-\beta)^n(v-\beta)^{n'}}.$$

On aura par suite pour x

$$x = \pi(u, v) = \int_{u_0}^u \frac{u^{n'-1} v^n f_1(\alpha) d\alpha}{(u-\alpha)^{n'}(v-\alpha)^n} + \int_{v_0}^v \frac{u^{n'} v^{n-1} f_2(\beta) d\beta}{(u_0-\beta)^n(v-\beta)^{n'}}.$$

Pour nous rendre compte de la généralité de la méthode, remarquons que les fonctions ainsi trouvées ne sont pas seulement les intégrales générales du système proposé; mais aussi d'une infinité d'autres; à savoir ceux dans lesquels le couple λ, μ satisfait aux équations

$$\frac{\lambda'_v}{\lambda - \mu} = \frac{n}{v-u}, \quad \frac{\mu'_u}{\lambda - \mu} = \frac{n'}{v-u}.$$

Éliminant μ entre ces équations, on trouve

$$\lambda''_{uv} - \frac{n}{v-u} \lambda'_u + \frac{n'-1}{v-u} \lambda'_v = 0.$$

Donc les solutions ci-dessus satisferont à une double infinité de systèmes de la forme (13), dans lesquels on a

$$\lambda = \int_{u_0}^u \frac{\varphi_1(\alpha) d\alpha}{(u-\alpha)^{1-n'}(v-\alpha)^{-n}} + \int_{v_0}^v \frac{\varphi_2(\beta) d\beta}{(u_0-\beta)^{1-n'}(v-\beta)^{-n}}.$$

**NOTE AU SUJET DE CERTAINES DISCONTINUITÉS APPARENTES
DANS LES MOUVEMENTS
OÙ INTERVIENT LE FROTTEMENT DE GLISSEMENT;**

PAR M. DE SPARRE.

Dans une Note publiée, l'an *passé*, dans le *Bulletin de la Société mathématique*, j'ai fait voir que l'on arrive sans peine à lever l'ambiguïté apparente à laquelle peut conduire l'emploi des lois de Coulomb, en tenant compte de la continuité du mouvement.

Il existe toutefois certains problèmes où l'application de ces lois semble conduire, ainsi que je vais le faire voir, à un mouvement discontinu, ce qui paraît à première vue absurde. Toutefois, si l'on examine la question de plus près, on voit que la solution à laquelle on est conduit est au lieu de cela fort rationnelle, et que là encore les lois de Coulomb donnent une image, approchée sans doute, mais somme toute très satisfaisante des phénomènes. La discontinuité qu'elles introduisent n'existe évidemment pas, mais elle remplace une modification très rapide des conditions du mouvement, modification que l'on peut sans inconvénients remplacer par la discontinuité en question, si l'on se propose seulement de connaître ce qui se passait avant et après la modification dont il s'agit.

C'est d'ailleurs l'hypothèse de la rigidité absolue des liaisons, qui introduit dans le cas actuel la discontinuité dont nous venons de parler, comme elle avait conduit à introduire des percussions dans les problèmes examinés par nous dans la Note que je rappelle en commençant.

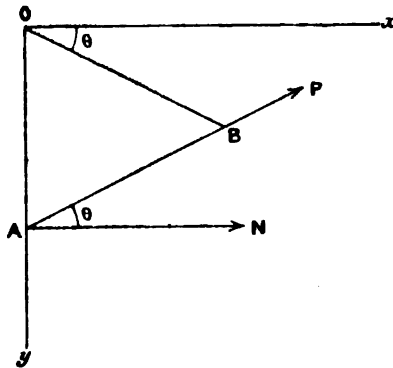
Si l'on tient compte de l'élasticité des liaisons, cette discontinuité disparaît et elle est remplacée par une modification des conditions du mouvement d'autant plus rapide que les liaisons sont plus raides, et qui, à la limite, devient instantané lorsqu'on les suppose absolument rigides.

Nous verrons aussi que, pour certains problèmes, où intervient le frottement, on peut, pour des conditions initiales données,

avoir, suivant les cas, une ou deux solutions également acceptables, le choix entre les deux solutions, lorsqu'elles existent, devant se faire en tenant compte de la façon dont les conditions initiales sont réalisées; mais, là encore, nous constaterons que ces résultats donnent une image approchée très satisfaisante des phénomènes.

I. Soient deux points matériels A et B de masse égale à 1, reliés par une tige rigide AB de masse négligeable. Le point A est de plus assujéti à décrire la verticale descendante Oy et le

Fig. 1.



point B est relié par un fil inextensible et sans masse de longueur r , égale à AB, au point fixe O, enfin le mouvement du système se fait dans le plan vertical xOy , et le point A frotte sur la droite OA, le coefficient de frottement étant f .

Puisque l'on a $OB = AB$, OB et AB font le même angle θ avec l'horizontale, le premier en dessous, le second en dessus.

Désignons par N la réaction de Oy sur le point A, posons $OA = r$ et désignons par P la pression exercée par AB sur le point A, nous aurons, pour le mouvement de A,

$$\begin{aligned} \ddot{\eta} &= g - P f \cos \theta + P \sin \theta, \\ N &= P \cos \theta. \end{aligned}$$

Puis, pour le mouvement de B,

$$r \ddot{\theta} = g \cos \theta - P \sin 2\theta.$$

On a d'ailleurs

$$\begin{aligned}\tau_i &= 2r \sin \theta, \\ \tau_i' &= 2r(\cos \theta \theta' - \sin \theta \theta'^2).\end{aligned}$$

De plus $\varepsilon = \pm 1$ et le signe doit être choisi de façon que

$$(1) \quad N \varepsilon \tau_i' > 0 \quad \text{si} \quad \tau_i' \leq 0 \quad \text{ou} \quad N \varepsilon \tau_i' > 0 \quad \text{si} \quad \tau_i' = 0.$$

On déduit des équations précédentes

$$(2) \quad r \theta'' = \frac{4r \sin^2 \theta \theta'^2 + g(3 \sin \theta - f \varepsilon \cos \theta)}{4 \sin \theta \cos^2 \theta - f \varepsilon \cos \theta + \sin \theta} \cos \theta,$$

$$(3) \quad N = \frac{g(2 \cos^2 \theta - 1) - 2r \sin \theta \theta'^2}{4 \sin \theta \cos^2 \theta - f \varepsilon \cos \theta + \sin \theta} \cos \theta;$$

ce qui peut s'écrire

$$(2') \quad r \theta'' = \frac{4r \sin^2 \theta \theta'^2 + g(3 \sin \theta - f \varepsilon \cos \theta)}{2 \sin \theta (2 \cos^2 \theta - 1) + (3 \sin \theta - f \varepsilon \cos \theta)} \cos \theta,$$

$$(3') \quad N = \frac{g(2 \cos^2 \theta - 1) - 2r \sin \theta \theta'^2}{2 \sin \theta (2 \cos^2 \theta - 1) + (3 \sin \theta - f \varepsilon \cos \theta)} \cos \theta.$$

On aura de même

$$(4) \quad \tau_i'' = 2 \frac{g \cos^2 \theta (3 \sin \theta - f \varepsilon \cos \theta) + r \theta'^2 \sin \theta (f \varepsilon \cos \theta - \sin \theta)}{2 \sin \theta (2 \cos^2 \theta - 1) + 3 \sin \theta - f \varepsilon \cos \theta}.$$

Nous supposons le système abandonné à lui-même sans vitesse initiale, il pourra d'abord se faire qu'il reste au repos; pour qu'il en soit ainsi il faut que l'on puisse avoir

$$\theta'' = \tau_i'' = \theta' = 0,$$

pour une valeur f_1 du coefficient de frottement, plus petite que f .

Il faut donc

$$f > 3 \tan \theta,$$

et la valeur correspondante de f_1 sera

$$f_1 = 3 \tan \theta,$$

ce qui donnera pour la réaction

$$N = \frac{1}{2} g \cot \theta,$$

et, par suite,

$$P = \frac{g}{2 \sin \theta}.$$

Supposons maintenant

$$f < 3 \operatorname{tang} \theta,$$

et supposons toujours le système abandonné à lui-même sans vitesse initiale.

On devra avoir, à l'instant initial,

$$N\epsilon\eta'' > 0.$$

Or, pour $\theta' = 0$, on a

$$N\epsilon\eta'' = 2 \frac{g^2 \cos^3 \theta (3 \sin \theta - f \epsilon \cos \theta) \epsilon (2 \cos^2 \theta - 1)}{(4 \sin \theta \cos^2 \theta - f \epsilon \cos \theta + \sin \theta)^2}.$$

Mais, du moment que le mouvement se produit, on a

$$3 \sin \theta > f \cos \theta,$$

la condition précédente revient donc ⁽¹⁾ à

$$\epsilon (2 \cos^2 \theta - 1) = \epsilon \cos 2 \theta > 0.$$

Donc, si $\theta_0 < 45^\circ$, on devra prendre $\epsilon = +1$; si, au lieu de cela, $\theta_0 > 45^\circ$, on devra prendre $\epsilon = -1$.

Supposons maintenant que l'on ait d'abord

$$3 \operatorname{tang} \theta_0 = f,$$

le système est encore en équilibre, et l'on a

$$N = \frac{1}{2} g \cot \theta_0,$$

$$\theta'' = 0.$$

Donnons à $\operatorname{tang} \theta_0$ une valeur tant soit peu supérieure à $\frac{1}{3} f$; si $\theta_0 < 45^\circ$, on devra conserver pour ϵ la valeur $+1$ qu'on avait dû adopter tant que le système était en équilibre, de sorte que θ'' et η'' commenceront par prendre des valeurs très petites et N aura une valeur très voisine de celle, $\frac{1}{2} g \cot \theta_0$, qu'il avait pour la position d'équilibre; en un mot, les valeurs de θ'' , η'' et N pour le mouvement

(1) Car nous supposons

$\theta < 90^\circ$.

sont la suite de celles qu'elles avaient pour le repos et il n'y a, par suite, pas de discontinuité. Supposons au lieu de cela le système d'abord en équilibre pour

$$\tan \theta_0 = \frac{1}{3} f \quad \text{avec} \quad \theta_0 > 45^\circ,$$

et que l'on donne ensuite à $\tan \theta_0$ une valeur tant soit peu supérieure à $\frac{1}{3} f$, le système se mettra en mouvement et, comme $\theta_0 > 45^\circ$, on devra prendre pour ϵ la valeur -1 , de sorte que θ'' , au lieu de prendre une valeur très petite, en prendra une sensiblement égale à

$$\frac{3 f \sin \theta_0 \cos \theta_0}{2 r \sin \theta_0 (1 + \cos^2 \theta_0)},$$

θ'' passe donc brusquement de la valeur 0 à une valeur finie et N qui, au moment de l'équilibre, était égal à

$$\frac{1}{2} f \cot \theta_0,$$

passé brusquement de cette valeur à la valeur négative

$$-\frac{f(1 - 2 \cos^2 \theta_0) \cos \theta_0}{4 \sin \theta_0 (1 + \cos^2 \theta_0)}.$$

Il y a donc là une discontinuité, qui ne peut évidemment se présenter dans les phénomènes naturels; mais nous allons voir : 1° que cette discontinuité tient à la rigidité absolue, supposée aux liaisons et qu'elle disparaît lorsqu'on tient compte de leur élasticité; 2° que les résultats fournis par la loi de Coulomb donnent en définitive une image approchée très suffisante des phénomènes, en ce sens qu'au moment où l'équilibre est rompu, le point A échappe en un temps très court au contact du guide sur lequel il s'appuyait, pour venir frotter sur l'autre, si la liaison est bilatérale, ou pour se mouvoir librement, si elle est unilatérale.

Nous supposons donc dans ce qui va suivre que la tige AB s'allonge ou se raccourcisse proportionnellement à l'effort qu'elle supporte et nous négligerons, au lieu de cela, l'allongement du fil OB ainsi que la déformation des guides.

Nous désignerons, comme plus haut, par r la longueur du fil, supposée invariable, la longueur de la tige étant alors $r + u$, et sa

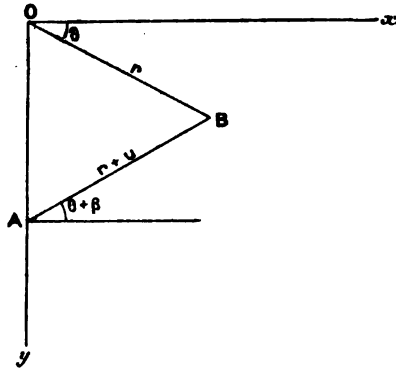
tension dans ces conditions étant

$$Q = v^2 u \quad (1),$$

où v^2 désigne une constante.

La tige ayant actuellement la longueur $r + u$, elle fait avec l'horizontale un angle $\theta + \beta$, où β est très petit, et l'on aura pour

Fig. 2.



déterminer cette quantité β , en se bornant à la partie principale,

$$(r + u) \cos(\theta + \beta) = r \cos \theta$$

ou

$$r \beta = u \cot \theta.$$

Nous aurons ensuite

$$\eta = r \sin \theta + (r + u) \sin(\theta + \beta) = 2r \sin \theta + r \beta \cos \theta + u \sin \theta$$

ou

$$\eta = 2r \sin \theta + \frac{u}{\sin \theta}.$$

Nous poserons alors

$$\zeta = \frac{u}{\sin \theta},$$

ce qui nous donnera

$$\eta = 2r \sin \theta + \zeta,$$

$$\eta' = 2r(\cos \theta \theta' - \sin \theta \theta'^2) + \zeta',$$

$$Q = v^2 \zeta \sin \theta.$$

(1) La déformation étant faible on peut, tout au moins comme première approximation, la supposer proportionnelle à la tension.

Les équations des mouvements de B et de A nous donneront donc

$$\begin{aligned} r\theta'' &= g \cos \theta + Q \sin(2\theta + \beta), \\ \eta'' &= g + Q[f \varepsilon \cos(\theta + \beta) - \sin(\theta + \beta)], \\ N &= -Q \cos(\theta + \beta); \end{aligned}$$

ou, en se bornant toujours à la partie principale,

$$\begin{aligned} (5) \quad r\theta'' &= g \cos \theta + 2v^2 \zeta \sin^2 \theta \cos \theta, \\ \eta'' &= 2r(\cos \theta \theta'' - \sin \theta \theta'^2) + \zeta'' = g + v^2 \zeta \sin \theta (f \varepsilon \cos \theta - \sin \theta), \end{aligned}$$

de sorte que les équations du mouvement seront l'équation (5) et l'équation

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} &\zeta'' + v^2 \zeta \sin \theta [4 \sin \theta \cos^2 \theta + \sin \theta - f \varepsilon \cos \theta] \\ &\quad + g(2 \cos^2 \theta - 1) - 2r \sin \theta \theta'^2 = 0, \end{aligned} \right.$$

obtenue en remplaçant θ'' par sa valeur (5) dans l'équation précédente que l'on peut écrire

$$(6') \quad \left\{ \begin{aligned} &\zeta'' + v^2 \zeta \sin \theta [3 \sin \theta - f \varepsilon \cos \theta + 2 \sin \theta (2 \cos^2 \theta - 1)] \\ &\quad + g(2 \cos^2 \theta - 1) - 2r \sin \theta \theta'^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Si l'on a

$$\tan \theta = \frac{1}{3} f, \quad \theta' = 0;$$

le système est en équilibre et l'on a

$$\zeta = -\frac{g}{2v^2 \sin^2 \theta}, \quad N = \frac{g}{2} \cot \theta.$$

Pour ces valeurs de θ et ζ le système reste en équilibre.

Donnons à θ une valeur θ_0 très peu plus grande et telle que l'on ait

$$f = 3 \tan \theta_0 \left[1 - \frac{2}{3} \alpha (1 - 2 \cos^2 \theta_0) \right],$$

en supposant $\theta_0 > 45^\circ$ et α très petit.

Si le système est maintenu en équilibre dans cette position par une très petite force verticale appliquée en A (1), on aura alors

$$\zeta_0 = -\frac{g}{2v^2 \sin^2 \theta_0};$$

(1) La force qui maintient le système en équilibre est, en y comprenant le frot-

abandonnons maintenant le système à lui-même, sans vitesse initiale et considérons un espace de temps assez court pour que nous puissions négliger la variation de θ et prendre par suite

$$\theta' = \theta'_0 = 0, \quad \theta = \theta_0.$$

Nous aurons

$$\zeta'' - 2\nu^2 \sin^2 \theta_0 (1 - 2 \cos^2 \theta_0) (1 - \alpha) \zeta - g(1 - 2 \cos^2 \theta_0) = 0.$$

Posons alors

$$2\nu^2 \sin^2 \theta_0 (1 - \alpha) (1 - 2 \cos^2 \theta_0) = K^2,$$

puisque

$$\theta_0 > 45^\circ,$$

K^2 est positif et très grand, ν^2 l'étant et il devient infini avec ν , lorsqu'on suppose la tige de plus en plus raide.

Nous aurons

$$\zeta = - \frac{g}{2\nu^2 \sin^2 \theta_0} \left(\frac{1}{1 - \alpha} + A e^{Kt} + B e^{-Kt} \right).$$

Nous avons d'ailleurs par hypothèse

$$\zeta_0 = - \frac{g}{2\nu^2 \sin^2 \theta_0}, \quad \left(\frac{d\zeta}{dt} \right)_0 = 0;$$

et l'on en conclut

$$A = B = - \frac{\alpha}{2(1 - \alpha)},$$

et par suite

$$\zeta = - \frac{g}{2\nu^2 \sin^2 \theta_0 (1 - \alpha)} \left[1 - \frac{\alpha}{2} (e^{Kt} + e^{-Kt}) \right].$$

Toutefois cette formule ne doit être appliquée que jusqu'à $\zeta = 0$. K étant très grand et, par suite, e^{-Kt} négligeable devant e^{Kt} , dès

tement,

$$N \sin \theta_0 = \frac{3g}{2},$$

la force fournie par le frottement est Nf , la force supplémentaire serait donc

$$\frac{3g}{2} - Nf = \alpha g (1 - 2 \cos^2 \theta_0),$$

elle est donc très petite avec α .

que t diffère de zéro, on aura $\zeta = 0$ sensiblement pour

$$e^{Kt} = \frac{2}{\alpha}; \quad \text{donc} \quad t = \frac{1}{K} \zeta \frac{2}{\alpha}.$$

A partir de cet instant, ζ changeant de signe, si la liaison est unilatérale (tige s'appuyant contre un mur), la tige échappera et le mouvement subséquent se fera comme si le mur n'existait pas.

Si, au lieu de cela, la liaison est bilatérale, N changera de signe; il faudra, par suite, à partir de ce moment, prendre $\varepsilon = -1$ et l'on aurait, en prenant toujours $\theta = \theta_0$, $\theta'_0 = 0$,

$$\zeta'' + v^2 \zeta \sin \theta_0 [\sin \theta_0 (4 \cos^2 \theta_0 + 1) + f \cos \theta_0] - g(1 - 2 \cos \theta_0) = 0.$$

C'est-à-dire, si l'on se borne à la partie principale, f différant très peu de $3 \tan \theta_0$,

$$\zeta'' + 4v^2 \sin^2 \theta_0 (1 + \cos^2 \theta_0) \zeta - g(1 - 2 \cos^2 \theta_0) = 0,$$

et, en posant

$$K_1^2 = 4v^2 \sin^2 \theta_0 (1 + \cos^2 \theta_0),$$

on aurait

$$\zeta = g \frac{1 - 2 \cos^2 \theta_0}{K_1^2} (1 + A \cos K_1 t + B \sin K_1 t),$$

de sorte qu'il se produirait une série d'oscillations, en réalité rapidement amorties, autour de la position moyenne

$$\zeta = g \frac{1 - 2 \cos^2 \theta_0}{K_1^2}.$$

Valeur pour laquelle on aurait

$$Q = \frac{g(1 - 2 \cos^2 \theta_0)}{4 \sin \theta_0 (1 + \cos^2 \theta_0)},$$

et par suite

$$N = -Q \cos \theta_0 = -\frac{g \cos \theta_0 (1 - 2 \cos^2 \theta_0)}{4 \sin \theta_0 (1 + \cos^2 \theta_0)},$$

ce qui est bien la valeur obtenue pour N par l'application des lois de Coulomb et sans tenir compte de l'élasticité des liaisons.

Il reste à vérifier que l'échappement ou le changement de signe de N (suivant que la liaison est unilatérale ou bilatérale) a lieu au bout d'un temps assez court pour que l'on puisse négliger la variation de θ pendant ce temps.

Or, en prenant $\theta = \theta_0$, nous avons par l'équation (5)

$$\begin{aligned} r\theta'' &= g \cos \theta_0 + 2v^2 \zeta \sin^2 \theta_0 \cos \theta_0 \\ &= g \cos \theta_0 - \frac{g \cos \theta_0}{1-\alpha} \left[1 - \frac{\alpha}{2} (e^{Kt} + e^{-Kt}) \right] \end{aligned}$$

ou

$$r\theta'' = \frac{g \alpha \cos \theta_0}{1-\alpha} \left[\frac{1}{2} (e^{Kt} + e^{-Kt}) - 1 \right];$$

on en déduit

$$r(\theta - \theta_0) = \frac{g \alpha \cos \theta_0}{1-\alpha} \left[\frac{1}{2K^2} (e^{Kt} + e^{-Kt}) - \frac{t^2}{2} \right].$$

Mais

$$e^{Kt} = \frac{2}{x}, \quad t = \frac{1}{K} \chi \frac{2}{x},$$

de sorte que

$$r(\theta - \theta_0) = \frac{g \cos \theta_0}{K^2(1-\alpha)} \left[1 - \frac{\alpha}{2} \left(\chi \frac{2}{x} \right)^2 \right].$$

Mais

$$x \chi \frac{1}{x^2}$$

est nul pour $x = 0$, de sorte que

$$\frac{\alpha}{2} \left(\chi \frac{2}{x} \right)^2 = \left(\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \chi \frac{2}{x} \right)^2$$

est très petit avec α , et l'on peut prendre par suite

$$r(\theta - \theta_0) = \frac{g \cos \theta_0}{K^2(1-\alpha)},$$

quantité très petite puisque K est très grand et qui tend vers zéro lorsque K augmente indéfiniment.

Nous remarquerons de plus que, si la liaison est unilatérale, ζ' est très petit au moment où l'échappement se produit. On a en effet

$$\zeta' = \frac{\alpha g K}{4v^2 \sin^2 \theta_0 (1-\alpha)} (e^{Kt} - e^{-Kt}),$$

soit sensiblement, puisque $K = v \sin \theta_0 \sqrt{2(1-\alpha)(1-2\cos^2 \theta_0)}$,

$$\zeta' = \frac{g \sqrt{2(1-2\cos^2 \theta_0)}}{2v \sin \theta_0 \sqrt{1-\alpha}},$$

quantité très petite et qui tend vers zéro lorsque v croît indéfiniment.

On voit donc que, s'il y a échappement, le point A peut être considéré comme s'échappant avec une vitesse nulle.

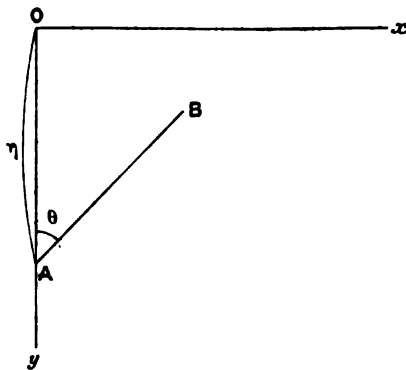
Donc, en résumé, on voit que l'application des lois de Coulomb se trouve pleinement justifiée, en ce sens que, d'une part, l'anomalie qu'elles semblent présenter par suite de la discontinuité qu'elles conduisent à admettre dans le mouvement tient uniquement à la rigidité absolue supposée aux liaisons, et que, d'autre part, sauf une période excessivement courte et sans importance, le plus souvent, elles donnent une image très satisfaisante de l'ensemble du mouvement.

II. Examinons maintenant le second problème que j'ai en vue.

Je suppose deux points matériels A et B de même masse égale à 1, reliés par une tige rigide de longueur r et de masse négligeable.

Le point A est assujéti à se mouvoir sur la verticale descendante Oy, sur laquelle il frotte, le coefficient de frottement étant

Fig. 3.



égal à f . Le point B est seulement, en plus de sa liaison au point A, assujéti à se mouvoir dans le plan vertical xOy .

Nous déterminerons la position du système par l'ordonnée η du point A et par l'angle θ que fait AB avec la verticale ascendante; nous supposons

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Soient x et y les coordonnées de B, on aura

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta, \\y &= \eta - r \cos \theta,\end{aligned}$$

et l'on en déduit

$$\begin{aligned}(7) \quad x' &= r(\cos \theta \theta' - \sin \theta \theta'^2), \\(8) \quad y' &= \eta' + r(\sin \theta \theta' + \cos \theta \theta'^2).\end{aligned}$$

Si d'ailleurs on désigne par P la compression de la tige AB et par N la réaction de Oy on aura

$$\begin{aligned}N &= P \sin \theta, \\(9) \quad \eta' &= g + P \cos \theta - P f \varepsilon \sin \theta, \\(10) \quad x' &= P \sin \theta, \\(11) \quad y' &= g - P \cos \theta;\end{aligned}$$

où $\varepsilon = \pm 1$, le signe de cette quantité étant déterminé par la condition

$$N \varepsilon \eta' > 0 \quad \text{si} \quad \eta' \leq 0,$$

et par la condition

$$N \varepsilon \eta' > 0 \quad \text{si} \quad \eta' = 0,$$

cette dernière condition revenant, puisque nous supposons $\sin \theta$ positif, à

$$P \varepsilon \eta' > 0;$$

on déduit d'ailleurs des équations (7), (8), (9), (10) et (11)

$$\sin \theta (\sin \theta \theta' + \cos \theta \theta'^2) + (\cos \theta \theta' - \sin \theta \theta'^2) (2 \cos \theta - f \varepsilon \sin \theta) = 0;$$

d'où l'on déduit

$$(12) \quad \theta' = \frac{\sin \theta \theta'^2 (\cos \theta - f \varepsilon \sin \theta)}{1 + \cos^2 \theta - f \varepsilon \sin \theta \cos \theta},$$

et ensuite

$$P \sin \theta = r(\cos \theta \theta' - \sin \theta \theta'^2),$$

c'est-à-dire, en tenant compte de (12),

$$P = - \frac{r \theta'^2}{1 + \cos^2 \theta - f \varepsilon \sin \theta \cos \theta},$$

puis

$$\eta' = g - \frac{r \theta'^2 (\cos \theta - f \varepsilon \sin \theta)}{1 + \cos^2 \theta - f \varepsilon \sin \theta \cos \theta}.$$

En considérant ces formules il semble à première vue que, dans le cas où, le système étant abandonné à lui-même, sans vitesse initiale, on a $\theta'_0 = 0$, il n'y ait qu'une solution possible, celle qui correspond à

$$\theta'' = P = 0, \quad \gamma'' = g,$$

c'est-à-dire au cas où la tige se transporte parallèlement à elle-même, sous l'influence de la pesanteur, sans être soumise à aucune action de la part de Og .

Ce mouvement est évidemment celui qui se produit si le point A a avec Oy un simple contact géométrique qui ne met pas en jeu le frottement.

Mais en sera-t-il de même si l'on a d'abord mis la tige en contact avec Og dans une position où elle fait un angle θ avec cette droite et si on la maintient au moyen d'une force verticale appliquée en A et d'une autre force perpendiculaire à sa direction appliquée en B?

On aura alors

$$\begin{aligned} P &= g \cos \theta, \\ N &= g \cos \theta \sin \theta, \end{aligned}$$

et la réaction verticale Q qu'il faudra appliquer en A, si l'on ne tient pas compte du frottement, sera

$$Q = g + g \cos^2 \theta = g(1 + \cos^2 \theta).$$

Mais, si le coefficient de frottement est tel que l'on ait

$$f > \frac{1 + \cos^2 \theta}{\cos \theta \sin \theta},$$

on pourra supprimer la force Q appliquée en A et cette force sera fournie par le frottement.

Si ensuite on rend le point B libre en supprimant la force normale qui le retenait, rien ne sera changé au début aux réactions qui s'exerçaient en A et ce point restera fixe, la tige tournant autour de lui.

D'ailleurs, puisque le point A reste fixe, on devra avoir

$$\gamma'' = g + P(\cos \theta - f_1 \sin \theta) = 0,$$

avec

$$f_1 \leq f;$$

de plus, puisque la tige tourne autour d'un point fixe, on a

$$P = g \cos \theta - r \theta'^2,$$

et par suite le point A restera fixe tant que l'on aura

$$\frac{g(1 + \cos^2 \theta) - r \theta'^2 \cos \theta}{g \cos \theta \sin \theta - r \theta'^2 \sin \theta} \leq f.$$

On verrait ensuite qu'au moment où cette inégalité se change en égalité, η'' , qui était nul jusque-là, prend brusquement une valeur finie et que N, qui était positif, devient à ce moment brusquement négatif (ou nul si la liaison est unilatérale). Il y a donc là une discontinuité apparente, mais dont l'explication, toute semblable à celle donnée pour le problème précédent, nous permettrait encore de constater que les lois de Coulomb fournissent pour l'ensemble des phénomènes une image très suffisamment approchée.

Nous ne reviendrons pas sur ce fait, car pour cela nous n'aurions, à peu de chose près, qu'à répéter ce que nous avons dit pour le problème précédent, mais nous croyons au lieu de cela devoir insister un peu sur ce qui se passe au début du mouvement.

Nous avons vu, en supposant le système abandonné sans vitesse initiale, que, si l'on a

$$f > \frac{1 + \cos^2 \theta}{\cos \theta \sin \theta},$$

le problème comporte deux solutions : 1° si la tige a avec Oy un simple contact géométrique elle se transporte parallèlement à elle-même; 2° si l'on a d'abord maintenu la tige immobile en contact avec Ag, de façon que le frottement entre en jeu, la tige tourne, au début du mouvement du moins, autour du point A qui reste fixe.

Si au lieu de cela on a

$$f < \frac{1 + \cos^2 \theta}{\cos \theta \sin \theta},$$

on n'a dans tous les cas qu'une solution, la tige se transporte parallèlement à elle-même sous l'influence de la seule pesanteur.

A première vue, ce dernier résultat peut paraître paradoxal; il est certain, en effet, puisque l'on a d'abord maintenu la tige en contact avec Oy, que cette tige exerce sur Oy une pression égale à

$$g \sin \theta \cos \theta,$$

le frottement entre donc forcément en jeu au début du mouvement et il semble à première vue étrange que ce mouvement soit absolument le même que s'il n'existait pas. Nous allons cependant reconnaître que là encore les lois de Coulomb donnent une image très suffisamment approchée du phénomène.

Nous allons montrer en effet que, si l'on tient compte de l'élasticité de la tige AB, le frottement s'exercera pendant un temps assez court pour que l'on puisse considérer son effet comme négligeable.

Nous aurons, en désignant par r la longueur normale de la tige AB et par $r + u$ sa longueur à un instant quelconque,

$$P = -\mu^2 u,$$

où μ^2 est très grand et devient infini lorsqu'on suppose la tige rigide.

Nous aurons alors

$$\eta'' = g + P(\cos \theta - f \sin \theta),$$

$$\eta_1'' = g + \mu^2 u (f \sin \theta - \cos \theta),$$

$$x = (r + u) \sin \theta,$$

$$x'' = (r + u) \cos \theta \theta'' - (r + u) \sin \theta \theta'^2 + 2u' \cos \theta \theta' + u'' \sin \theta,$$

$$y = \eta - (r + u) \cos \theta,$$

$$y'' = \eta_1'' + (r + u) \sin \theta \theta'' + (r + u) \cos \theta \theta'^2 + 2u' \sin \theta \theta' - u'' \cos \theta,$$

et aussi

$$x' = P \sin \theta = -\mu^2 u \sin \theta,$$

$$y' = g - P \cos \theta = g + \mu^2 u \cos \theta,$$

de sorte qu'on aura

$$(r + u) \cos \theta \theta'' - (r + u) \sin \theta \theta'^2 + 2u' \theta' \cos \theta + u'' \sin \theta + \mu^2 u \sin \theta = 0,$$

$$(r + u) \sin \theta \theta'' + (r + u) \cos \theta \theta'^2$$

$$+ 2u' \theta' \sin \theta - u'' \cos \theta - \mu^2 u (2 \cos \theta - f \sin \theta) = 0.$$

On en déduit

$$(13) \quad (r + u) \theta'' + 2u' \theta' - \mu^2 u \sin \theta (\cos \theta - f \sin \theta) = 0,$$

$$(14) \quad u'' - (r + u) \theta'^2 + \mu^2 u (1 + \cos^2 \theta - f \sin \theta \cos \theta) = 0.$$

Toutefois, si le point A est fixe, on a $\eta_1'' = 0$ et par suite f doit

être remplacé par une valeur f_1 telle que l'on ait

$$(15) \quad g = \mu^2 u (\cos \theta - f_1 \varepsilon \sin \theta).$$

D'ailleurs à l'instant initial on a, *dans tous les cas*,

$$P = -\mu^2 u_0 = g \cos \theta_0;$$

d'où

$$(16) \quad u_0 = -\frac{g \cos \theta_0}{\mu^2},$$

et aussi si le point A est fixe en vertu de (15) et (16),

$$1 + \cos^2 \theta_0 - f_1 \sin \theta_0 \cos \theta_0 = 0.$$

On en conclut que, pour que le point A reste fixe à l'instant initial, nous avons bien la condition

$$f \geq \frac{1 + \cos^2 \theta_0}{\sin \theta_0 \cos \theta_0}.$$

Si au lieu de cela on a

$$f < \frac{1 + \cos^2 \theta_0}{\sin \theta_0 \cos \theta_0},$$

le point A se met en mouvement et l'on a

$$\eta'' > 0,$$

$$N = -\mu^2 u_0 \sin \theta_0 > 0.$$

Il faut donc prendre $\varepsilon = +1$. En supposant donc qu'il s'agisse d'une période assez courte pour que l'on puisse négliger la variation de θ et prendre $\theta' = \theta'_0 = 0$, (14) nous donnera

$$u'' + \mu^2 u (1 + \cos^2 \theta_0 - f \sin \theta_0 \cos \theta_0) = 0,$$

ou en posant

$$1 + \cos^2 \theta_0 - f \sin \theta_0 \cos \theta_0 = K^2 > 0,$$

$$u'' + \mu^2 K^2 u = 0,$$

d'où, en tenant compte de ce que

$$u_0 = -\frac{g \cos \theta_0}{\mu^2}, \quad u'_0 = 0,$$

$$(17) \quad u = -\frac{g \cos \theta_0}{\mu^2} \cos \mu K t,$$

formule qui ne doit être appliquée que tant que u est positif (puisque P et N et, par suite ε , changent de signe avec u).

Or on a $u = 0$ pour

$$t = \frac{\pi}{2 K \mu},$$

et pour cette valeur de t on a

$$u' = \frac{g \cos \theta_0}{\mu} K.$$

De plus l'équation (13) nous donne, en négligeant les termes en u^2 ,

$$r \theta'' = \mu^2 u \sin \theta_0 (\cos \theta_0 - f \varepsilon \sin \theta_0),$$

ou, en remplaçant u par sa valeur (17),

$$r \theta'' = -g \cos \theta_0 \sin \theta_0 (\cos \theta_0 - f \varepsilon \sin \theta_0) \cos \mu K t,$$

et par suite

$$r(\theta - \theta_0) = \frac{g \cos \theta_0 \sin \theta_0}{\mu^2 K^2} (\cos \theta_0 - f \varepsilon \sin \theta_0) (\cos \mu K t - 1),$$

donc, pour $t = \frac{\pi}{2 K \mu}$, θ aura une valeur θ_1 donnée par la formule

$$r(\theta_1 - \theta_0) = -\frac{g \cos \theta_0 \sin \theta_0}{\mu^2 K^2} (\cos \theta_0 - f \varepsilon \sin \theta_0),$$

ou, en tenant compte de la valeur de K^2 ,

$$r(\theta_1 - \theta_0) = -\frac{g \sin \theta_0}{\mu^2 K^2} (K^2 - 1),$$

quantité très petite et qui tend vers zéro lorsque μ croît indéfiniment, c'est-à-dire si la tige devient de plus en plus raide. Il en est d'ailleurs de même de u' et de θ' .

On conclut que, si la liaison est unilatérale, la tige échappera à l'action de Oy au bout d'un temps assez court pour qu'on puisse la considérer comme n'ayant pas sensiblement bougé et comme ayant des vitesses de rotation et de translation nulles. Elle se transportera donc parallèlement à elle-même sous l'influence de la seule pesanteur.

Nous retrouvons par suite les résultats obtenus au moyen des lois de Coulomb et en considérant la tige comme indéformable.

Si, au lieu d'être unilatérale, la liaison était bilatérale, il se ferait quelques oscillations entre les deux guides qui seraient rapidement amorties (vu la petitesse de leur amplitude comparable, ou même inférieure au jeu qui existe forcément entre les deux guides).

On voit donc en résumé que, dans ce cas encore, l'application des lois de Coulomb mène, ainsi que nous l'avons annoncé, à une image suffisamment approchée du phénomène, et qui conduit seulement à négliger une période de transition excessivement courte, et le plus souvent sans importance.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 24 JANVIER 1907.

PRÉSIDENCE DE M. BLUTEL.

Communications :

M. Bioche : *Sur un mode de génération de la surface de Steiner.*

M. Raffy : *Sur la correspondance réciproque entre lignes asymptotiques et lignes diagonales.*

M. Blutel : *Sur une équation du second ordre réductible à l'équation de la série hypergéométrique de Gauss.*

SÉANCE DU 7 FÉVRIER 1907.

PRÉSIDENCE DE M. BLUTEL.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : M. W. Etzel, présenté par MM. Laisant et Renard; M. Guichard, présenté par MM. Appell et Hadamard; M. Montel, présenté par MM. Borel et Fatou; M. Nikitine, présenté par MM. Painlevé et Hadamard; M. Dulac, présenté par MM. Raffy et Servant; M. Schönflies, présenté par MM. Borel et Lebesgue; M. Chazy, présenté par

MM. Hadamard et Borel; M. Lesgourgues, présenté par MM. Bioche et Raffy.

Communications :

M. Fouché : *Sur la projection du dodécaèdre régulier.*

M. Lecornu : *Sur une généralisation du mouvement de Poincaré.*

M. Lalesco : *Sur la dérivée du potentiel de simple couche dans une direction quelconque.*

SÉANCE DU 21 FÉVRIER 1907.

PRÉSIDENCE DE M. BLUTEL.

Communications :

M. Lalesco : *Sur le nombre des résidus quadratiques de P inférieurs à $\frac{P}{2}$.*

M. Bricard : *Sur une propriété des quadriques homofocales.*

M. Fouché : *Sur un complexe du second ordre.*

M. Bricard : *Sur le complexe tétraédral.*

M. Guichard : *Sur une formule concernant les fonctions elliptiques.*

M. Blutel : *Sur une question de Géométrie.*

SÉANCE DU 7 MARS 1907.

PRÉSIDENCE DE M. BLUTEL.

Communications :

M. Fatou : *Sur certaines séries de fractions rationnelles qui définissent des fonctions affectées de coupures.*

M. Gérardin : *Sur un théorème de divisibilité arithmétique.*

M. Blutel : *Sur certaines surfaces de translation du quatrième ordre.*

SÉANCE DU 21 MARS 1907.

PRÉSIDENCE DE M. R. PERRIN.

Communications :

M. Buhl : *Sur une extension de la méthode de sommation de M. Borel.*

M. Lalesco : *Sur la représentation des nombres par les classes de formes appartenant à un déterminant donné.*

M. Buhl : *Sur les développements des fonctions de variable réelle en séries de fonctions continues.*

M. Raffy : *Sur les fonctions de deux variables liées par une relation homographique.*

SÉANCE DU 11 AVRIL 1907.

PRÉSIDENCE DE M. BLUTEL.

Communications :

M. Remy : *Sur quelques familles dénombrables de surfaces hyperelliptiques.*

M. Lalesco : *Sur les équations différentielles linéaires et sur une équation analogue à celle de M. Fredholm.*

M. APPELL adresse une Note *Sur l'extinction du frottement.*

SÉANCE DU 23 AVRIL 1907.

PRÉSIDENCE DE M. BLUTEL.

Communications :

M. Raffy : *Sur l'intégration de l'équation des surfaces minima.*

M. Fouché : *Sur les champs de force dont les lignes de force sont dans des plans passant par un point.*

M. Raffy : *Sur les surfaces limites de Ribaucour.*

EXTRAIT DES STATUTS ET DU RÈGLEMENT.

La Société mathématique de France a pour objet l'avancement et la propagation des études de Mathématiques pures et appliquées. Elle y concourt par ses travaux et ses publications. Elle a son siège à Paris.

La Société se compose de sociétaires perpétuels, de membres résidants et de membres non résidants, en nombre illimité.

Sont considérés comme résidants les membres qui ont à Paris leur domicile ou leurs occupations professionnelles.

Les Étrangers peuvent faire partie de la Société.

Les conditions à remplir, pour être membre de la Société, sont les suivantes : 1° avoir été présenté par deux de ses membres et agréé par le Conseil d'administration ou par le Bureau agissant en vertu d'un mandat du Conseil; 2° avoir obtenu, à l'une des séances qui ont suivi la présentation, les suffrages de la majorité des membres présents; 3° avoir versé un droit d'admission de *dix francs*; 4° payer une cotisation annuelle dont le montant est de *vingt francs* pour les membres résidants, et de *quinze francs* pour les membres non résidants.

La cotisation annuelle peut toujours être rachetée par une somme de *trois cents francs*, versée dans les conditions fixées par le règlement administratif de la Société.

Ce versement confère le titre de *sociétaire perpétuel*.

La cotisation annuelle est payée au commencement de chaque exercice dont l'origine est fixée au 1^{er} novembre de chaque année.

Les nouveaux membres doivent payer la totalité de la cotisation de l'exercice en cours, quelle que soit l'époque de leur admission.

La Société tient des séances ordinaires deux fois par mois; elle prend trois mois de vacances, de la mi-juillet à la mi-octobre.

Pour assister aux séances, les personnes étrangères à la Société doivent être présentées par l'un de ses membres.

La Société publie par livraisons un Recueil annuel qui a pour titre : *Bulletin de la Société mathématique de France*, et qui contient, avec un extrait des procès-verbaux des séances, des Notes et Mémoires sur les Mathématiques pures ou appliquées, ayant pour auteurs des membres de la Société, et présentant quelque originalité au point de vue de la méthode ou des résultats.

Les livraisons du *Bulletin* sont adressées à tous les membres de la Société, au fur et à mesure de leur publication. Toutefois, dans le cas où un sociétaire se met en retard dans le paiement de sa cotisation, l'envoi du *Bulletin* est suspendu pour lui, jusqu'à ce qu'il ait acquitté l'arriéré.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS.

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6^e).

HERMITE et STIELTJES. — Correspondance d'Hermite et de Stieltjes, publiée par les soins de B. BAILLAUD, Doyen honoraire de la Faculté des Sciences, Directeur de l'Observatoire de Toulouse, et H. BOURGET, Maître de Conférences à l'Université, Astronome adjoint à l'Observatoire de Toulouse, avec une *Préface* de EMILE PICARD, Membre de l'Institut. 2 volumes grand in-8 (25 × 16) se vendant séparément :

TOME I (8 novembre 1882-22 juillet 1889). Volume de xx-477 pages avec deux portraits; 1905. 16 fr.

TOME II (18 octobre 1889-15 décembre 1894). Volume de vi-457 pages avec un portrait et un fac-similé; 1905. 16 fr.

TABLE DES MATIÈRES

(FASCICULE II).

	Pages.
[H1a] GOURSAT. — Sur les séries entières et les approximations successives.....	81 +
[R8a2] LECORNU. — Sur une généralisation du mouvement de Poinsoi.....	91
[05] BARRÉ. — Sur un élément géométrique nouveau des surfaces.....	98
[123a2] AURIC. — Sur le développement en fraction continue d'une irrationnelle ambiguë du second degré.....	121
[113f] NIEWENGLOWSKI. — Sur les équations $x^2 - ay^2 = 1$ et $x^2 - ay^2 = -1$	126
[R9a] APPELL. — Sur l'extinction du frottement.....	131
[H1f] POPOVICI. — Sur le problème des multiplicateurs réciproques.....	133
[R9a] DE SPARRÉ. — Note au sujet de certaines discontinuités apparentes dans les mouvements où intervient le frottement de glissement.....	141
Comptes rendus des séances.....	158

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6°).

HERMITE. — Œuvres de Charles Hermite publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences, par ÉMILE PICARD, Membre de l'Institut. 3 vol. grand in-8 (25 × 16) se vendant séparément.

TOME I. Volume de XL-500 pages avec un portrait d'Hermite; 1905.
18 fr.

RAFFY (L.), Maître de Conférences à la Faculté des Sciences et à l'École Normale supérieure. — *Leçons sur les applications géométriques de l'Analyse. Éléments de la théorie des courbes et des surfaces.* Grand in-8, avec figures; 1897..... 7 fr. 50 c.

RIEMANN. — Œuvres mathématiques de Riemann, traduites par L. LAUGEL, avec une préface de CH. HERMITE et un discours de FÉLIX KLEIN. Un beau volume grand in-8 avec figures; 1898..... 14 fr.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE

PUBLIE
PAR LES SECRÉTAIRES.

S'adresser, pour la rédaction, à M. RAFFY, rue Pierre-Nicole, 7, Paris, 5^e ;
pour la distribution, à M. SERVANT, rue des Saints-Pères, 8, Paris, 7^e.

TOME XXXV. — FASCICULE III.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
A LA SORBONNE.

1907

MM. les Membres de la Société sont priés d'adresser leur cotisation à M. *Claude-Lafontaine* Trésorier de la Société, rue de Trévis, 32, à Paris.

On s'abonne et l'on trouve les Volumes déjà publiés au siège de la Société et à la Librairie Gauthier-Villars, quai des Grands-Augustins, 55, Paris.

Les séances de la Société mathématique ont lieu les deuxième et quatrième mercredis de chaque mois à 8 heures trois quarts du soir.

Depuis le 1^{er} mars 1900 les séances de la Société ont lieu dans une salle de la Faculté des Sciences (entrée place de la Sorbonne, escalier tout au bout de la galerie, deuxième étage à droite).

Les Membres de la Société ont dû recevoir une carte, portant le timbre du Secrétariat, leur donnant accès à la Bibliothèque de l'Université, et fournissant à ce sujet les renseignements nécessaires; ceux qui ne l'auraient pas reçue sont priés d'en informer le Secrétariat.

La correspondance peut être adressée, soit à la Faculté des Sciences, place de la Sorbonne, soit au domicile de l'un des secrétaires, de préférence à M. Servant, sauf ce qui concerne la rédaction du Bulletin qui doit être adressé de préférence à M. Raffy.

AVIS.

Dans sa séance du 15 mars 1906, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé qu'à l'avenir tout Membre de la Société qui voudra compléter sa collection du *Bulletin* aura le droit personnel de le faire, une seule fois pour chacun des volumes publiés avant son admission, aux prix suivants :

3 francs le volume pour chacun des trente premiers tomes;

6 francs le volume pour chacun des tomes suivants, ce dernier prix devant être réduit à 4 francs pour les acheteurs de *dix volumes* au moins.

Dans sa séance du 28 février 1900, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé qu'à l'avenir tout Membre de la Société, auteur d'un travail *quelconque* inséré dans le Bulletin et désirant en obtenir des tirages à part, **devra en faire la demande en retournant l'épreuve corrigée.**

Si le nombre demandé ne dépasse pas *cinquante*, les frais du tirage à part seront faits par la Société.

Conformément à des décisions prises par le Conseil et par la Commission d'impression :

1^o Le *Bulletin*, depuis le Tome XXVII, paraît tous les trois mois;

2^o Les auteurs de tous les travaux destinés au *Bulletin* sont instamment priés d'inscrire en tête de leurs manuscrits la classification que leur assigne, d'après le sujet traité, l'*Index du Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*;

3^o Ils sont également invités à ne pas dépasser, autant que possible, la proportion de une figure pour quatre pages de texte imprimé.

SÉANCE DU 2 MAI 1907.

PRÉSIDENCE DE M. BLUTEL.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : M. Roda, présenté par MM. Raffy et Fontené; M. Jean Merlin, présenté par MM. Lebesgue et Fatou; M. Émile Weber, présenté par MM. Neuberger et Brocard.

Communications :

M. Hadamard : *Sur le problème isopérimétrique.*

M. Bricard : *Sur certains théorèmes d'arithmétique.*

M. Fouché : *Sur les champs de force dont les lignes de force sont situées dans des plans passant par un point.*

M. Marcus : *Sur les faisceaux de coniques.*

M. Lalesco : *Sur une propriété caractéristique des intégrales analytiques du problème de la distribution des températures dans la barre.*

SÉANCE DU 16 MAI 1907.

PRÉSIDENCE DE M. BLUTEL.

Communications :

M. Popovici : *Détermination de l'intégrale d'une équation du second ordre qui prend des valeurs données sur deux courbes données.*

M. Raffy : *Sur certains changements de variables dépendant de fonctions inconnues.*

M. Servant présente quelques observations à propos de cette Communication.

SÉANCE DU 6 JUIN 1907.

PRÉSIDENTE DE M. R. PERRIN.

Communications :

M. Popovici : *Sur le problème des multiplicateurs réciproques.*

M. Raffy : *Sur les quadriques à centre en relation particulière avec le cercle de l'infini.*

M. Fouché présente quelques observations à propos de cette Communication.

M. D'OCAGNE adresse un Mémoire intitulé : *Sur les équations d'ordre nomographique 3 et 4.*

SÉANCE DU 20 JUIN 1907.

PRÉSIDENTE DE M. BLUTEL.

Élection :

Est élu, à l'unanimité, membre de la Société, M. Kryloff, présenté par MM. Lucien Lévy et Lalesco.

Communications :

M. Fouché : *Sur les champs de force où les lignes de force sont planes.*

M. Raffy : *Sur la déformation des quadriques et sur le problème de l'habillage de certaines surfaces.*

M. LALESCO résume un Mémoire adressé par M. Goursat et intitulé : *Sur un cas élémentaire de l'équation de Fredholm.*

SÉANCE DU 4 JUILLET 1907.

PRÉSIDENTE DE M. BLUTEL.

Communications :

M. Bioche : *Sur une propriété des courbes gauches du quatrième degré.*

M. Blutel : *Sur le rapport anharmonique.*

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR UN CAS ÉLÉMENTAIRE DE L'ÉQUATION DE FREDHOLM;

PAR M. E. GOURSAT.

1. L'équation de Fredholm

$$(1) \quad \varphi(x) + \lambda \int_0^1 K(x, s) \varphi(s) ds = \psi(x),$$

où $\psi(x)$ et $K(x, y)$ sont des fonctions données et $\varphi(x)$ la fonction inconnue, se résout très aisément lorsque la fonction $K(x, y)$ ou *noyau* (*Kern*) est de la forme

$$(2) \quad K(x, y) = X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + \dots + X_n Y_n,$$

$X_1, X_2, \dots, X_n$ étant des fonctions de la seule variable x et $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ des fonctions de la seule variable y . Par quelques transformations simples de déterminants, on arrive à mettre la solution sous une forme où ne figure que la seule fonction $K(x, y)$; en supposant ensuite que le nombre n croît indéfiniment, on est conduit tout naturellement à la solution générale de l'équation (1) sous la forme même de M. Fredholm. J'ai pensé que cette remarque pouvait présenter quelque intérêt au point de vue de l'enseignement.

2. Si le noyau $K(x, y)$ est de la forme (2), on peut supposer que les n fonctions $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont linéairement indépendantes, sans quoi il serait possible de mettre $K(x, y)$ sous une forme analogue à la formule (2), où figureraient moins de n produits. On peut également supposer, pour la même raison, que les n fonctions $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ sont linéairement indépendantes. En remplaçant $K(x, y)$ par l'expression $X_1 Y_1 + \dots + X_n Y_n$ dans

Un terme quelconque de l'un de ces déterminants est un produit de p intégrales tel que

$$\int_0^1 X_1(s) Y_1(s) ds \times \int_0^1 X_2(s) Y_2(s) ds \times \dots \times \int_0^1 X_p(s) Y_p(s) ds,$$

et l'on peut évidemment le remplacer par une intégrale multiple d'ordre p

$$\int \int \dots \int X_1(x_1) Y_1(x_1) X_2(x_2) Y_2(x_2) \dots X_p(x_p) Y_p(x_p) dx_1 \dots dx_p,$$

les limites de l'intégration étant 0 et 1 pour les p variables indépendantes $x_1, x_2, \dots, x_p$, comme dans toutes les suivantes. Cette remarque s'appliquant à un terme quelconque de $\delta_{12\dots p}$, il s'ensuit que, si l'on pose

$$\delta'_{12\dots p} = \begin{vmatrix} X_1(x_1) Y_1(x_1) & X_2(x_1) Y_2(x_1) & \dots & X_p(x_1) Y_p(x_1) \\ X_1(x_2) Y_1(x_2) & X_2(x_2) Y_2(x_2) & \dots & X_p(x_2) Y_p(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_1(x_p) Y_1(x_p) & X_2(x_p) Y_2(x_p) & \dots & X_p(x_p) Y_p(x_p) \end{vmatrix},$$

on a

$$\delta_{12\dots p} = \int \int \dots \int \delta'_{12\dots p} dx_1 dx_2 \dots dx_p;$$

et la même remarque s'applique évidemment aux autres déterminants partiels $\delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}$.

Cela posé, considérons les deux tableaux rectangulaires à p lignes et à n colonnes ($p \leq n$):

$$(T) \quad \begin{vmatrix} X_1(x_1) & X_2(x_1) & \dots & X_n(x_1) \\ X_1(x_2) & X_2(x_2) & \dots & X_n(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_1(x_p) & X_2(x_p) & \dots & X_n(x_p) \end{vmatrix},$$

$$(T') \quad \begin{vmatrix} Y_1(x_1) & Y_2(x_1) & \dots & Y_n(x_1) \\ Y_1(x_2) & Y_2(x_2) & \dots & Y_n(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_1(x_p) & Y_2(x_p) & \dots & Y_n(x_p) \end{vmatrix},$$

et désignons par TT' le produit de ces deux tableaux, c'est-à-dire la somme des produits obtenus en multipliant un déterminant d'ordre p formé par p colonnes du tableau (T) par le déterminant correspondant déduit de (T').

Si l'on prend, par exemple, les p premières colonnes de (T) et de (T'), le produit correspondant est un déterminant d'ordre p dont les éléments de la première ligne sont respectivement

$$\begin{aligned} & X_1(x_1) Y_1(x_1) + X_1(x_2) Y_1(x_2) + \dots + X_1(x_p) Y_1(x_p), \\ & \dots\dots\dots, \\ & X_1(x_1) Y_p(x_1) + X_1(x_2) Y_p(x_2) + \dots + X_1(x_p) Y_p(x_p), \end{aligned}$$

les autres lignes se déduisant de celle-là en remplaçant l'indice 1 de X par 2, 3, ..., p successivement. Ce déterminant est égal à la somme de p^p déterminants partiels obtenus en décomposant chaque élément en p parties. Mais, pour avoir des déterminants partiels différents de zéro, il faut prendre des indices différents pour la variable x_i dans chaque ligne. On aura donc seulement 1.2... p déterminants partiels différents de zéro, de la forme

$$\begin{vmatrix} X_1(x_{\beta_1}) Y_1(x_{\beta_1}) & X_1(x_{\beta_2}) Y_1(x_{\beta_2}) & \dots & X_1(x_{\beta_p}) Y_1(x_{\beta_p}) \\ X_2(x_{\beta_1}) Y_1(x_{\beta_1}) & X_2(x_{\beta_2}) Y_1(x_{\beta_2}) & \dots & X_2(x_{\beta_p}) Y_1(x_{\beta_p}) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ X_p(x_{\beta_1}) Y_1(x_{\beta_1}) & X_p(x_{\beta_2}) Y_1(x_{\beta_2}) & \dots & X_p(x_{\beta_p}) Y_1(x_{\beta_p}) \end{vmatrix},$$

$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ désignant une permutation des p premiers nombres. Il est clair que l'intégrale de ce déterminant, les limites pour toutes les variables étant 0 et 1, est encore égale à $\delta_{1,2\dots p}$. Il s'ensuit que le facteur $\delta_{1,2\dots p}$ se retrouve multiplié par $p!$ dans l'intégrale multiple

$$I_p = \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 TT' dx_1 dx_2 \dots dx_p;$$

il en est évidemment de même de tous les autres facteurs $\delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}$, et nous concluons de là que le coefficient de λ^p dans $\mathfrak{D}_n(\lambda)$ est égal à

$$\frac{I_p}{1.2\dots p}.$$

D'autre part, le produit TT' est égal à un déterminant d'ordre n

$$TT' = \begin{vmatrix} X_1(x_1) Y_1(x_1) + X_2(x_1) Y_2(x_1) + \dots + X_n(x_1) Y_n(x_1) & \dots \\ X_1(x_2) Y_1(x_1) + X_2(x_2) Y_2(x_1) + \dots + X_n(x_2) Y_n(x_1) & \dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ X_1(x_p) Y_1(x_1) + X_2(x_p) Y_2(x_1) + \dots + X_n(x_p) Y_n(x_1) & \dots \end{vmatrix},$$

les autres colonnes se déduisant de la première en remplaçant,

dans Y_i, x_1 par $x_2, x_3, \dots, x_p$ successivement. Mais ce déterminant n'est autre chose, d'après la formule (2), que

$$\begin{vmatrix} K(x_1, x_1) & K(x_1, x_2) & \dots & K(x_1, x_p) \\ K(x_2, x_1) & K(x_2, x_2) & \dots & K(x_2, x_p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(x_p, x_1) & K(x_p, x_2) & \dots & K(x_p, x_p) \end{vmatrix},$$

ou, d'après la notation de M. Fredholm,

$$K(x_1, x_2, \dots, x_p).$$

En définitive, nous voyons que le coefficient de λ^p dans le polynôme $\mathfrak{W}_n(\lambda)$ est égal à

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \dots p} \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 K(x_1, x_2, \dots, x_p) dx_1 dx_2 \dots dx_p.$$

4. Des équations (8) on déduit l'expression de la somme

$$H_1 X_1 + H_2 X_2 + \dots + H_n X_n$$

au moyen d'un nouveau déterminant d'ordre $n + 1$

$$\sum_{i=1}^n H_i X_i(x) = \frac{-\lambda}{\mathfrak{W}(\lambda)} \begin{vmatrix} 0 & X_1(x) & X_2(x) & \dots & X_n(x) \\ B_1 & 1 + A_{11}\lambda & A_{21}\lambda & \dots & A_{n1}\lambda \\ B_2 & A_{12}\lambda & 1 + A_{22}\lambda & \dots & A_{n2}\lambda \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_n & A_{1n}\lambda & A_{2n}\lambda & \dots & 1 + A_{nn}\lambda \end{vmatrix},$$

en posant

$$B_i = \int_0^1 Y_i(s) \psi(s) ds,$$

ce que l'on peut encore écrire

$$\sum_i H_i X_i(x) = \frac{\lambda}{\mathfrak{W}(\lambda)} \int_0^1 \psi(s) T(x, s) ds,$$

$T(x, s)$ désignant le déterminant

$$T(x, s) = \begin{vmatrix} 0 & -X_1(x) & -X_2(x) & \dots & -X_n(x) \\ Y_1(s) & 1 + A_{11}\lambda & A_{21}\lambda & \dots & A_{n1}\lambda \\ Y_2(s) & A_{12}\lambda & 1 + A_{22}\lambda & \dots & A_{n2}\lambda \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_n(s) & A_{1n}\lambda & A_{2n}\lambda & \dots & 1 + A_{nn}\lambda \end{vmatrix}.$$

Nous allons encore chercher à développer $T(x, s)$ suivant les puissances de λ . C'est un polynome de degré $n - 1$ au plus, dans lequel le terme indépendant de λ est égal au déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & -X_1(x) & -X_2(x) & \dots & -X_n(x) \\ Y_1(s) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ Y_2(s) & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ Y_n(s) & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \\ = X_1(x) Y_1(s) + X_2(x) Y_2(s) + \dots + X_n(x) Y_n(s) = K(x, s).$$

D'une façon générale le coefficient de λ^p dans $T(x, s)$ est égal à la somme des déterminants d'ordre $p + 2$ que l'on déduit du déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -X_1(x) & -X_2(x) & \dots & -X_n(x) \\ Y_1(s) & A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ Y_2(s) & A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_n(s) & A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix},$$

en conservant les éléments communs à $p + 2$ lignes et aux $p + 2$ colonnes correspondantes, la première ligne et la première colonne n'étant jamais supprimées complètement. Il y a deux sortes de termes de degré p en λ ; les uns contiennent en facteur un produit tel que $X_i(x) Y_i(s)$, les autres un facteur de la forme $X_i(x) Y_k(s)$, où $i \neq k$. Il suffit évidemment par raison de symétrie de calculer les coefficients de $\lambda^p X_i(x) Y_i(s)$ et de $\lambda^p X_i(x) Y_k(s)$.

Le coefficient de $\lambda^p X_i(x) Y_i(s)$ est, d'après ce qui précède, égal à la somme des déterminants d'ordre p que l'on déduit du déterminant

$$\Delta' = \begin{vmatrix} A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ A_{23} & A_{33} & \dots & A_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix},$$

en conservant seulement les éléments communs à p lignes et aux p colonnes correspondantes.

Chaque terme de ce déterminant est encore le produit de p intégrales simples et peut être remplacé par une intégrale multiple

d'ordre p . Or, si nous considérons les deux tableaux

$$\mathfrak{C} = \begin{vmatrix} X_1(x) & X_2(x) & \dots & X_n(x) \\ X_1(x_1) & X_2(x_1) & \dots & X_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_1(x_p) & X_2(x_p) & \dots & X_n(x_p) \end{vmatrix},$$

$$\mathfrak{C}' = \begin{vmatrix} Y_1(s) & Y_2(s) & \dots & Y_n(s) \\ Y_1(x_1) & Y_2(x_1) & \dots & Y_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_1(x_p) & Y_2(x_p) & \dots & Y_n(x_p) \end{vmatrix},$$

le coefficient de $X_1(x) Y_1(s)$ dans le produit $\mathfrak{C}\mathfrak{C}'$ est égal au produit des deux tableaux

$$\Theta = \begin{vmatrix} X_2(x_1) & \dots & X_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ X_2(x_p) & \dots & X_n(x_p) \end{vmatrix}, \quad \Theta' = \begin{vmatrix} Y_2(x_1) & \dots & Y_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ Y_2(x_p) & \dots & Y_n(x_p) \end{vmatrix},$$

et l'on reconnaît comme plus haut (n° 3) que chaque terme du coefficient de $\lambda^p X_1(x) Y_1(s)$ se retrouve, multiplié par $p!$ dans l'intégrale multiple

$$\int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 \Theta \Theta' dx_1 dx_2 \dots dx_p.$$

Le coefficient de $X_1(x) Y_2(s)$ dans le produit $\mathfrak{C}\mathfrak{C}'$ est de même égal, au signe près, au produit des deux tableaux Θ et Θ''

$$\Theta'' = \begin{vmatrix} Y_1(x_1) & Y_3(x_1) & \dots & Y_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_1(x_p) & Y_3(x_p) & \dots & Y_n(x_p) \end{vmatrix},$$

et l'intégrale multiple

$$\int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 \Theta \Theta'' dx_1 dx_2 \dots dx_p$$

contient encore $p!$ fois chaque terme du coefficient de $\lambda^p X_1(x) Y_2(s)$ dans $T(x, s)$. En définitive, le coefficient de λ^p dans $T(x, s)$ est égal à

$$\frac{1}{p!} \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 \mathfrak{C}\mathfrak{C}' dx_1 dx_2 \dots dx_p.$$

Mais le produit $\mathfrak{E}\mathfrak{E}'$ est égal à un déterminant unique d'ordre $p+1$

$$\mathfrak{E}\mathfrak{E}' = \begin{vmatrix} X_1(x) Y_1(s) + \dots + X_n(x) Y_n(s) & \dots & X_1(x) Y_1(x_p) + \dots + X_n(x) Y_n(x_p) \\ X_1(x_1) Y_1(s) + \dots + X_n(x_1) Y_n(s) & \dots & X_1(x_1) Y_1(x_p) + \dots + X_n(x_1) Y_n(x_p) \\ \dots & \dots & \dots \\ X_1(x_p) Y_1(s) + \dots + X_n(x_p) Y_n(s) & \dots & X_1(x_p) Y_1(x_p) + \dots + X_n(x_p) Y_n(x_p) \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire, d'après les notations de M. Fredholm,

$$\mathfrak{E}\mathfrak{E}' = K \begin{pmatrix} x, x_1, x_2, \dots, x_p \\ s, x_1, x_2, \dots, x_p \end{pmatrix},$$

et l'on a

$$T(x, s) = K(x, s) + \sum_{p=1}^{n-1} \lambda^p \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 K \begin{pmatrix} x, x_1, \dots, x_p \\ s, x_1, \dots, x_p \end{pmatrix} dx_1 \dots dx_p.$$

En résumé, lorsque la fonction $K(x, y)$ est de la forme (2), si l'on pose

$$(10) \quad \mathfrak{O}_n(\lambda) = 1 + \sum_{p=1}^n \frac{\lambda^p}{p!} \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 K \begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_p \\ x_1, x_2, \dots, x_p \end{pmatrix} dx_1 \dots dx_p,$$

$$(11) \quad \mathfrak{F}_n(x, y; \lambda) = \lambda K(x, y) + \sum_{p=1}^{n-1} \frac{\lambda^{p+1}}{p!} \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 K \begin{pmatrix} x, x_1, \dots, x_p \\ y, x_1, \dots, x_p \end{pmatrix} dx_1 \dots dx_p,$$

et si λ n'est pas racine de l'équation $\mathfrak{O}_n(\lambda) = 0$, l'équation intégrale (1) admet une solution unique donnée par la formule

$$(12) \quad \varphi(x) = \psi(x) - \frac{1}{\mathfrak{O}_n(\lambda)} \int_0^1 \psi(s) \mathfrak{F}_n(x, s; \lambda) ds.$$

4. La loi de formation des coefficients, dans les deux polynômes en λ , $\mathfrak{O}_n(\lambda)$ et $\mathfrak{F}_n(x, y; \lambda)$, est évidemment indépendante de la forme particulière (2) que nous avons supposée à la fonction $K(x, y)$; cette loi de formation peut s'appliquer en partant d'une fonction quelconque des deux variables x et y . Mais, si l'on part d'une fonction de la forme (2), les développements obtenus pour $\mathfrak{O}_n(\lambda)$ et $\mathfrak{F}_n(x, y; \lambda)$ s'arrêtent d'eux-mêmes, car les déterminants

$$K \begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_p \\ x_1, x_2, \dots, x_p \end{pmatrix}, \quad K \begin{pmatrix} x, x_1, x_2, \dots, x_{p-1} \\ y, x_1, x_2, \dots, x_{p-1} \end{pmatrix}$$

sont nuls, comme sommes de déterminants ayant deux colonnes

identiques, dès que p est supérieur à n . Au contraire, si l'on part d'une fonction quelconque de deux variables $f(x, y)$, on obtient en général deux séries entières en λ toujours convergentes

$$(13) \quad \mathfrak{O}(\lambda) = 1 + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\lambda^p}{p!} \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, x_2, \dots, x_p) dx_1 \dots dx_p,$$

$$(14) \quad \mathfrak{F}(x, y; \lambda) = \lambda f(x, y) + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{p+1}}{p!} \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 f\left(\begin{matrix} x, x_1, \dots, x_p \\ y, x_1, \dots, x_p \end{matrix}\right) dx_1 \dots dx_p;$$

si λ n'est pas racine de l'équation $\mathfrak{O}(\lambda) = 0$, on est conduit par *induction* à représenter par la formule

$$(15) \quad \varphi(x) = \psi(x) - \frac{1}{\mathfrak{O}(\lambda)} \int_0^1 \psi(s) \mathfrak{F}(x, s; \lambda) ds,$$

la solution de l'équation fonctionnelle

$$(1)' \quad \varphi(x) + \lambda \int_0^1 f(x, s) \varphi(s) ds = \psi(s).$$

On peut vérifier *a posteriori* l'exactitude de la solution par la méthode de M. Fredholm. On peut aussi démontrer *a priori* que l'extension de la formule (12) au cas de n infini est légitime dans le cas très étendu où la fonction $f(x, y)$ est développable en série uniformément convergente de la forme

$$(16) \quad f(x, y) = \sum_i X_i(x) Y_i(y).$$

Posons en effet

$$K_n(x, y) = \sum_{i=1}^n X_i Y_i,$$

et soient $\mathfrak{O}_n(\lambda)$, $\mathfrak{F}_n(x, y; \lambda)$ les deux polynômes en λ obtenus en remplaçant $K(x, y)$ par $K_n(x, y)$ dans les formules (10) et (11). On démontre facilement que le polynôme $\mathfrak{O}_n(\lambda)$ a pour limite $\mathfrak{O}(\lambda)$, et que $\mathfrak{F}_n(x, y; \lambda)$ tend uniformément vers $\mathfrak{F}(x, y; \lambda)$ lorsque n croît indéfiniment, de sorte que la fonction $\varphi_n(x)$ représentée par la formule

$$(12)' \quad \varphi_n(x) = \psi(x) - \frac{1}{\mathfrak{O}_n(\lambda)} \int_0^1 \psi(s) \mathfrak{F}_n(x, s; \lambda) ds$$

tend uniformément vers la fonction $\Phi(x)$

$$(17) \quad \Phi(x) = \psi(x) - \frac{1}{\Omega(\lambda)} \int_0^1 \psi(s) \mathcal{F}(x, s; \lambda) ds,$$

pourvu que λ ne soit pas racine de l'équation $\Omega(\lambda) = 0$.

D'autre part, l'équation

$$\varphi_n(x) + \lambda \int_0^1 K_n(x, s) \varphi_n(s) ds = \psi(x)$$

peut s'écrire

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) + \lambda \int_0^1 f(x, s) \Phi(s) ds + \lambda \int_0^1 [K_n(x, s) - f(x, s)] \varphi_n(s) ds \\ + \lambda \int_0^1 f(x, s) [\varphi_n(s) - \Phi(s)] ds = \psi(x); \end{aligned}$$

si n croît indéfiniment, les deux dernières intégrales du premier membre tendent vers zéro, et il reste à la limite

$$\Phi(x) + \lambda \int_0^1 f(x, s) \Phi(s) ds = \psi(x).$$

Remarque. — Les théorèmes généraux sur l'équation de Fredholm peuvent de même se déduire comme cas limites de théorèmes analogues relatifs au cas élémentaire considéré dans cette Note.

SUR LES ÉQUATIONS D'ORDRE NOMOGRAPHIQUE 3 ET 4 ⁽¹⁾;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

I.

1. Ordre nomographique d'une équation. — Rappelons

(¹) Les principaux résultats contenus dans ce Mémoire ont été précédemment communiqués à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, t. CXLII, p. 988; t. CXLIV, p. 190, 895 et 1027).

d'abord quelques notions maintenant classiques de Nomographie. Si nous désignons les variables $z_1, z_2, \dots, z_n$, entrant dans une équation, simplement par leurs indices, et si nous attribuons aux divers signes fonctionnels les indices de toutes les variables sur lesquelles ils portent, nous dirons qu'une équation à n variables

$$F_{1,2,\dots,n} = 0$$

est *nomographiquement rationnelle* si elle s'écrit

$$\sum f_1 f_2 \dots f_n = 0.$$

Si, ordonnée par rapport aux fonctions de la variable z_i , elle contient $p_i + 1$ termes linéairement distincts, elle est dite, comme l'a proposé M. Soreau ⁽¹⁾, de l'ordre *nomographique* p_i par rapport à la variable z_i . Son ordre nomographique total sera

$$p = \sum_{i=1}^{i=n} p_i,$$

Par exemple, pour l'équation

$$f_1 f_2 + \sqrt{1+f_1^2} \sqrt{1+f_2^2} = f_3,$$

nomographiquement rationnelle par rapport aux fonctions

$$f_1, \sqrt{1+f_1^2}, f_2, \sqrt{1+f_2^2}, f_3,$$

on a

$$p_1 = 2, \quad p_2 = 2, \quad p_3 = 1,$$

et, par suite,

$$p = 5.$$

Mais, pour faire ressortir que cette notion de l'ordre nomographique est purement formelle, nous n'aurons qu'à remarquer que l'équation précédente peut encore s'écrire ⁽²⁾

$$g_1 + g_2 = g_3,$$

lorsqu'on pose

$$g_1 = \log(f_1 + \sqrt{1+f_1^2}), \quad g_2 = \log(f_2 + \sqrt{1+f_2^2}),$$

$$g_3 = \log(f_3 + \sqrt{f_3^2 - 1}),$$

⁽¹⁾ *Bulletin de la Société des Ingénieurs civils*, août 1901, p. 243.

⁽²⁾ *Traité de Nomographie* (ou, plus simplement, *T. N.*), p. 421.

et que, sous cette forme, elle **apparaît** comme étant de l'ordre 3.

Un tel changement des fonctions composantes équivaut d'ailleurs à une **anamorphose** transcendante.

Lorsqu'on se borne à des transformations projectives, l'ordre nomographique se conserve.

2. *Genre d'un nomogramme à points alignés.* — Nous appelons *genre* d'un nomogramme à points alignés le nombre des échelles curvilignes qu'il comporte. Ce genre sera donc 0, 1, 2 ou 3 suivant qu'il y aura 0, 1, 2 ou 3 échelles curvilignes, c'est-à-dire suivant que, dans l'équation représentée, mise sous forme du déterminant

$$(1) \quad \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0,$$

il y aura 0, 1, 2 ou 3 lignes dont les éléments seront *linéairement dépendants*, c'est-à-dire exprimables linéairement au moyen d'une *seule fonction* de même indice.

En se reportant à la définition précédente, on voit que l'équation développée sera alors d'ordre 3, 4, 5 ou 6.

Donc, en général, à un nomogramme de genre q correspondra une équation d'ordre $p = q + 3$. Mais il pourra se faire que cette équation renferme un ou plusieurs *facteurs parasites* ne portant que sur deux des trois variables, de sorte que l'équation représentée, une fois débarrassée de ces facteurs parasites, ne soit plus que d'un ordre inférieur à $q + 3$.

Cela aura lieu si les supports de deux des échelles (z_1) et (z_2), par exemple, sont confondus (sans d'ailleurs que ces échelles soient identiques). Entre les valeurs de z_1 et z_2 correspondant à chaque point du support commun existe une relation bien déterminée

$$\varphi_1 = \varphi_2.$$

Il suit de là que des valeurs de z_1 et z_2 satisfaisant à cette relation, associées à une valeur quelconque pour z_3 , se correspondent en vertu de l'équation représentée, autrement dit que celle-ci doit être de la forme

$$(2) \quad f_{1,2,3}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0.$$

Et le nomogramme peut être considéré comme représentatif de l'équation

$$f_{1,2,3} = 0$$

quand on associe à des valeurs de z_1 et z_2 , affectées à des points *différents* du support commun, la valeur de z_3 que donne la troisième échelle sur l'alignement des deux premières.

Le grand intérêt de cette remarque réside dans ce fait, mis en évidence pour la première fois par M. Clark, et sur lequel nous reviendrons plus loin, que certaines équations, non directement représentables par points alignés, peuvent le devenir grâce à l'introduction d'un facteur parasite convenable.

3. *Construction des échelles par projection.* — Toute échelle cotée au moyen des valeurs de la variable (z_i) peut être définie par l'équation en coordonnées parallèles u et v de son point courant

$$u f_i + v g_i + h_i = 0.$$

Cette échelle est dite *algébrique* par rapport à la fonction f_i quand son équation peut s'écrire

$$U + V f_i + W f_i^2 + \dots + Z f_i^n = 0,$$

$U, V, W, \dots, Z$ étant des fonctions linéaires en u et v , et nous avons fait voir qu'une telle échelle peut se construire par des projections successives à partir de l'échelle de la fonction f_i portée sur un axe rectiligne. En particulier

$$(3) \quad U + V f_i = 0$$

représente une échelle portée sur la droite, unissant les points $U=0, V=0$, et qui est simplement projective de celle de la fonction f_i ⁽¹⁾. Appelons *faisceau projetant* de celle-ci le système de toutes les droites unissant les points de cette échelle à un centre de projection quelconque. Toute échelle projective de celle de f_i s'obtiendra en coupant un tel faisceau par une transversale dont la position sera entièrement définie par trois de ses points. Donc, toute échelle projective peut être construite quand on a déterminé trois de ses points.

(¹) *T. N.*, p. 15.

On peut d'ailleurs, pour la construction, coter les points, non pas au moyen des valeurs de la variable z_i , mais au moyen de celles de la fonction f_i , quitte, après la construction, à remplacer celles-ci par les valeurs correspondantes de z_i . En ce cas, l'échelle à projeter est *métrique*, ce qui, en bien des cas, peut être avantageux, surtout lorsque, à toutes les valeurs de f_i , ne correspondent pas de valeurs réelles de z_i (exemple : $\sin z_i$ qui ne donne des valeurs réelles pour z_i que si $|\sin z_i| < 1$).

De même

$$(4) \quad U + V f_i + W f_i^2 = 0$$

représente une échelle dont le support est une conique et qui peut se construire par double projection de l'échelle de la fonction f_i , attendu que nous avons démontré que *tout faisceau projetant une telle échelle à partir d'un de ses points se confond avec un faisceau projetant de la fonction f_i* ⁽¹⁾. Il suit de là qu'une telle échelle est complètement déterminée par quatre de ses points, attendu que le faisceau projetant ayant pour centre l'un quelconque de ces quatre points est entièrement déterminé par les rayons unissant ce point aux trois autres et qu'il suffit de deux tels faisceaux pour construire l'échelle conique demandée.

4. Transformation homographique générale. — Nous rappellerons enfin qu'on peut faire subir à tout nomogramme à points alignés la transformation homographique la plus générale, ce qui revient simplement à multiplier l'équation, mise sous forme de déterminant, qu'il représente par un déterminant quelconque du troisième ordre non nul. Et comme un tel déterminant renferme, sous forme homogène, 9 éléments, il permet l'introduction de 8 paramètres arbitraires. Il permet notamment de choisir arbitrairement les points correspondant à quatre cotes quelconques, chacun d'eux équivalant à l'ensemble de deux coordonnées ⁽²⁾.

En particulier, comme nous venons de voir que toute échelle conique est entièrement déterminée par quatre de ses points, il en résulte que, si une telle échelle intervient sur un nomogramme

⁽¹⁾ *T. N.*, p. 142.

⁽²⁾ *T. N.*, p. 133.

à points alignés, elle peut être choisie d'une façon entièrement arbitraire.

En pratique, c'est généralement, parmi les trois variables, toujours la même, z_3 , qui est prise pour inconnue. Les deux autres, z_1 et z_2 , étant, dès lors, qualifiées de *données*, on sait, dans chaque cas particulier, entre quelles limites a_1 et b_1 , a_2 et b_2 , elles restent comprises; et les quatre points que l'on se donne arbitrairement sont ceux qui correspondent à ces valeurs limites ⁽¹⁾.

II.

5. *Points critiques d'un nomogramme à points alignés.* — Nous appelons *points critiques* d'un nomogramme à points alignés les points de mutuelle rencontre des échelles qui le composent, *valeurs critiques* des variables servant à graduer ces échelles les valeurs que ces variables prennent en ces points; et nous étendons cette désignation aux valeurs correspondantes des fonctions de ces variables dont dépendent ces échelles.

Nous verrons, dans le paragraphe III de ce Mémoire, le rôle capital que joue cette notion de valeur critique dans la construction des nomogrammes à points alignés; nous allons d'abord nous occuper de la détermination de ces valeurs.

Celle-ci repose tout entière sur la remarque que voici : lorsqu'on donne à deux des variables, z_1 et z_2 par exemple, les valeurs critiques ξ_1 et ξ_2 qui correspondent à un même point critique P, l'alignement ξ_1, ξ_2 est indéterminé; on peut le confondre avec une droite quelconque passant par le point P, et, par suite, la valeur correspondante de z_3 est aussi indéterminée. En d'autres termes, *on a les valeurs critiques correspondant aux points de rencontre des échelles (z_1) et (z_2) en cherchant les couples de valeurs de z_1 et z_2 rendant z_3 indéterminé.*

Lorsque l'équation est mise sous la forme du déterminant (1), cette détermination va de soi. Il est clair, en effet, que les valeurs de z_1 et z_2 qui annulent ce déterminant, quelle que soit la valeur

⁽¹⁾ T. N., p. 135.

de z_3 , sont telles que

$$(5) \quad \frac{f_1}{f_2} = \frac{g_1}{g_2} = \frac{h_1}{h_2},$$

système de deux équations d'où l'on tire les valeurs critiques de z_1 et z_2 ; il y a lieu toutefois d'examiner de près, une fois ces valeurs trouvées, de quelle façon il convient de les associer, aux divers points critiques.

Ce n'est d'ailleurs généralement pas ainsi que le problème se pose; le principal intérêt de la considération des valeurs critiques réside, comme nous l'allons voir, dans la possibilité qui en résulte de construire le nomogramme à points alignés d'une équation sans l'amener au préalable (par des transformations algébriques parfois assez délicates) à la forme du déterminant (1). Notre premier objet doit donc être de trouver directement les valeurs critiques des variables entrant dans une équation nomographiquement rationnelle. Tel est le problème dont nous allons nous occuper pour les équations d'ordre nomographique 3 ou 4, les seules, ou à peu près, qui intéressent les applications pratiques.

6. *Valeurs critiques dans le cas d'une équation d'ordre nomographique 3.* — L'équation d'ordre nomographique 3 la plus générale peut s'écrire

$$(6) \quad A f_1 f_2 f_3 + \sum B_i f_j f_k + \sum C_i f_i + D = 0 \quad (i, j, k = 1, 2, 3).$$

L'étude algébrique complète que nous avons faite précédemment de cette équation (1) a mis en évidence le rôle que jouent dans cette théorie certains invariants que définissent les formules suivantes.

Posant

$$(7) \quad \begin{cases} F_0 = \sum B_i C_i - AD, \\ E_i = A C_i - B_j B_k, & F_i = F_0 - 2 B_i C_i, & G_i = B_i D - C_j C_k, \end{cases}$$

on a, quel que soit i ,

$$(8) \quad F_i^2 - 4 E_i G_i = \Delta,$$

(1) *Acta mathematica*, t. XXI, 1897, p. 301, et *T. N.*, Chap. VI, Sect. IIB.

Δ étant le discriminant du premier membre de (6) rendu homogène. Posant encore

$$(9) \quad H_i = B_i(F_0 - 2B_j C_j - 2B_k C_k) + 2A C_j C_k, \quad K = A F_0 - 2B_1 B_2 B_3,$$

nous aurons aussi

$$(10) \quad F_j B_i + 2E_j C_k = F_k B_i + 2E_k C_j = H_i, \quad A F_i + 2E_i B_i = K.$$

Pour déterminer les valeurs critiques σ_1 et σ_2 de f_1 et f_2 , nous écrirons l'équation (6) sous la forme

$$f_3(A f_1 f_2 + B_1 f_2 + B_2 f_1 + C_3) + B_3 f_1 f_2 + C_1 f_1 + C_2 f_2 + D = 0,$$

et nous remarquerons que ces valeurs critiques, rendant f_3 indéterminé, doivent satisfaire à la fois aux équations

$$(11) \quad \begin{cases} A \sigma_1 \sigma_2 + B_1 \sigma_2 + B_2 \sigma_1 + C_3 = 0, \\ B_3 \sigma_1 \sigma_2 + C_1 \sigma_1 + C_2 \sigma_2 + D = 0, \end{cases}$$

d'où, par élimination du terme en $\sigma_1 \sigma_2$, on déduit immédiatement, eu égard à (7),

$$E_1 \sigma_1 + E_2 \sigma_2 + AD - B_3 C_3 = 0.$$

Si l'on remarque, en se reportant encore à (7), que

$$AD - B_3 C_3 = - \frac{F_1 + F_2}{2},$$

on voit que cette dernière égalité peut encore s'écrire

$$(12) \quad E_1 \sigma_1 + E_2 \sigma_2 - \frac{F_1 + F_2}{2} = 0.$$

Si, de même, on élimine entre les équations (11) les termes en σ_2 seulement, on a

$$(13) \quad E_2 \sigma_1 \sigma_2 + \frac{F_1 - F_2}{2} \sigma_1 - G_1 = 0.$$

Retranchant cette dernière équation de l'équation (12) multipliée par σ_1 , on a

$$E_1 \sigma_1^2 - F_1 \sigma_1 + G_1 = 0.$$

On trouverait la même équation avec l'indice 2 par l'élimination de σ_1 ; et, comme le choix des variables z_1 et z_2 a été arbitraire,

on peut dire que les valeurs critiques σ'_i et σ''_i de f_i sont les racines de l'équation

$$(14) \quad E_i \sigma_i^2 - F_i \sigma_i + G_i = 0.$$

Par suite,

$$(15) \quad \sigma'_i = \frac{F_i + \sqrt{\Delta}}{2 E_i}, \quad \sigma''_i = \frac{F_i - \sqrt{\Delta}}{2 E_i},$$

si nous convenons de représenter par $\sqrt{\Delta}$ la valeur *arithmétique* de ce radical. Nous répartissons ainsi les valeurs critiques en deux groupes (σ') et (σ'') respectivement caractérisés par le fait que le covariant

$$2 E_i \sigma_i - F_i$$

a la même valeur, $\sqrt{\Delta}$ ou $-\sqrt{\Delta}$, pour les trois valeurs critiques σ_i du même groupe. Or, l'équation (12) peut s'écrire

$$(16) \quad 2 E_1 \sigma_1 - F_1 = -(2 E_2 \sigma_2 - F_2).$$

Ceci nous montre que *les deux valeurs critiques associées en un même point critique sont nécessairement de groupes différents*. Il résulte de là que, si P_i est le point critique d'un nomogramme de genre 0 situé à la rencontre des droites d_j et d_k portant respectivement les échelles (z_j) et (z_k) , on pourra avoir soit la disposition

$$P_1(\sigma'_2, \sigma''_3), \quad P_2(\sigma'_3, \sigma''_1), \quad P_3(\sigma'_1, \sigma''_2),$$

soit la disposition

$$P_1(\sigma'_3, \sigma'_2), \quad P_2(\sigma'_1, \sigma'_3), \quad P_3(\sigma'_2, \sigma'_1),$$

d'où, pour la même équation d'ordre 3, deux classes de nomogrammes de genre 0 homographiquement irréductibles de l'une à l'autre.

La correspondance des points de la droite d_i et des valeurs de la fonction f_i étant univoque, on voit en outre que les valeurs critiques σ et les points critiques P sont ensemble réels ou imaginaires.

Donc, *le nomogramme de genre 0 représentatif de l'équa-*

tion d'ordre 3 donnée ne sera réel que si $\Delta \geq 0$ ⁽¹⁾. C'est le théorème que nous avons précédemment obtenu par une autre voie ⁽²⁾.

Si d'ailleurs $\Delta = 0$, les valeurs critiques σ' et σ'' devenant égales deux à deux, les trois points critiques se confondent, ce qui est la seconde partie du théorème ici rappelé ⁽³⁾.

Nous verrons plus loin comment, une fois connues les valeurs critiques, la construction du nomogramme peut s'effectuer par une voie purement géométrique.

7. Valeurs critiques dans le cas d'une équation d'ordre nomographique 4. — L'équation d'ordre nomographique 4 la plus générale peut s'écrire

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} & f_1(a_0 f_1 f_2 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3) + g_1(b_0 f_1 f_2 + b_1 f_1 + b_2 f_2 + b_3) \\ & + c_0 f_1 f_2 + c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 = 0. \end{aligned} \right.$$

L'équation représentée par un nomogramme de genre 1, sur lequel les échelles rectilignes (z_1) et (z_2) (portées par les droites d_1 et d_2 qui se coupent en P_3) sont respectivement projectives de f_1 et f_2 , est de cette forme. Mais, inversement, une telle équation est-elle toujours représentable par un tel nomogramme? Par une voie purement algébrique [en cherchant à ramener l'équation (17) à la forme canonique correspondant à un nomogramme de genre 1] ⁽⁴⁾, M. Clark a établi que non, en faisant connaître la condition requise pour que cette représentation soit possible. Nous allons retrouver son résultat d'une façon bien simple, grâce à la notion des valeurs critiques.

En effet, si la représentation en question est possible, les valeurs σ_1 et σ_2 que prennent f_1 et f_2 en P_3 sont critiques. Or, ces valeurs devant satisfaire à (17), *quelle que soit la valeur de z_3 ,*

⁽¹⁾ Il convient de ne pas perdre de vue que nous n'avons égard ici qu'aux échelles projectives de celles des fonctions f_i , car lorsque $\Delta < 0$ on peut être ramené au cas où $\Delta = 0$ moyennant une *anamorphose transcendante*, ainsi que M. Fontené en a, le premier, fait la remarque (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1900, p. 494).

⁽²⁾ *T. N.*, p. 440.

⁽³⁾ *T. N.*, p. 446.

⁽⁴⁾ *T. N.*, p. 182.

doivent être telles que l'on ait à la fois

$$(18) \quad \begin{cases} a_0 \sigma_1 \sigma_2 + a_1 \sigma_1 + a_2 \sigma_2 + a_3 = 0, \\ b_0 \sigma_1 \sigma_2 + b_1 \sigma_1 + b_2 \sigma_2 + b_3 = 0, \\ c_0 \sigma_1 \sigma_2 + c_1 \sigma_1 + c_2 \sigma_2 + c_3 = 0. \end{cases}$$

Et cela exige que le résultat de l'élimination de σ_1 et σ_2 entre ces trois équations soit nul. Or, si l'on pose

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

et si l'on représente par D_i le déterminant déduit de celui-ci lorsqu'on y remplace les éléments a_i, b_i, c_i par a_0, b_0, c_0 , on voit, en considérant les équations (18) comme linéaires en $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1$ et σ_2 , que l'on en tire

$$(19) \quad \sigma_1 \sigma_2 = -\frac{D}{D_3}, \quad \sigma_1 = \frac{D_1}{D_3}, \quad \sigma_2 = \frac{D_2}{D_3}.$$

Il vient, par suite, pour la condition cherchée

$$(20) \quad DD_3 + D_1 D_2 = 0.$$

C'est celle à laquelle M. Clark est parvenu par une voie sensiblement plus laborieuse.

Si elle est remplie, les valeurs critiques de σ_1 et σ_2 sont données par les deux dernières formules (19).

III.

8. Construction projective des nomogrammes de genre 0 et 1.

— Plaçons-nous d'abord, pour le genre 0, dans l'hypothèse où $\Delta > 0$, c'est-à-dire où les trois points critiques sont distincts (ce qui, par leur jonction deux à deux, donne trois supports d_i non concourants).

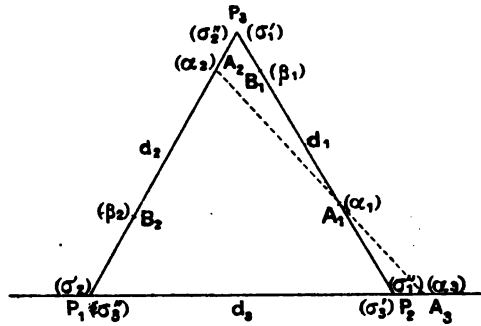
Nous pouvons, comme nous l'avons vu au n° 4, nous donner arbitrairement les points A_1 et B_1, A_2 et B_2 où les variables z_1 et z_2 prennent leurs valeurs limites a_1 et b_1, a_2 et b_2 , auxquelles correspondent pour les fonctions f_1 et f_2 les valeurs α_1 et β_1, α_2 et β_2 .

Tirant les droites A_1B_1 et A_2B_2 , qui sont les supports d_1 et d_2 , nous avons le point critique P_3 où les valeurs de f_1 et f_2 sont respectivement, par exemple (n° 6), σ'_1 et σ'_2 .

Or, sur d_1 , les points A_1 , B_1 , P_3 cotés α , β_1 , σ'_1 appartiennent à une échelle projective d'une échelle métrique (n° 3) et la déterminent complètement (¹); on peut donc marquer sur cette échelle le point coté σ'_1 ; c'est le point P_2 . Le point P_1 se détermine de même sur d_2 où l'on connaît déjà les points A_2 , B_2 , P_3 .

Tirant la droite P_1P_2 on a le support d_3 sur lequel les points P_1 et P_2 sont cotés σ''_1 et σ''_2 ; un troisième point suffira pour déterminer complètement l'échelle (z_3) comme projective de celle de f_3 . Or, ce troisième point est immédiatement donné par la rencontre

Fig. 1.



de d_3 avec l'alignement défini par deux points déjà cotés sur d_1 et d_2 , par exemple A_1 et A_2 , la cote du point obtenu se tirant de l'équation (6) où z_1 et z_2 ont été remplacés par leurs valeurs α , et α_2 .

Si $\Delta = 0$, la construction doit être un peu modifiée, attendu que, par les valeurs critiques, on n'a plus qu'un point (le point critique unique P) de d_3 . Pour avoir un second point de ce support, il faut déterminer sur d_1 et d_2 les points où aboutissent deux alignements correspondant, en vertu de (6), à une même valeur de z_3 . Un troisième alignement quelconque, indépendant des deux premiers,

(¹) Si l'on possède déjà une échelle de la fonction f_1 , on peut coter A_1 , B_1 , P_3 au moyen des valeurs correspondantes α_1 , β_1 , ξ'_1 de z_1 et construire directement l'échelle (z_1) comme projective de celle de f_1 .

donne ensuite sur d_3 le troisième point nécessaire à la détermination complète de l'échelle (z_3) .

La même construction projective s'étend immédiatement aux nomogrammes de genre 1 lorsque la condition (20) ci-dessus est remplie. En effet, la connaissance des valeurs σ_1 et σ_2 de f_1 et f_2 au point critique P, jointe aux valeurs α_1 et β_1 d'une part, α_2 et β_2 de l'autre, permet la détermination complète des échelles (z_1) et (z_2) . On construit ensuite, au moyen de doubles alignements correspondants, comme ci-dessus, autant de points qu'il est nécessaire de l'échelle (z_3) , quatre, par exemple, s'il s'agit d'une échelle conique (n° 3).

9. *Emploi direct des échelles des fonctions composantes.* — Pour que l'échelle (z_i) figurant sur un nomogramme soit non pas seulement projective de l'échelle de la fonction f_i , mais cette échelle elle-même, il faut et il suffit que le point à l'infini sur la droite d_i corresponde à la valeur infinie de la fonction f_i . Appelons d'une manière générale I_i le point de d_i où la fonction f_i devient infinie. Pour que les échelles (z_i) et (z_j) soient simultanément réduites à celles des fonctions f_i et f_j il suffit, par une transformation homographique, de rejeter la droite $I_i I_j$ à l'infini. Si, par hasard, le point I_k se trouve lui-même sur cette droite, la troisième échelle se trouve *ipso facto* réduite aussi à celle de la fonction f_k . Mais il peut se faire aussi que la droite $I_i I_j$ coïncide avec le support d'une des échelles, auquel cas elle ne saurait être tout entière rejetée à l'infini. Il est donc essentiel d'examiner à part les cas où l'un ou plusieurs des points I se confondent avec des points critiques. C'est cette discussion que nous allons présenter ici d'une façon complète.

Nous ferons correspondre les numéros I, II, III et IV aux cas où 0, 1, 2 et 3 valeurs critiques des fonctions composantes sont infinies, en les affectant d'un accent lorsque les trois supports d_1 , d_2 , d_3 sont concourants et d'un indice α lorsque les trois points I_1 , I_2 , I_3 sont en ligne droite. Observons d'ailleurs tout de suite que les hypothèses (II $_{\alpha}$), (II' $_{\alpha}$), (III') et (IV') correspondent à des impossibilités.

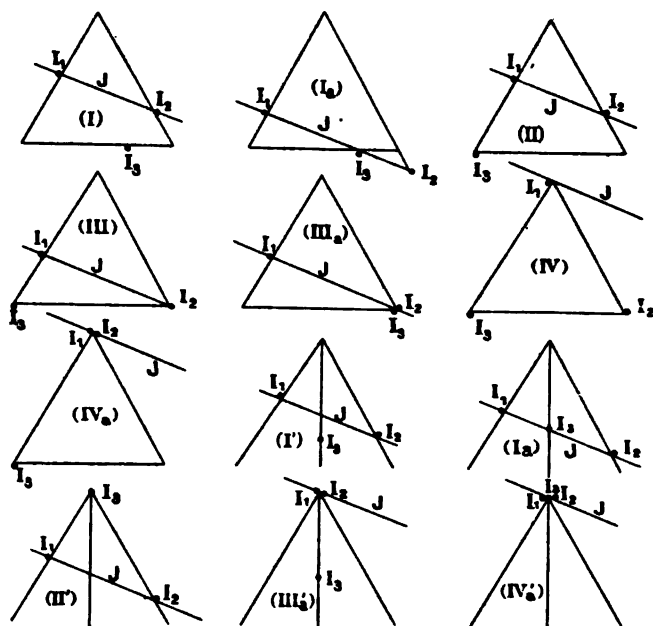
La disposition relative à chacune des autres hypothèses est re-

présentée schématiquement sur le Tableau ci-joint où la droite J est celle que l'on rejette à l'infini. Nous allons donner un exemple de chacune d'elles.

Au préalable, faisons les deux remarques générales que voici :

1° Pour avoir la valeur que prend l'une des fonctions lorsque les deux autres sont infinies, il faut diviser l'équation (6) par

Fig. 2.



le produit de celles-ci, ce qui montre que la valeur de f_i pour $f_j = f_k = \infty$ est donnée par

$$A f_i + B_i = 0,$$

et, par suite, qu'elle ne peut devenir elle-même infinie que si $A = 0$.

2° Pour qu'une des valeurs critiques σ_i devienne infinie, l'équation (14) montre qu'il faut que $E_i = 0$.

Il suit de là que les divers cas sont caractérisés comme suit (la

notation θ indiquant une quantité différente de 0) :

$$\Delta > 0.$$

I.....	$E_i = \theta,$	$E_j = \theta,$	$E_k = \theta,$	$A = \theta,$
I _a	$\theta,$	$\theta,$	$\theta,$	$\theta,$
II.....	$\theta,$	$\theta,$	$\theta,$	$\theta,$
III.....	$\theta,$	$\theta,$	$\theta,$	$\theta,$
III _a	$\theta,$	$\theta,$	$\theta,$	$\theta,$
IV.....	$\theta,$	$\theta,$	$\theta,$	$\theta,$
IV _a	$\theta,$	$\theta,$	$\theta,$	$\theta.$

$$\Delta = 0.$$

I'.....	$E_i = \theta,$	$E_j = \theta,$	$E_k = \theta,$	$A = \theta,$
I' _a	$\theta,$	$\theta,$	$\theta,$	$\theta,$
II'.....	$\theta,$	$\theta,$	$\theta,$	$\theta,$
II' _a	$\theta,$	$\theta,$	$\theta,$	$\theta,$
IV' _a	$\theta,$	$\theta,$	$\theta,$	$\theta.$

Nous retrouvons bien ainsi les diverses conditions établies naguère par une voie purement algébrique (1).

Remarquons enfin que, étant libres de choisir des axes cartésiens avec lesquels les trois supports aient des équations aussi simples que possible, et ayant sur chacun de ces supports les cotes de 3 points, nous pouvons immédiatement écrire pour chacun d'eux les coordonnées du point courant en fonction de sa cote. Il suffit ensuite de remplacer ces coordonnées par leur expression dans le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

pour avoir, à peu près sans calcul algébrique, la transformation de l'équation donnée sous la forme de déterminant (1). C'est ce que nous aurons soin de faire à l'occasion de chacun des exemples particuliers ci-dessous.

10. Exemples de tous les cas possibles d'équation d'ordre 3 représentable par un nomogramme de genre 0. — Représentant

(1) T. N., p. 459. A cet endroit, une faute d'impression s'est glissée dans l'avant-dernière ligne du Tableau, où le signe θ pour A doit être remplacé par 0.

par J_3 la valeur de z_3 pour $z_1 = z_2 = \infty$, nous disposons au-dessous de chaque équation les valeurs critiques dans l'ordre

$$\begin{pmatrix} \sigma'_1 & \sigma'_1 & \sigma'_3 \\ \sigma'_1 & \sigma'_3 & \sigma'_3 \end{pmatrix}$$

en y ajoutant (J_3).

I.
$$z_1 z_2 z_3 + z_2 z_3 - z_3 z_1 + z_1 z_2 + z_1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (-1).$$

Nous indiquerons ici le détail de la mise sous forme de déterminant, sans y revenir pour les exemples suivants où nous nous contenterons de donner le résultat, qu'il est très facile de retrouver en se reportant à la marche indiquée ci-dessous.

Si nous prenons d_1 pour Ox , d_3 pour Oy , et d_2 comme droite $y = x + 1$, nous avons

$$\begin{aligned} x_1 &= m_1 z_1 + n_1, \\ x_2 &= m_2 z_2 + n_2, \\ y_3 &= \frac{m_3 z_3 + n_3}{z_3 + p_3}, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} x_1 = 0, & \quad -1, & \text{pour} & \quad z_1 = 0, & \quad -\frac{1}{2}, \\ x_2 = 0, & \quad -1, & \text{pour} & \quad z_2 = 0, & \quad -1, \\ y_3 = 0, & \quad 1, \quad \infty, & \text{pour} & \quad z_3 = 0, & \quad 1, \quad -1, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} x_1 &= 2z_1, \\ x_2 &= z_2, \\ y_3 &= \frac{2z_3}{z_3 + 1}, \end{aligned}$$

d'où le déterminant

$$\begin{vmatrix} 2z_1 & 0 & 1 \\ z_2 & z_2 + 1 & 1 \\ 0 & 2z_3 & z_3 + 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Quant à la construction, elle est d'une extrême simplicité, attendu que les échelles (z_1) et (z_2) sont métriques et que l'échelle homographique (z_3), ayant même cote (0) que l'échelle (z_1) en

leur point commun O, est effectivement projective de celle-ci; le centre de projection est à la rencontre des alignements joignant, par exemple, les points cotés 1 et les points cotés — 1 (ce dernier, par conséquent, parallèle à OY).

Pour les exemples suivants, nous bornant à inscrire au-dessous de chaque équation les valeurs critiques σ' et σ'' ainsi que J_3 , nous les faisons suivre de la transformée sous forme de déterminant qui en résulte par une marche analogue à celle ci-dessus.

$$\text{I}_a. \quad z_2 z_3 - z_3 z_1 + z_1 z_2 + z_1 = 0,$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\infty),$$

$$\begin{vmatrix} z_1 & 0 & 1 \\ z_2 & z_2 + 1 & 1 \\ 0 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\text{II.} \quad z_1 z_2 z_3 + z_3 z_1 - z_1 + z_2 = 0,$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \infty \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (0),$$

$$\begin{vmatrix} z_1 & 0 & 1 \\ z_2 & z_2 + 1 & 1 \\ 0 & 1 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\text{III.} \quad z_1 z_2 z_3 + z_2 z_3 - z_1 = 0,$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \infty & \infty \end{pmatrix} \quad (0),$$

$$\begin{vmatrix} z_1 & 0 & 1 \\ 0 & z_2 & 1 \\ -z_3 & 1 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\text{III}_a. \quad z_3 z_1 - z_1 z_2 - z_2 = 0,$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \infty \\ 0 & \infty & 0 \end{pmatrix} \quad (\infty),$$

$$\begin{vmatrix} z_1 & 0 & 1 \\ 0 & z_2 & 1 \\ -1 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

IV.

$$x_1 x_2 x_3 - 1 = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \infty & \infty & \infty \end{pmatrix} \quad (0),$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x_2 + 1 \\ 1 & -x_3 & -x_3 \end{vmatrix} = 0.$$

IV_a.

$$x_3 x_1 - x_1 + x_2 = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \infty & 1 \\ \infty & 0 & \infty \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & 0 & 1 \\ x_2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x_3 \end{vmatrix} = 0.$$

I'.

$$x_1 x_2 x_3 + x_2 x_3 - x_3 x_1 + x_1 x_2 + 4 = 0,$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad (-1),$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & 0 & 1 \\ 2 & x_2 - 2 & -1 \\ -x_3 & x_3 + 2 & x_3 + 1 \end{vmatrix} = 0.$$

I'_a.

$$x_2 x_3 + x_3 x_1 - x_1 x_2 = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_3},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\infty),$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & 0 & 1 \\ 0 & x_2 & 1 \\ x_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

II'.

$$x_1 x_2 x_3 - x_1 - x_2 = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \infty \end{pmatrix} \quad (0),$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & 0 & 1 \\ 0 & x_2 & 1 \\ 1 & 1 & x_3 \end{vmatrix} = 0.$$

III'_a.

$$x_2 x_3 - 2 x_3 x_1 + 1 = 0,$$

$$\begin{pmatrix} \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & 0 & 1 \\ x_2 & 1 & 1 \\ 1 & -x_3 & x_3 \end{vmatrix} = 0.$$

IV'.

$$z_1 - 2z_2 + z_3 = 0,$$

$$(\infty \quad \infty \quad \infty) \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} z_1 & 0 & 0 \\ z_2 & 1 & 1 \\ z_3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

IV.

11. *Nomogrammes coniques pour équations d'ordre 3.* — Lorsqu'une équation est ordonnée nomographiquement par rapport à l'une des variables, z_3 par exemple, sous la forme

$$(21) \quad f_3 f_{12} + g_3 g_{12} + h_3 h_{12} = 0,$$

on peut essayer d'effectuer la disjonction des variables en posant

$$(22) \quad u f_{12} - g_{12} = 0, \quad v f_{12} - h_{12} = 0,$$

ce qui donne pour z_3 l'échelle ponctuelle définie par

$$f_3 + u g_3 + v h_3 = 0.$$

Si, éliminant ensuite successivement z_2 et z_1 entre les équations (22), on trouve des équations linéaires en u et v

$$f_1 + u g_1 + v h_1 = 0,$$

$$f_2 + u g_2 + v h_2 = 0,$$

la disjonction se trouve effectuée sous la forme requise pour l'application de la méthode des points alignés.

Appliquons cela à l'équation (6). Mise sous la forme (21), elle s'écrira

$$f_3(A f_1 f_2 + B_1 f_2 + B_2 f_1 + C_3) + B_3 f_1 f_2 + C_1 f_1 + C_2 f_2 + D = 0,$$

et les équations (22) seront ici

$$A f_1 f_2 + B_2 f_1 + B_1 f_2 + C_3 = u,$$

$$B_3 f_1 f_2 + C_1 f_1 + C_2 f_2 + D = v.$$

L'élimination de f_2 entre ces équations donne, eu égard aux

formules du n° 6,

$$E_1 f_1^2 + (B_2 u - A v - F_1) f_1 + C_2 u - B_1 v + G_1 = 0,$$

équation linéaire en u et v , donc définissant un point dont le support a pour équation

$$(B_2 u - A v - F_1)^2 - 4 E_1 (C_2 u - B_1 v + G_1) = 0,$$

que, eu égard encore aux formules du n° 6, on peut écrire

$$(B_2 u - A v)^2 - 2 H_2 u + 2 K v + \Delta = 0,$$

équation qui resterait la même si l'on permutait les indices 1 et 2. Il résulte de là qu'on obtient ainsi un nomogramme sur lequel les échelles (z_1) et (z_2) ont pour support une *même* conique. Telle est la remarque fondamentale due à M. Clark; et, comme elle ne suppose rien sur le discriminant Δ , on voit qu'elle s'applique indistinctement à toutes les équations d'ordre 3.

Il résulte d'ailleurs de ce que nous avons rappelé au n° 3 que chacune de ces échelles (z_1) et (z_2) peut être construite au moyen de deux faisceaux projetants de la fonction f_1 ou f_2 . Pour déterminer un tel faisceau, il en faut connaître trois rayons. Or, grâce à la considération de l'homographie la plus générale (n° 4), on peut disposer arbitrairement de quatre points A, B, C, D d'une de ces échelles, cotés d'une manière quelconque. Dans le faisceau obtenu en prenant pour centre l'un d'eux, A par exemple, on connaît les trois rayons AB, AC, AD avec leur cote; par suite, le choix fait des quatre points A, B, C, D entraîne la détermination complète soit de l'échelle (z_1) , soit de l'échelle (z_2) , et c'est également sur cette remarque que M. Clark a fondé la construction de ses nomogrammes coniques.

La question qui se pose est celle qui consiste à trouver la relation liant z_1 et z_2 en chaque point du support conique commun. M. Clark la résout en ramenant l'équation donnée à la forme canonique

$$(23) \quad \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 + (\varphi_1 + \varphi_2) \psi_3 + \chi_3 = 0,$$

symétrique par rapport à φ_1 et φ_2 , parce qu'alors la relation cherchée s'écrit

$$(24) \quad \varphi_1 = \varphi_2.$$

Mais la considération des valeurs critiques nous a conduit à trouver le moyen d'écrire cette relation d'après l'équation générale (6) sans lui faire subir aucune transformation préalable. Il est, en effet, facile de se rendre compte *a priori* de la disposition des valeurs critiques sur un nomogramme conique : si C est le support conique commun des échelles (z_1) et (z_2), D le support rectiligne de l'échelle (z_3), coupant la conique C aux points I et J, il est clair que les valeurs critiques sont réunies en ces deux points de façon qu'à l'un d'eux correspondent, pour z_1 et z_2 , deux valeurs de même groupe, et, pour z_3 , une valeur du groupe contraire; soit, par exemple : σ'_1, σ'_2 et σ''_3 en I; σ''_1, σ''_2 et σ'_3 en J.

Ainsi, les valeurs σ'_1 et σ'_2 , d'une part, σ''_1 et σ''_2 , de l'autre, sont associées en un même point de la conique. Or, ces couples de valeurs satisfont, d'après ce qui a été vu au n° 6, à la relation

$$2 E_1 \sigma_1 - F_1 = 2 E_2 \sigma_2 - F_2,$$

d'où l'on conclut que l'on doit avoir

$$\varphi_1 = 2 E_1 f_1 - F_1, \quad \varphi_2 = 2 E_2 f_2 - F_2.$$

Et, en effet, si, dans l'équation générale (6), on remplace f_1 et f_2 par leurs valeurs tirées de là, on obtient

$$\varphi_1 \varphi_2 (A f_3 + B_3) + (\varphi_1 + \varphi_2) (K f_3 + H_3) + L_3 f_3 + M_3 = 0,$$

où

$$L_3 = A F_1 F_2 + 2 B_1 E_1 F_2 + 2 B_2 E_2 F_1 + 4 C_3 E_1 E_2,$$

$$M_3 = B F_1 F_2 + 2 C_1 E_2 F_1 + 2 C_2 E_1 F_2 + 4 D E_1 E_2,$$

qui est bien de la forme (23).

Ainsi, la forme particulière de la relation (24), déduite directement de l'équation générale (6), est

$$(25) \quad 2 E_1 f_1 - F_1 = 2 E_2 f_2 - F_2.$$

Elle permet une construction immédiate du nomogramme, rendant inutile non seulement toute transformation algébrique préliminaire, mais même la simple disjonction des variables, puisque, l'échelle (z_1) étant arbitrairement construite comme il vient d'être dit, la relation (25) permet de doubler sa graduation de celle de l'échelle (z_2).

Remarque. — Nous venons de voir qu'on pouvait arbitrairement choisir quatre points cotés de (z_1) . Pour ces quatre cotes, on prendra évidemment, d'une part, les valeurs de z_1 , qui sont limites pour l'application qu'on a en vue, de l'autre, celles qui, en vertu de (25), correspondent de même aux valeurs limites de z_2 .

12. *Nomogrammes coniques pour équations d'ordre 4.* — Appliquons la même analyse à l'équation générale d'ordre nomographique 4 écrite sous la forme (17) du n° 7, ou, par abréviation,

$$(17 \text{ bis}) \quad \alpha_{12}f_3 + \beta_{12}g_3 + \gamma_{12} = 0,$$

et, pour cela, posons

$$(26) \quad \gamma_{12}u - \alpha_{12} = 0, \quad \gamma_{12}v - \beta_{12} = 0.$$

Pour que nous puissions ainsi effectuer la disjonction des variables, remarquons d'abord qu'il faut que les équations en f_1 et f_2 ,

$$\alpha_{12} = 0, \quad \beta_{12} = 0, \quad \gamma_{12} = 0,$$

ne soient pas compatibles. Si, en effet, elles l'étaient, on aurait

$$\gamma_{12} = \lambda \alpha_{12} + \mu \beta_{12},$$

et, des équations (26), on déduirait

$$\lambda u + \mu v = 0,$$

équation indépendante de z_1 et z_2 , conduisant dès lors à une impossibilité. Or, si l'on se reporte au n° 7, on voit que la condition d'incompatibilité des équations ci-dessus [qui, moyennant le remplacement de la notation f par la notation σ , se confondent avec les équations (18)] est

$$DD_3 + D_1D_2 \neq 0.$$

Ainsi, la disjonction par les équations (26) pourra se faire lorsque la condition (20) n'aura pas lieu, c'est-à-dire lorsque l'équation (17) ne sera pas représentable par un nomogramme à deux échelles rectilignes; d'où cette conclusion, autrement obtenue par M. Clark, que, *tandis qu'une équation d'ordre 3 est ad libitum représentable par un nomogramme à échelles*

rectilignes ou coniques, une équation d'ordre 4 est représentable soit par l'un, soit par l'autre de ces types de nomogramme, à l'exclusion l'un de l'autre.

Reste à vérifier que les équations (26) conduisent bien, pour z_1 et z_2 , à des échelles coniques de même support.

Si, d'une manière générale, on pose

$$u_i = c_i u - a_i, \quad v_i = c_i v - b_i,$$

les équations (26) peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} f_1(u_0 f_1 + u_2) + u_1 f_1 + u_3 &= 0, \\ f_2(v_0 f_1 + v_2) + v_1 f_1 + v_3 &= 0, \end{aligned}$$

et, par suite, lorsqu'on pose, encore

$$(27) \quad U_{ij} = u_i v_j - u_j v_i,$$

le résultat de l'élimination de f_2 entre ces équations se met sous la forme

$$(28) \quad U_{01} f_1^2 + (U_{03} - U_{12}) f_1 + U_{23} = 0,$$

équation linéaire en u et v , car on vérifie immédiatement que

$$(29) \quad U_{ij} = (b_i c_j - b_j c_i) u + (c_i a_j - c_j a_i) v + (a_i b_j - a_j b_i).$$

L'équation (28) définit donc bien pour z_1 une échelle conique.

De même, on trouverait pour z_2 l'échelle

$$(30) \quad U_{02} f_1^2 + (U_{03} - U_{21}) f_1 + U_{13} = 0.$$

Il s'agit maintenant de faire voir que les échelles définies par les équations (28) et (30) ont même support. Les équations des supports de ces échelles sont respectivement (en coordonnées parallèles)

$$(U_{03} - U_{12})^2 - 4 U_{01} U_{23} = 0,$$

et

$$(U_{03} - U_{21})^2 - 4 U_{02} U_{13} = 0,$$

et la vérification de leur identité, lorsqu'on remarque que $U_{21} = -U_{12}$, se réduit à celle de

$$U_{02} U_{13} - U_{01} U_{23} = U_{03} U_{12},$$

qui est immédiate lorsqu'on y remplace les U par leurs expressions (27).

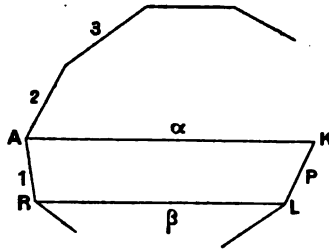
PROPRIÉTÉS DES POLYGONES INSCRITS A UNE CONIQUE;

PAR M. MATHIEU WEILL.

THÉOREME I. — *Le produit des distances d'un point quelconque d'une conique aux côtés d'un polygone inscrit est dans un rapport constant avec le produit des distances de ce point aux droites qui joignent de p en p les sommets du polygone.*

Parcourons le polygone dans l'ordre indiqué par les côtés 1, 2, ..., p, ..., et, dans les égalités qui vont suivre, négligeons, pour la

Fig. 1.



commodité de l'écriture, des facteurs constants, en désignant par (1) la distance d'un point M de la conique au côté 1, par (2) la distance de M au côté 2, et ainsi de suite.

Le quadrilatère AKLR formé par les côtés 1, p, α , β donne lieu à l'égalité

$$(1)(p) = (\alpha)(\beta).$$

Formons de pareilles égalités en parcourant les sommets successifs du polygone, nous aurons

$$(2)(p+1) = (\alpha')(\beta'),$$

$$(3)(p+2) = (\alpha'')(\beta''),$$

$$\dots\dots\dots;$$

d'où, en désignant par P le produit des distances de M à tous les côtés du polygone,

$$(P)^2 = [(\alpha)(\alpha')(\alpha'')\dots][(\beta)(\beta')(\beta'')\dots].$$

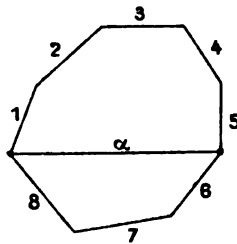
Or, le produit $(\alpha)(\alpha')(\alpha'') \dots$ représente le produit des distances de M aux droites qui joignent les sommets pris de $(p-2)$ en $(p-2)$; et le produit $(\beta)(\beta') \dots$ représente le produit des distances de M aux droites qui joignent les sommets pris de p en p .

Le théorème est donc vrai pour p s'il l'est pour $(p-2)$. Or, il est vrai pour la valeur $p-2=2$; donc il est général.

THÉORÈME II. — *Étant donné un polygone de $2m$ côtés inscrit dans une conique, et dont les côtés sont numérotés 1, 2, 3, 4, ..., $2m$, le produit des distances d'un point quelconque M de la conique aux côtés 1, 3, 5, 7, ... est dans un rapport constant avec le produit des distances de M aux côtés 2, 4, 6, ..., $2m$; et aussi dans un rapport constant avec le produit des distances de M aux diagonales.*

Pour démontrer la première partie, considérons, par exemple,

Fig. 2.



un octogone que nous décomposerons en quadrilatère et hexagone en joignant 2 sommets; en supposant le théorème vrai pour l'hexagone, nous aurons

$$(1)(3)(5) = (2)(4)(\alpha),$$

puis

$$(\alpha)(7) = (6)(8).$$

On voit donc que, si le théorème est vrai pour un polygone de $2m$ côtés, il est vrai pour un polygone de $(2m+2)$ côtés; donc il est général.

Pour démontrer la deuxième partie, remarquons qu'on aura, en appliquant le théorème I au cas de l'octogone, par exemple,

$$(1)(2)(3) \dots (8) = (D_1 D_2 D_3 D_4)^2,$$

en désignant par $D_1, D_2, \dots$ les diagonales; d'où

$$(1)(3)(5)(7) = (2)(4)(6)(8) = D_1 D_2 D_3 D_4.$$

Si la conique donnée est un cercle, les deux théorèmes précédents donnent des produits égaux, et non plus dans un rapport constant.

Appliquons le théorème I à un polygone de m côtés et aux droites qui joignent les sommets de 2 en 2, par exemple; nous aurons une égalité de la forme

$$(1)(2)(3)\dots(m) = \lambda(u)(v)(w)\dots$$

en désignant par λ un facteur constant, qui se réduit à l'unité quand la conique est un cercle, et en désignant par $(u), (v), \dots$ les distances de M aux droites qui joignent les sommets de 2 en 2. Or, l'équation précédente, si l'on y remplace les coordonnées de M par des coordonnées courantes, représente une courbe de degré m , formée, d'une part, de la conique donnée et, d'autre part, d'une courbe restante de degré $(m - 2)$, qui passe par les points de rencontre des côtés du polygone et des droites qui joignent les sommets de 2 en 2. Tous les points de cette courbe restante jouissent donc de la propriété exprimée par l'égalité précédente.

Le théorème II donne lieu à la même remarque.

Considérons, maintenant, quelques cas particuliers; nous énoncerons les résultats sans démonstration.

Un hexagone étant inscrit dans une conique, le produit des distances d'un point quelconque de la droite de Pascal aux côtés numérotés 1, 3, 5 est dans un rapport constant avec le produit des distances aux côtés 2, 4, 6, et avec le produit des distances aux diagonales.

Un triangle étant inscrit dans une circonférence, si l'on mène les tangentes aux sommets, la droite qui passe par les points de rencontre de ces tangentes et des côtés jouit de la propriété que le produit des distances d'un point de cette droite aux trois côtés est égal au produit des distances de ce point aux trois tangentes.

Un polygone régulier est inscrit dans une circonférence; les tangentes aux sommets forment un second polygone régulier dont les côtés rencontrent ceux du premier polygone en des points situés sur des circonférences concentriques; le produit des dis-

tances d'un point quelconque d'une de ces circonférences aux côtés du polygone est égal au produit des distances de ce point aux tangentes.

Un polygone est inscrit dans une conique et circonscrit à une autre conique, bitangente à la première le long d'une droite D. Les côtés du polygone et les droites qui joignent les sommets de 2 en 2, par exemple, se coupent en des points qui sont situés sur des coniques bitangentes à la première le long de D, et aussi sur la droite D si le nombre des côtés est impair; le produit des distances d'un point quelconque de la droite D ou d'une de ces coniques aux côtés du polygone est dans un rapport constant avec le produit des distances de ce point aux droites qui joignent les sommets de 2 en 2.

Même résultat pour les droites qui joignent les sommets de 3 en 3, de 4 en 4, ...

Considérons encore un polygone d'un nombre pair de côtés, inscrit dans une conique et circonscrit à une autre conique quelconque; l'équation symbolique

$$(1)(3)(5)(7)\dots = (2)(4)(6)(8)(10)\dots$$

représente d'abord la conique dans laquelle le polygone est inscrit, puis une courbe restante formée elle-même de coniques, auxquelles vient s'adjoindre une droite quand le nombre des côtés est de la forme $(4m + 2)$; ce sont ces coniques dont les points jouissent de la propriété indiquée par l'équation.

Si un polygone de $(4m + 2)$ côtés est inscrit dans une circonférence et circonscrit à une autre circonférence, les côtés opposés se coupent deux à deux sur une droite; le produit des distances d'un point quelconque de cette droite aux côtés numérotés 1, 3, 5, ... est égal au produit des distances de ce point aux côtés numérotés 2, 4, 6, ...

THÉOREME III. — *Il existe une relation linéaire et homogène entre les inverses des distances d'un point quelconque d'une conique aux côtés d'un polygone inscrit.*

$\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ étant les équations des côtés d'un triangle,

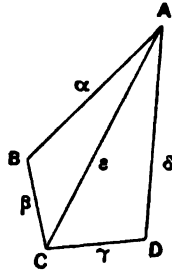
l'équation d'une conique circonscrite peut s'écrire

$$\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma} = 0,$$

a, b, c étant des constantes.

Soit un quadrilatère ABCD et une conique circonscrite; les

Fig. 3.



deux triangles ABC, ACD donneront lieu aux deux équations suivantes de la conique circonscrite :

$$\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\epsilon} = 0,$$

$$-\frac{c}{\epsilon} + \frac{d}{\gamma} + \frac{e}{\delta} = 0.$$

Donc tout point de la conique satisfait à une équation de la forme

$$\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{d}{\gamma} + \frac{e}{\delta} = 0;$$

le théorème se démontre de proche en proche.

L'équation de la conique est donc renfermée dans l'équation

$$\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \dots + \frac{l}{\lambda} = 0,$$

qui représente la conique d'une part et, d'autre part, une courbe restante de degré $(m - 3)$ si le polygone a m côtés; cette courbe restante jouit donc de la même propriété que la conique. Ainsi, dans le cas du quadrilatère, c'est la droite qui joint les points de rencontre des côtés opposés; dans le cas du pentagone, c'est la

conique qui passe par les cinq points où se coupent les côtés, points autres que les cinq sommets situés sur la conique donnée.

THÉORÈME IV. — *Un polygone de m côtés étant inscrit dans une conique, les m sommets de ce polygone et les $m(m-4)$ points où les côtés sont rencontrés respectivement par les droites qui joignent les sommets de p en p appartiennent à une même courbe de degré $(m-2)$.*

Ce théorème résulte de ce qui précède.

Considérons, par exemple, un hexagone et les droites qui joignent les sommets de 2 en 2; nous aurons 18 points d'une même courbe du quatrième degré.

THÉORÈME V. — *Trois courbes, C, S, Σ , font partie d'un faisceau d'ordre m ; deux autres courbes, S', Σ' , font partie avec C d'un faisceau d'ordre m ; les $2m^2$ points de rencontre de S avec Σ' et de S' avec Σ sont sur une courbe C' de degré m .*

En effet, tout point de la courbe C satisfait à chacune des équations

$$S = \lambda \Sigma, \quad S' = \mu \Sigma',$$

et, par suite, à l'équation

$$SS' = \lambda \mu \Sigma \Sigma';$$

cette équation, qui représente la courbe C , représente donc aussi une autre courbe C' qui passe par les points communs à S et Σ' , et aussi à S' et Σ .

En écrivant $S\mu\Sigma' = S'\lambda\Sigma$, on voit qu'il existe une courbe C' de degré m passant par les points communs à S et S' , et à Σ et Σ' .

Considérons, par exemple, une cubique et un système A de 3 droites et un autre système B de 3 droites, tels que leurs 9 points communs appartiennent à la cubique; puis deux autres systèmes analogues A', B' ; les 18 points de rencontre de A avec B' , et de A' avec B , sont sur une même cubique; le produit des distances d'un point quelconque de cette cubique aux 6 droites des groupes A, A' est proportionnel au produit des distances de ce même point aux 6 droites des groupes B, B' .

Résultat analogue pour deux groupes de 4 points sur une co-

nique quelconque. Transformons par polaires réciproques; nous aurons le résultat suivant :

Étant donnés deux quadrilatères $ABCD$, $A'BC'D$ (B et D étant deux sommets opposés communs aux deux quadrilatères), s'il existe une conique inscrite à $ABCD$ et ayant A' et C' comme foyers, il existe une conique inscrite à $A'BC'D$ et ayant A et C comme foyers.

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES CORRESPONDANCES DE M. ZERMEL;

PAR M. HENRI LEBESGUE.

Soit un ensemble M formé de certains éléments. Nous appelons sous-ensemble de M tout ensemble formé avec des éléments de M pris en totalité ou en partie. Imaginons qu'à chaque sous-ensemble de M nous sachions faire correspondre un élément particulier, bien déterminé, de ce sous-ensemble; une telle correspondance entre les sous-ensembles de M et des *éléments distingués* de ces sous-ensembles est dite une correspondance de M. Zermelo.

C'est en se fondant sur l'existence de telles correspondances que M. Zermelo ⁽¹⁾ a démontré que tout ensemble pouvait être bien ordonné, le sens qu'il faut attribuer au verbe *pouvoir* restant d'ailleurs très obscur pour certains esprits.

Il n'est douteux pour personne qu'on ne pourra jamais, sans particulariser l'ensemble M , nommer une correspondance de M. Zermelo pour tout ensemble M , puisque rien ne nous permet de distinguer deux éléments de M : nous savons seulement qu'ils sont distincts. Je me propose de montrer dans cette Note combien sont encore grandes les difficultés que l'on rencontrerait, si l'on essayait de nommer une correspondance de M. Zermelo pour l'ensemble M des nombres réels. Ma conclusion sera que l'on ne pourra jamais définir une telle correspondance par des pro-

(¹) *Beweis dass jede Menge wohlgeordnet werden kann.* (Lettre à M. Hilbert, publiée dans le Tome LIX des *Math. Annalen.*)

cédés analytiques et cela même si l'on se borne à la considération de certains sous-ensembles très particuliers.

J'emploie dans ce qui suit la terminologie que j'ai adoptée dans un précédent travail ⁽¹⁾ et j'utilise certains des résultats que j'ai obtenus. Je dirai qu'une fonction est *représentable analytiquement*, si l'on peut la construire en effectuant, suivant une loi déterminée, des opérations élémentaires (additions, soustractions, multiplications, divisions) et des passages à la limite, en nombre fini ou dénombrable, à partir de constantes et des variables, supposées en nombre fini ou dénombrable. Cette définition très large comprend toutes les fonctions qui ont été nommées jusqu'ici, même celles qu'on a construites comme exemples des singularités les plus inattendues, sauf celles que j'ai formées à la fin du Mémoire cité. Encore faut-il ajouter que la méthode de construction que j'ai employée, à laquelle Kronecker eût vraisemblablement dénié les qualités qu'il exigeait d'une définition, est un procédé d'exclusion des fonctions représentables analytiquement; au contraire, les procédés ordinaires de définition des fonctions, qui reviennent tous à une division du domaine considéré en ensembles partiels par des procédés analytiques et à une définition analytique de la fonction sur chacun de ces ensembles, conduisent nécessairement à des fonctions représentables analytiquement.

Pour qu'une fonction f soit représentable analytiquement il faut et il suffit que, quels que soient a et b , les ensembles $E(a < f < b)$, $E(a = f)$, formés des points pour lesquels les égalité et inégalité entre parenthèses sont vérifiées, soient mesurables B.

Les fonctions que j'ai construites sont les seules connues qui ne satisfont pas à cette condition; encore rentrent-elles dans la catégorie des fonctions mesurables, c'est-à-dire de celles pour lesquelles les ensembles $E(a < f < b)$, $E(a = f)$ sont mesurables. On ne sait pas si l'on pourra jamais nommer un ensemble non mesurable, une fonction non mesurable.

On va voir que, pour nommer une correspondance de M. Zermelo pour les nombres réels, il faudrait nommer une fonction non représentable analytiquement et même non mesurable.

⁽¹⁾ *Sur les fonctions représentables analytiquement* (Journ. de Math., 6^e série, t. I, fasc. II, 1903, p. 139-216).

Nommer une telle correspondance, c'est faire correspondre à tout ensemble de nombres E un des nombres de l'ensemble, ou faire correspondre à la fonction f , égale à zéro aux points de E et à 1 ailleurs, une des racines de cette fonction. Si y est cette racine, y apparaît comme une fonction portant sur une variable qui est la forme et la valeur de la fonction f dans un intervalle. Les opérations fonctionnelles faisant correspondre des nombres à des formes de fonctions n'ont guère été étudiées, sauf cette opération fonctionnelle que l'on nomme *intégration définie* ⁽¹⁾; il serait donc prématuré de rechercher à quelle classe d'opérations fonctionnelles il conviendrait de réserver le nom d'*opérations analytiques*. Mais, si l'on convient de dire qu'une opération fonctionnelle est définie par un procédé analytique quand elle fait correspondre à toute fonction $f(x, \lambda)$ exprimable analytiquement un nombre $y(\lambda)$ exprimable analytiquement, on est certain d'avoir une définition assez large pour qu'il soit très difficile de trouver une opération qui n'y satisfasse pas ⁽²⁾.

Ces préliminaires exposés, je démontre que, même si l'on se borne à la considération des ensembles dénombrables, il est impossible de définir pour eux une correspondance de M. Zermelo par des procédés analytiques.

Soit t une variable comprise entre 0 et 1; je l'écris dans le système décimal en ayant soin, par exemple, de n'employer qu'un nombre fini de chiffres significatifs, quand cela est possible. On a

(1) Cependant il est facile de nommer bien d'autres opérations fonctionnelles de la nature de celles dont il s'agit ici. Ainsi la limite supérieure, la variation totale, la mesure extérieure de l'ensemble des valeurs d'une fonction sont des fonctions de la forme de cette fonction. Quand on s'occupe de classes moins étendues de fonctions on peut citer bien d'autres opérations fonctionnelles de la nature ici considérée. Toutes celles étudiées par M. Volterra et par M. Hadamard sont de cette nature. Les opérations fonctionnelles considérées par M. Pincherle et par M. Bourlet sont un peu différentes : elles font correspondre des fonctions à des fonctions.

(2) Par exemple, si l'on peut obtenir le nombre y à partir de f en effectuant une infinité dénombrable d'opérations élémentaires, de passages à la limite, d'opérations f elles-mêmes sur des nombres ou des fonctions, une infinité dénombrable d'intégrations, de dérivations, y est défini à partir de f par un procédé analytique.

Les opérations fonctionnelles de la note précédente sont toutes définies par des procédés analytiques.

ainsi

$$t = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$$

Je pose

$$x_1 = 0, a_1 a_2 a_3 \dots,$$

$$x_2 = 0, a_2 a_3 a_4 \dots,$$

$$x_3 = 0, a_3 a_4 a_5 \dots,$$

et d'une manière générale

$$x_n = 0, a_{2^{n-1}+1} a_{2^{n-1}+2} a_{2^{n-1}+3} \dots$$

A chaque valeur de t je fais ainsi correspondre l'ensemble dénombrable des valeurs $x_1, x_2, \dots$, distinctes ou non. Réciproquement, à tout ensemble de nombres x_i , compris entre 0 et 1, correspond au moins une valeur de t .

On sait que le plus grand entier non supérieur à un nombre x est une fonction exprimable analytiquement de x et cela même à l'aide d'expressions fort simples. Or a_1 est le plus grand entier contenu dans $10t$, a_2 le plus grand entier contenu dans $100t - a_1$, ..., donc a_p est une fonction exprimable analytiquement de t . Par suite il en est de même de x_n ; il serait même facile de prouver que x_n est une fonction de classe 1 de la variable t .

Je désigne par $\varphi(\theta)$ la fonction égale à 1 pour $\theta = 0$ et à zéro ailleurs; $\varphi(\theta)$ est la limite, pour p infini, de $e^{-p\theta}$, c'est donc une fonction exprimable analytiquement. La fonction $f(x, t)$ égale à 1 quand x prend l'une des valeurs x_i correspondant à t et égale à zéro ailleurs est donc

$$f(x, t) = \varphi(x - x_1) + \varphi(x - x_2) + \dots;$$

c'est une fonction exprimable analytiquement de x et de t . Seulement, pour que cela soit exact, nous ne considérerons que les valeurs de t pour lesquelles tous les x_p sont différents. Les valeurs de t laissées de côté forment l'ensemble somme des ensembles $E_{p,q}$ ($p \neq q$), $E_{p,q}$ étant formé des valeurs de t pour lesquelles $x_p = x_q$.

$E_{p,q}$ est partout non dense. En effet, dans un intervalle quelconque on peut en trouver un autre, limité par deux fractions décimales exactes d'ordre α qui soient consécutives, $\left(\frac{n}{10^\alpha}, \frac{n+1}{10^\alpha}\right)$; α étant tel que, parmi les α premiers chiffres de t , il y en ait des

nombres inégaux β et γ qui interviennent dans x_p et x_q ⁽¹⁾. Les valeurs de $E_{p,q}$ qui appartiennent à $\left(\frac{n}{10^a}, \frac{n+1}{10^a}\right)$ ont alors $\alpha + |\beta - \gamma|$ chiffres déterminés, c'est-à-dire que l'on peut nommer des intervalles contenus dans $\left(\frac{n}{10^a}, \frac{n+1}{10^a}\right)$ dans lesquels il n'y a aucun point de $E_{p,q}$. $E_{p,q}$ est donc bien partout non dense.

Laissons encore de côté les valeurs de t pour lesquelles l'un des x_i est un nombre décimal exact, de façon que la correspondance entre t et l'ensemble des x_i soit biunivoque. Nous laissons ainsi de côté une infinité dénombrable d'ensembles tels que, pour chacun d'eux, l'un déterminé x_i des x ait une valeur décimale déterminée r . r a deux développements déterminés différents r_1 et r_2 ; donc t a une infinité de chiffres qui doivent être égaux soit aux chiffres de r_1 , soit à ceux de r_2 . Un raisonnement analogue au précédent montre que l'ensemble des valeurs de t pour lesquelles on a $x_i = r$ est partout non dense.

En définitive, nous laissons de côté un ensemble qui est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles partout non denses, c'est-à-dire un ensemble de première catégorie ⁽²⁾.

Supposant toujours les x_i non décimaux et différents, recherchons quelques propriétés de la transformation de x_p en x_q , les autres x n'étant pas modifiés. Je dis que cette transformation fait correspondre à un ensemble partout non dense de valeurs de t un ensemble partout non dense de valeurs de t . Appliquons, en effet, la transformation à un ensemble E partout non dense dans $(0, 1)$, qui est le seul intervalle considéré, et soit (a, b) une partie quelconque de $(0, 1)$. Dans (a, b) je prends un intervalle i_1 de la forme $\left(\frac{n}{10^a}, \frac{n+1}{10^a}\right)$, α étant tel que, dans les α premiers chiffres de t , il y en ait autant qui servent dans x_p et dans x_q et que le dernier de ces α chiffres n'appartienne ni à x_p ni à x_q .

⁽¹⁾ On suppose ici que x_p et x_q ne sont pas des fractions décimales exactes; ce cas est examiné plus loin.

⁽²⁾ Les notions d'ensembles de première et de seconde catégories sont dues à M. R. Baire; pour les propriétés de ces ensembles on consultera les *Leçons sur les fonctions discontinues* de M. Baire (Collection de Monographies publiées sous la direction de M. Borel) ou sa Thèse, *Sur les fonctions de variables réelles* (*Annali di Matematica*, 1899).

Alors la transformation de x_q en x_p fait correspondre à i , un intervalle de même forme i . E étant non dense dans i , on peut trouver un intervalle j , intérieur à i , de la forme $(\frac{m}{10^{\beta}}, \frac{m+1}{10^{\beta}})$, β jouissant des propriétés ci-dessus indiquées pour α . La transformation de x_p en x_q transforme j en un intervalle de même forme j_1 , intérieur à i_1 , donc à (a, b) , dans lequel il n'y a pas de points de E_1 .

Ceci posé, une correspondance de M. Zermelo fera correspondre à toute valeur de t non laissée de côté un nombre $y(t)$ qui sera l'un, bien déterminé puisqu'ils sont tous différents, des nombres $x_1, x_2, \dots$. Chacune de ces valeurs annulera donc une et une seule des fonctions $y(t) - x_p(t)$. J'appelle e_p l'ensemble des valeurs de t annulant $y(t) - x_p(t)$.

Deux ensembles e_p, e_q n'ont pas de point commun; $(0, 1)$ est la somme des ensembles e_p et de l'ensemble de première catégorie formé des valeurs de t laissées de côté; donc l'un des e_p est de seconde catégorie.

Si la correspondance de M. Zermelo est définie, au moins pour les ensembles dénombrables, par un procédé analytique, $y(t)$ sera une fonction exprimable analytiquement et par suite les e_p seront des ensembles mesurables B.

L'un d'entre eux est de seconde catégorie; or on sait que, si un ensemble mesurable B est de seconde catégorie, il y a un intervalle dans lequel il est partout de seconde catégorie, c'est-à-dire dans lequel son complémentaire est de première catégorie ⁽¹⁾. Je dis que cela est impossible.

Pour le faire voir, je m'appuierai sur cette remarque évidente : la transformation de x_p en x_q change e_p en e_q , et je montrerai que, si e_p est partout de seconde catégorie dans un intervalle, on peut trouver un intervalle et un ensemble e_q dans lequel e_p et e_q soient tous deux partout de seconde catégorie, ce qui ne peut avoir lieu quand e_p est mesurable B.

Supposons donc e_p partout de première catégorie dans (a, b) ; dans (a, b) je choisis un intervalle i de la forme $(\frac{m}{10^{\alpha}}, \frac{m+1}{10^{\alpha}})$ et un nombre q plus grand que α . Dans les α premiers chiffres de t ,

(1) Voir mon Mémoire cité, p. 187.

il y en a β qui interviennent dans x_p et il n'y en a pas qui interviennent dans x_q . Les valeurs de t comprises dans i et pour lesquelles x_p et x_q ont les β premiers chiffres communs ont donc $\alpha + \beta$ chiffres déterminés, c'est-à-dire que ces valeurs de t appartiennent à un ou plusieurs intervalles j de la forme $\left(\frac{n}{10^\alpha}, \frac{n+1}{10^\alpha}\right)$. Le changement de x_q en x_p fait correspondre à toute valeur d'un intervalle j une valeur de i ; donc les points de j qui n'appartiennent pas à e_q proviennent de points de i n'appartenant pas à e_p . Or ces points forment un ensemble somme d'une infinité dénombrable d'ensembles partout non denses à chacun desquels la transformation de x_p en x_q fait correspondre des ensembles partout non denses. Dans les intervalles j , e_p et e_q sont donc partout de seconde catégorie. La proposition est démontrée.

Modifions quelque peu le raisonnement précédent; nous obtenons un résultat plus général. Nous avons vu que les points de $E_{p,q}$ qui sont contenus dans $\left(\frac{n}{10^\alpha}, \frac{n+1}{10^\alpha}\right)$ ont plus de α chiffres déterminés, c'est-à-dire qu'ils peuvent être enfermés dans un intervalle de la forme $\left(\frac{n'}{10^{\alpha+1}}, \frac{n'+1}{10^{\alpha+1}}\right)$. De là il résulte que, si l'on peut enfermer $E_{p,q}$ dans des intervalles de mesure totale l , on peut aussi l'enfermer dans des intervalles de mesure totale $\frac{l}{10}$, et $E_{p,q}$ est de mesure nulle. On démontrera de même que, quand l'un des x_i a une valeur décimale exacte donnée r , t appartient à un ensemble de mesure nulle. L'ensemble des valeurs de t laissées de côté est donc de mesure nulle.

D'autre part, si $y(t)$ est une fonction mesurable, les ensembles e_p sont mesurables. Je dis qu'ils ont tous même mesure. En effet, la transformation de x_p en x_q transforme l'intervalle $\left(\frac{n}{10^\alpha}, \frac{n+1}{10^\alpha}\right)$ d'étendue $\frac{1}{10^\alpha}$ en un intervalle de même étendue, pourvu que dans les α premiers chiffres de t il y en ait autant de x_p que de x_q et que le $\alpha^{\text{ième}}$ chiffre n'appartienne ni à x_p ni à x_q . Cela revient à dire que la transformation de x_p en x_q , qui transforme e_p en e_q , transforme un ensemble qu'on peut enfermer dans des intervalles de longueur totale l en un ensemble qu'on peut enfermer aussi dans des intervalles de longueur totale l . Cette transformation

conserve donc la mesure : tous les e_p ont même mesure. Or $(0, 1)$ est la somme des e_p et de l'ensemble exceptionnel E ; tous ces ensembles sont sans points communs : on a donc les égalités incompatibles

$$\begin{aligned} 1 &= m(E) + m(e_1) + m(e_2) + \dots, \\ m(E) &= 0, \quad m(e_1) = m(e_2) = m(e_3) = \dots \end{aligned}$$

Il est ainsi démontré que $y(t)$ ne peut pas être une fonction mesurable.

Les raisonnements précédents prouvent aussi que : *il n'existe aucune fonction $y(x_1, x_2, x_3, \dots)$ de l'infinité dénombrable de variables $x_1, x_2, x_3, \dots$ qui soit représentable analytiquement, ou même simplement mesurable, et qui fasse correspondre à tout ensemble dénombrable $x_1, x_2, x_3, \dots$ un nombre distingué y de l'ensemble, dépendant de l'ensemble $x_1, x_2, x_3, \dots$, mais pas de l'ordre dans lequel sont rangés les points qui composent cet ensemble ⁽¹⁾.*

La notion d'ensemble dénombrable le plus général n'étant pas des plus claires, il ne sera peut-être pas inutile de montrer qu'on rencontre les mêmes difficultés quand on essaye de nommer une correspondance de M. Zermelo pour des familles très simples d'ensembles dénombrables. Pour n'avoir toujours à considérer que le segment $(0, 1)$, j'introduirai la notion d'ensemble réduit correspondant à un ensemble E . J'appellerai ainsi l'ensemble des parties fractionnaires $F(t)$ des valeurs de t appartenant à E . Un ensemble réduit ne contiendra donc que des valeurs telles que l'on ait

$$0 \leq F(t) < 1.$$

Il n'est pas inutile de remarquer que $F(t)$, étant égale à t diminué du plus grand entier, positif, nul ou négatif, qui ne surpasse pas t , est une fonction exprimable analytiquement de t . De telle sorte que, si E est définissable par des procédés analytiques, il en est de même de son ensemble réduit.

Laissons de côté les ensembles bien ordonnés dans l'échelle croissante ou décroissante des valeurs de la variable. Le plus

⁽¹⁾ Cet énoncé est équivalent au précédent.

simple, peut-être, des autres ensembles dénombrables est la progression arithmétique infinie dans les deux sens formée des nombres $a + nr$, n étant un entier positif, nul ou négatif. Pour ces progressions il est facile de nommer un élément distingué par un procédé analytique; par exemple, le plus petit terme positif de la progression, lequel est une fonction de classe 1 des variables a et r . On va voir qu'au contraire cela est impossible pour l'ensemble réduit (1).

Pour simplifier je suppose que r a une valeur irrationnelle déterminée, $\sqrt{2}$ par exemple, et je démontre qu'il n'existe aucune fonction $y(a)$ représentable analytiquement ou simplement mesurable qui fasse correspondre à tout ensemble formé des valeurs de $F(a + n\sqrt{2})$ pour n entier, une valeur distinguée de l'ensemble ne dépendant que de l'ensemble et non de la manière dont il est donné.

En effet, si $y(a)$ existait, on aurait, quel que fût l'entier p ,

$$y(a+1) = y(a+p\sqrt{2}) = y(a);$$

$\lambda(a)$ désignant un entier convenable, l'expression

$$z(a) = \frac{y(a) - a + \lambda(a)}{\sqrt{2}}$$

définirait un entier $z(a)$ vérifiant les égalités

$$z(a+1) = z(a),$$

$$z(a+p\sqrt{2})+p = z(a),$$

$$z[a+F(p\sqrt{2})]+p = z(a).$$

Désignons par e_q l'ensemble des valeurs de a comprises dans $(0, 1)$ pour lesquelles $z(a) = q$. Nous supposons y mesurable; donc e_q est mesurable. Or on passe de e_q à une partie de e_{q-p} par

(1) Ce fait, singulier au premier abord, résulte de ce que, tandis qu'il est possible de repérer la position de la progression $a + nr$ dans l'échelle des nombres, cela devient impossible si l'on ne connaît que l'ensemble réduit correspondant, parce que le même ensemble réduit correspond à la fois aux deux progressions $a + nr$ et $(a+1) + nr$. De sorte que ce qui va être démontré, c'est l'impossibilité de définir par des procédés analytiques une correspondance de M. Zermelo pour les progressions arithmétiques à deux raisons formées des valeurs que prend l'expression $a + m + nr$ pour toutes les valeurs entières de m et de n , et cela même si r a une valeur irrationnelle déterminée, $\sqrt{2}$ par exemple.

les opérations suivantes : 1° on effectue la translation $+F(p\sqrt{2})$ sur la partie de e_q contenue dans $[0, 1 - F(p\sqrt{2})]$, l'extrémité $1 - F(p\sqrt{2})$ exclue; 2° on effectue la translation $-[1 - F(p\sqrt{2})]$ sur la partie de e_q contenue dans $[1 - F(p\sqrt{2}), 1]$, origine comprise. On passerait de même de e_{q-p} à e_q ; donc e_q et e_{q-p} ont la même mesure.

(0, 1) est la somme des e_q , sans point commun; tous les e_q ont la même mesure et ils sont en nombre infini; d'où l'impossibilité qui légitime l'énoncé.

Je crois utile, en terminant, de faire quelques remarques. Dans toute question d'existence, il y a lieu de tenir compte de deux mentalités différentes : celle de l'idéaliste et celle de l'empiriste de P. du Bois-Reymond (¹). Dans ce qui précède, j'ai donné aux définitions leur sens idéaliste; c'est ainsi, par exemple, que j'ai parlé d'une infinité dénombrable de constantes sans m'occuper d'une loi les définissant, parce que tout ce qui rentre dans la définition empirique rentre *a fortiori* dans la définition idéaliste. Au contraire, j'ai fait des raisonnements empiristes parce que ce sont les seuls qu'idéalistes et empiristes s'accordent à déclarer corrects.

En donnant aux définitions leur sens idéaliste, on est certain de leur donner un sens aussi large que celui que les empiristes leur donneront jamais (²); mais il ne s'ensuit pas qu'on doive utiliser des preuves idéalistes. Sans doute, celles de ces preuves qu'on

(¹) *Théorie générale des fonctions*, traduction G. Milhaud et A. Girot, Nice, 1887. Il n'y a d'ailleurs pas que deux mentalités en présence, car il y a bien des manières d'être idéaliste ou empiriste. L'empirisme de Kronecker n'est pas celui de M. Jules Drach; l'idéalisme de du Bois-Reymond diffère sensiblement de celui de M. Jacques Hadamard.

Il est d'ailleurs vraisemblable que, connaissant les résultats récents obtenus dans la *Théorie des fonctions*, du Bois-Reymond eût modifié, sur des points de détail, le langage qu'il prête à l'idéaliste.

(²) On ne mérite donc pas ce reproche que M. Hadamard formulait ainsi : « Je crois que le débat est au fond le même qui s'est élevé entre Riemann et ses prédécesseurs sur la notion même de fonction. La loi qu'exige Lebesgue me paraît ressembler fort à l'expression analytique que réclamaient à toute force les adversaires de Riemann. » Et en note : « Je crois devoir insister un peu sur ce point de vue qui, s'il faut dire toute ma pensée, me paraît former le fond même du débat. Il me semble que le progrès véritablement essentiel des Mathématiques, à partir de l'invention même du Calcul infinitésimal, a consisté dans l'annexion de

peut construire actuellement légitimement tous les énoncés qui, au cours des siècles, seront démontrés par les empiristes ; mais est-il bien certain que ces preuves ne légitiment pas aussi des énoncés que les empiristes démontreront être faux ? On a vu récemment M. Burali-Forti, employant les raisonnements idéalistes que l'on utilisait constamment, à l'exemple de M. G. Cantor, dans l'étude des ensembles, mettre en évidence une contradiction à laquelle ils conduisent ⁽¹⁾. Sans doute, les raisonnements de M. Burali-Forti ont été immédiatement condamnés par des idéalistes qui ont fait remarquer, avec raison, qu'il formait un ensemble avec des objets non préalablement existants ⁽²⁾. Cette critique, pour l'empiriste, a la valeur suivante : M. Burali-Forti raisonne sur des êtres mal définis comme s'ils étaient bien définis ; or l'empiriste se demande si ce n'est pas précisément là ce qui caractérise le raisonnement idéaliste ? Pour qu'un empiriste pût admettre les preuves idéalistes, il faudrait qu'on lui eût enseigné comment, avant qu'un raisonnement idéaliste ait conduit à une contradiction, il pourra s'apercevoir s'il est illégitime ou légitime.

Ayant ainsi fait mes réserves sur la valeur des preuves idéalistes, j'énonce des propositions démontrées dans ce qui précède par des raisonnements idéalistes :

Il existe des ensembles qui ne sont pas mesurables.

Il existe des ensembles qui sont, ainsi que leurs complémentaires, de seconde catégorie dans tout intervalle ⁽³⁾.

notions successives qui, les unes pour les Grecs, les autres pour les géomètres de la Renaissance ou les prédécesseurs de Riemann, étaient « en dehors des Mathématiques », parce qu'il était impossible de les décrire. » (*Ce Bulletin*, t. XXXIII, 1905, p. 270.)

⁽¹⁾ *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1897. (Voir aussi HILBERT. *Congrès de Heidelberg* ; J. RICHARD, *Revue générale des Sciences*, année 1905.)

⁽²⁾ HADAMARD, *Loc. cit.*, p. 271.

⁽³⁾ Cette Note a été rédigée à l'occasion d'une question posée par M. C. Segre (*Math. Ann.*, t. XL) et sur laquelle il a bien voulu appeler mon attention.

La réponse partielle que j'ai pu faire à cette question a été publiée dans les *Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino*, 10 mars 1907. J'ai appris depuis que des considérations analogues à certaines de celles que j'utilisais avaient été développées par M. Hamel dans le tome LX des *Math. Annalen*.

J'ajoute que l'existence, au sens idéaliste, d'ensembles non mesurables a été démontrée par M. VITALI (Bologna, Tip. Gamberini e Parmeggiani, 1905).

EXTRAIT DES STATUTS ET DU RÈGLEMENT.

La Société mathématique de France a pour objet l'avancement et la propagation des études de Mathématiques pures et appliquées. Elle y concourt par ses travaux et ses publications. Elle a son siège à Paris.

La Société se compose de sociétaires perpétuels, de membres résidents et de membres non résidents, en nombre illimité.

Sont considérés comme résidents les membres qui ont à Paris leur domicile ou leurs occupations professionnelles.

Les Étrangers peuvent faire partie de la Société.

Les conditions à remplir, pour être membre de la Société, sont les suivantes : 1° avoir été présenté par deux de ses membres et agréé par le Conseil d'administration ou par le Bureau agissant en vertu d'un mandat du Conseil; 2° avoir obtenu, à l'une des séances qui ont suivi la présentation, les suffrages de la majorité des membres présents; 3° avoir versé un droit d'admission de *dix francs*; 4° payer une cotisation annuelle dont le montant est de *vingt francs* pour les membres résidents, et de *quinze francs* pour les membres non résidents.

La cotisation annuelle peut toujours être rachetée par une somme de *trois cents francs*, versée dans les conditions fixées par le règlement administratif de la Société.

Ce versement confère le titre de *sociétaire perpétuel*.

La cotisation annuelle est payée au commencement de chaque exercice dont l'origine est fixée au 1^{er} novembre de chaque année.

Les nouveaux membres doivent payer la totalité de la cotisation de l'exercice en cours, quelle que soit l'époque de leur admission.

La Société tient des séances ordinaires deux fois par mois; elle prend trois mois de vacances, de la mi-juillet à la mi-octobre.

Pour assister aux séances, les personnes étrangères à la Société doivent être présentées par l'un de ses membres.

La Société publie par livraisons un Recueil annuel qui a pour titre : *Bulletin de la Société mathématique de France*, et qui contient, avec un extrait des procès-verbaux des séances, des Notes et Mémoires sur les Mathématiques pures ou appliquées, ayant pour auteurs des membres de la Société, et présentant quelque originalité au point de vue de la méthode ou des résultats.

Les livraisons du *Bulletin* sont adressées à tous les membres de la Société, au fur et à mesure de leur publication. Toutefois, dans le cas où un sociétaire se met en retard dans le paiement de sa cotisation, l'envoi du *Bulletin* est suspendu pour lui, jusqu'à ce qu'il ait acquitté l'arriéré.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS.

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6°).

HUMBERT (G.), Membre de l'Institut, Professeur à l'École Polytechnique.
— **Cours d'Analyse** professé à l'École Polytechnique. 2 volumes in-8 (25 × 16), se vendant séparément.

TOME I : Calcul différentiel. Principes du calcul intégral. Applications géométriques, avec 111 figures; 1902..... 16 fr.

TOME II : Complément du calcul intégral. Fonctions analytiques et elliptiques. Equations différentielles, avec 91 figures; 1904. 16 fr.

TABLE DES MATIÈRES

(FASCICULE III).

	Pages.
Comptes rendus des séances.....	161
[H11c] GOURSAT (E.). — Sur un cas élémentaire de l'équation de Fredholm.....	163
[X3b] D'OCAGNE (M.). — Sur les équations d'ordre nomographique 3 et 4.....	173
[L'14a] WEILL (M.). — Propriétés des polygones inscrits à une conique.....	196
[J5] LEBESGUE (H.). — Contribution à l'étude des correspondances de M. Zermelo.....	202

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6°).

GOURSAT (Edouard), Professeur à la Faculté des Sciences de Paris. — **Cours d'Analyse mathématique**. 2 volumes grand in-8 (25×16) se vendant séparément.

TOME I: Dérivées et différentielles. Intégrales définies. Développements en séries. Applications géométriques. Volume de vi-620 pages, avec 52 figures; 1902..... 20 fr.

TOME II: Théorie des fonctions analytiques. Équations différentielles. Équations aux dérivées partielles. Éléments de calcul des variations. Volume de vi-640 pages, avec 95 figures; 1905..... 20 fr.

GREENHILL (Alfred-George), Professeur de mathématiques au Collège de Woolwich. — **Les fonctions elliptiques et leurs applications.** Ouvrage traduit de l'anglais par J. GRIESS, avec une préface de P. APPELL, Membre de l'Institut. Gr. in-8 (25×16) de xviii-574 p. avec 26 fig.; 1895. 18 fr.

RAFFY (L.), Maître de Conférences à la Faculté des Sciences et à l'École Normale supérieure. — **Leçons sur les applications géométriques de l'Analyse. Éléments de la théorie des courbes et des surfaces.** Grand in-8, avec figures: 1897..... 7 fr. 50 c.

RIOLLOT (J.), Ingénieur civil des Mines. — **Les carrés magiques.** Grand in-8 (25×16) de iv-119 pages avec 311 figures; 1907..... 5 fr.

Publication trimestrielle.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE

PUBLIÉ
PAR LES SECRÉTAIRES.

S'adresser, pour la rédaction, à M. RAFFY, rue Pierre-Nicole, 7, Paris, 5^e;
pour la distribution, à M. SERVANT, rue des Saints-Pères, 8, Paris, 7^e.

TOME XXXV. — FASCICULE IV.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
A LA SORBONNE.

1907

MM. les Membres de la Société sont priés d'adresser leur cotisation à M. *Claude-Lafontaine*, Trésorier de la Société, rue de Tréviso, 32, à Paris.

On s'abonne et l'on trouve les Volumes déjà publiés au siège de la Société et à la Librairie Gauthier-Villars, quai des Grands-Augustins, 55, Paris.

Les séances de la Société mathématique ont lieu les deuxième et quatrième mercredis de chaque mois à 8 heures trois quarts du soir.

Depuis le 1^{er} mars 1900 les séances de la Société ont lieu dans une salle de la Faculté des Sciences (entrée place de la Sorbonne, escalier tout au bout de la galerie, deuxième étage à droite).

Les Membres de la Société ont dû recevoir une carte, portant le timbre du Secrétariat, leur donnant accès à la Bibliothèque de l'Université, et fournissant à ce sujet les renseignements nécessaires; ceux qui ne l'auraient pas reçue sont priés d'en informer le Secrétariat.

La correspondance peut être adressée, soit à la Faculté des Sciences, place de la Sorbonne, soit au domicile de l'un des secrétaires, de préférence à M. Servant, sauf ce qui concerne la rédaction du Bulletin qui doit être adressé de préférence à M. Raffy.

AVIS.

Dans sa séance du 15 mars 1906, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé qu'à l'avenir tout Membre de la Société qui voudra compléter sa collection du *Bulletin* aura le droit personnel de le faire, une seule fois pour chacun des volumes publiés avant son admission, aux prix suivants :

- 3 francs le volume pour chacun des trente premiers tomes;
- 6 francs le volume pour chacun des tomes suivants, ce dernier prix devant être réduit à 4 francs pour les acheteurs de *dix volumes* au moins.

Dans sa séance du 28 février 1900, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé qu'à l'avenir tout Membre de la Société, auteur d'un travail *quelconque* inséré dans le Bulletin et désirant en obtenir des tirages à part, **devra en faire la demande en retournant l'épreuve corrigée.**

Si le nombre demandé ne dépasse pas *cinquante*, les frais du tirage à part seront faits par la Société.

Conformément à des décisions prises par le Conseil et par la Commission d'impression :

1^o Le *Bulletin*, depuis le Tome XXVII, paraît tous les trois mois;

2^o Les auteurs de tous les travaux destinés au *Bulletin* sont instamment priés d'inscrire en tête de leurs manuscrits la classification que leur assigne, d'après le sujet traité, l'*Index du Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*;

3^o Ils sont également invités à ne pas dépasser, autant que possible, la proportion de une figure pour quatre pages de texte imprimé.

SUR LE MODE DE CROISSANCE DES FONCTIONS ENTIÈRES;

PAR M. OTTO BLUMENTHAL.

Soit $f(z)$ une fonction entière de z . Posons $z = re^{i\varphi}$ et désignons par $G(r, \varphi)$ le module de f , par $A(r, \varphi)$ et $B(r, \varphi)$ ses parties réelle et imaginaire. Soient, en outre, $M(r)$, $A(r)$, $B(r)$ les valeurs maxima de G , A , B sur le cercle de rayon r .

Nous allons établir sur ces fonctions quelques propositions d'ordre général qui me paraissent indispensables pour fonder solidement la théorie des fonctions entières. Il semble que ces théorèmes n'aient pas encore été démontrés explicitement, quoique, dans leurs grandes lignes, ils n'offrent peut-être rien de nouveau pour ceux qui s'occupent des fonctions entières.

Les propositions que je vais établir sont valables pour les trois fonctions $M(r)$, $A(r)$, $B(r)$ et de même pour les valeurs minima des fonctions G , A , B . Je me bornerai à les démontrer pour $M(r)$, la démonstration pour les autres fonctions étant ou identique ou plus facile.

1. J'appellerai *fonction (courbe) algébroïde entière* une fonction (courbe) réelle

$$y = y(x)$$

de la variable réelle x , qui satisfait aux conditions suivantes :

- 1° Elle est finie et continue pour toutes les valeurs finies de x .
- 2° Pour toutes les valeurs de x , sauf au plus pour une infinité dénombrable de points tendant vers l'infini comme point limite unique, y est analytique et régulière en x .
- 3° Pour les valeurs exceptionnelles y admet des développements à la Puiseux, suivant des puissances fractionnaires de x .

Ceci posé, voici la proposition à établir :

La fonction (courbe) $M(r)$, évidemment monodrome, continue et croissante, se compose d'un nombre fini ou infini de

nombrable de parties de fonctions (arcs de courbes) algébroides. Les valeurs (points) de rencontre de deux parties de fonctions (arcs de courbes) différentes sont en nombre fini ou n'ont qu'une valeur (point) limite unique à l'infini (1). De plus, on sait que $M(r)$ tend vers l'infini avec r .

En particulier donc, la courbe sera partout analytique et algébroïde sauf pour les points de rencontre où il y aura, en général, discontinuité de la tangente et des dérivées supérieures.

Ces propriétés sont bien mises en relief par un exemple simple, mais très instructif, qu'on trouvera au n° 10 de ce travail.

2. Remarques préliminaires. — Pour éviter des renvois nombreux, je commencerai par rappeler quelques faits connus qui nous seront utiles dans la suite.

A, B et $\log G$ satisfont à l'équation de Laplace

$$\Delta u = 0.$$

Nous en tirons le lemme suivant :

Une fonction entière $f(z)$, qui a une valeur absolue constante sur un cercle de rayon R ayant l'origine comme centre, est nécessairement de la forme az^m .

D'abord, si f n'a pas de racines à l'intérieur du cercle, $\log G$, étant constant sur sa périphérie et fini à son intérieur, est une constante, et il en est de même de $f(z)$.

Soient donc $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ celles des racines de f à l'intérieur du cercle qui sont différentes de zéro. Nous appellerons $r_k = |z - \alpha_k|$ la distance d'un point variable z au point α_k et $r'_k = |z - \alpha'_k|$ la distance de z au point α'_k symétrique à α_k par rapport au cercle (R). On sait alors que

$$\log \frac{r_1 r_2 \dots r_p}{r'_1 r'_2 \dots r'_p}$$

(1) J'ai énoncé ce théorème deux fois sans démonstration : dans la thèse de M. A. KRAFT, *Ueber ganze transcendente Funktionen von unendlicher Ordnung* (Dissertation, Göttingen, 1903) ; et *Jahresber. d. deutschen Math.-Ver.*, t. XVI, février 1907. Du reste, on peut, par nos méthodes et presque sans aucun changement, démontrer une proposition analogue sur les séries de Taylor à l'intérieur de leur cercle de convergence.

a une valeur constante sur le cercle. Du reste $\log G$, devenant infini comme $\log r_k$ au point α_k , est nécessairement de la forme

$$\log G = \text{const.} + \log \frac{r_1 r_2 \dots r_p}{r'_1 r'_2 \dots r'_p} + m \log r,$$

si l'origine est un zéro d'ordre m de $f(z)$.

Donc $\log G$ deviendrait infini positif aux points $\alpha'_1, \dots, \alpha'_p$. Ceci étant impossible, puisque $f(z)$ est entière, il vient

$$\log G = \text{const.} + m \log r,$$

ce qui prouve notre proposition (1).

Nous excluons constamment par la suite les puissances az^m .

Une autre forme du même lemme est alors la suivante :

La dérivée $\frac{\partial G}{\partial \varphi}$ ne peut s'annuler tout le long d'un cercle ayant l'origine comme centre.

En coordonnées polaires r, φ , l'équation $\Delta u = 0$ a la forme

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

On en conclut que

$$\frac{\partial A}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial B}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \log G}{\partial \varphi}$$

satisfont encore à l'équation de Laplace.

3. Nous posons

$$(1) \quad \begin{cases} f(z) = \sum a_n z^n, & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0, \\ a_n = a'_n + i a''_n. \end{cases}$$

Alors

$$(2) \quad \begin{cases} A(r, \varphi) = a'_0 + \sum_n r^n (a'_n \cos n\varphi - a''_n \sin n\varphi), \\ B(r, \varphi) = a''_0 + \sum_n r^n (a''_n \cos n\varphi + a'_n \sin n\varphi). \end{cases}$$

(1) Bien entendu, on peut aussi la démontrer sans faire intervenir explicitement la théorie du potentiel.

Par suite de la décroissance rapide des quantités a_n , les séries (2) restent uniformément et absolument convergentes, même si l'on y admet pour r des valeurs complexes dont le module ne dépasse pas une quantité arbitraire R , et pour φ des valeurs complexes ayant un module $\leq 2\pi$. Par suite, d'après un théorème connu, on peut y remplacer $\cos n\varphi$, $\sin n\varphi$ par leurs développements de Taylor et changer l'ordre des termes, de façon à obtenir

$$(3) \quad A(r, \varphi) = a'_0 + r \sum_{k,l} c'_{kl} r^k \varphi^l, \quad B(r, \varphi) = a''_0 + r \sum_{k,l} c''_{kl} r^k \varphi^l,$$

et ces séries convergent uniformément et absolument à l'intérieur de tout cercle arbitrairement grand ayant son centre à l'origine du plan des z .

Il en est de même de

$$(4) \quad G^2(r, \varphi) = A^2(r, \varphi) + B^2(r, \varphi) = g_0 + r \sum_{k,l} g_{lk} r^k \varphi^l.$$

Les expressions (3) et (4) montrent que

$$\frac{\partial A(0, \varphi)}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial B(0, \varphi)}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial G(0, \varphi)}{\partial \varphi}$$

s'annulent identiquement en φ (1).

4. Considérons maintenant l'ensemble des valeurs (r, φ) pour lesquelles

$$\frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0.$$

Voici la proposition à prouver :

Dans tout le plan, l'ensemble des points pour lesquels $\frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0$ forme au plus une suite dénombrable de courbes algébroides; il n'y a qu'un nombre fini de ces courbes (ou de leurs branches) qui pénètrent dans l'intérieur d'un cercle (R).

(1) Ce fait, évident dans le cas où $g \neq 0$, se vérifie aisément dans le cas général à l'aide des formules (2).

Tout d'abord, il ne peut exister de point *isolé* pour lequel $\frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0$.

Cela est évident pour le point $r = 0$. Écartons ce cas et supposons en premier lieu que le point isolé ne soit pas un zéro de G . Alors

$$\frac{\partial \log G}{\partial \varphi} = \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial \varphi}$$

s'annule en ce point et reste finie et continue dans son voisinage. Traçons autour du point un cercle c aussi petit que nous voudrons. $\frac{\partial \log G}{\partial \varphi}$, et par suite $\frac{\partial G}{\partial \varphi}$, doit changer de signe et, par suite, s'annuler sur le cercle, car, puisque $\frac{\partial G}{\partial \varphi}$ satisfait à l'équation de Laplace, on a, d'après le théorème de la moyenne arithmétique,

$$\int_{(c)} \frac{\partial \log G}{\partial \varphi} ds = 0,$$

ds désignant l'élément de l'arc du cercle c . Donc le point n'est pas un zéro isolé de $\frac{\partial G}{\partial \varphi}$.

Supposons en second lieu que G s'annule en même temps que $\frac{\partial G}{\partial \varphi}$. Nous considérons alors le cercle (r) ayant son centre à l'origine et passant par le point. Il est évident que, sur ce cercle, $\frac{\partial G}{\partial \varphi}$ change de signe au point $G = 0$. Entourons donc encore ce point d'un petit cercle c , on voit que $\frac{\partial G}{\partial \varphi}$ change de signe et, par suite, s'annule sur c .

Pour établir notre proposition, nous n'avons maintenant qu'à appliquer les procédés généraux de l'élimination, ce qui, dans le cas de deux variables, ne présente pas de difficulté. Soit (r_0, φ_0) un point quelconque pour lequel $\frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0$. Développant $\frac{\partial(G^2)}{\partial \varphi}$ en série partout convergente suivant les puissances de $r - r_0$ et de $\varphi - \varphi_0$, la condition $\frac{\partial(G^2)}{\partial \varphi} = 0$ prend la forme

$$(4^a) \quad \sum_{k,l} \gamma_{kl} (r - r_0)^k (\varphi - \varphi_0)^l = 0,$$

et le premier membre ne s'annule pas identiquement pour $r = r_0$, en vertu du lemme démontré au n° 2 ⁽¹⁾.

Admettons, pour un moment, des valeurs complexes de $r = r_0$ et $\varphi = \varphi_0$. Alors, si $\frac{\partial(G^2)}{\partial\varphi}$ commence par des termes d'ordre p en r et φ , il existe exactement p développements de la forme

$$(5) \quad \varphi^{(\lambda)} - \varphi_0 = \sum_i \varepsilon_i^{(\lambda)} t^i,$$

t étant une puissance fractionnaire de $r - r_0$: $t = (r - r_0)^{\frac{1}{\rho}}$ (ρ entier positif) ⁽²⁾. L'ensemble des valeurs (r, φ) fournies par ces développements est identique à l'ensemble des racines (r, φ) de l'équation $\frac{\partial(G^2)}{\partial\varphi} = 0$ dans un voisinage fini et déterminé du point (r_0, φ_0) .

Or, retournons au domaine réel. Comme le zéro (r_0, φ_0) ne peut être isolé, quelques-uns, du moins, des développements cités auront une projection dans le domaine réel, qui n'est autre chose qu'un élément de courbe algébroïde passant par le point (r_0, φ_0) .

De plus, comme G n'a que des zéros isolés, les zéros de $\frac{\partial(G^2)}{\partial\varphi}$ sont, dans un certain voisinage du point, identiques à ceux de $\frac{\partial G}{\partial\varphi}$, donc :

Au voisinage de chaque point (r_0, φ_0) qui annule $\frac{\partial G}{\partial\varphi}$ l'équation $\frac{\partial G}{\partial\varphi} = 0$ définit un nombre fini d'éléments algébroïdes réels passant par le point. On s'assure, du reste, aisément que chacun de ces éléments avec ses prolongements analytiques par le plan des z donne une courbe algébroïde entière.

Envisageons l'ensemble de tous ces éléments. Bornons-nous à ceux d'entre eux qui possèdent des points à l'intérieur ou sur la

⁽¹⁾ Le dernier raisonnement ne s'applique pas au point $r = 0$. Pour traiter ce point, on divisera d'abord $\frac{\partial(G^2)}{\partial\varphi}$ par une puissance convenablement choisie de r ; on sera ainsi ramené au cas général.

⁽²⁾ Développements à la Puiseux. Comparer JORDAN, *Cours d'Analyse*, t. I, p. 342-350.

périphérie d'un cercle (R). Je dis que ces éléments avec leurs prolongements analytiques ne forment qu'un nombre fini de courbes (branches de courbes) algébroides.

En effet, supposons qu'il y en ait une infinité ayant des points communs avec l'intérieur ou la périphérie de (R). Alors il y a, dans (R) ou sur (R), au moins un point limite P tel que dans son voisinage pénètrent des courbes $\frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0$ en nombre infini. La continuité de $\frac{\partial G}{\partial \varphi}$ exige alors que P soit lui-même un zéro de la fonction. Appliquant alors le théorème ci-dessus, on voit que l'hypothèse faite est absurde. Notre proposition sur les valeurs $\frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0$ est donc bien démontrée.

Nous désignerons dorénavant par *courbes* C les courbes algébroides entières $\frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0$.

Une courbe C ne coupe un cercle (r) qu'en un nombre fini de points. C'est ce qu'on démontre encore par la méthode du point limite. Mais la même méthode nous fournit encore le résultat bien plus précis :

Sur tous les cercles (r) intérieurs à (R) le nombre des points pour lesquels $\frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0$ est au plus égal à un nombre fini K qui ne dépend que de R.

Une dernière conclusion à tirer de la considération des courbes C est la suivante :

Tous les points $\frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0$ d'un cercle (r) dans un certain voisinage d'un cercle (r_0) sont situés sur des courbes C ayant des points communs avec (r_0).

§. Les mêmes résultats subsistent évidemment pour les courbes $\frac{\partial A}{\partial \varphi} = 0$ et $\frac{\partial B}{\partial \varphi} = 0$; il y a même lieu de faire sur ces courbes une remarque complémentaire.

Les courbes $\frac{\partial A}{\partial \varphi} = 0$ ($\frac{\partial B}{\partial \varphi} = 0$) ne peuvent être fermées; ou

mieux : *il ne peut exister, dans le plan des z , aucun domaine fini, limité exclusivement par des arcs de courbes $\frac{\partial A}{\partial \varphi} = 0$ ($\frac{\partial B}{\partial \varphi} = 0$).*

En effet, comme $\frac{\partial A}{\partial \varphi}$ satisfait partout à l'équation de Laplace et qu'elle est régulière dans tout domaine fini, elle serait identiquement nulle si elle s'annulait sur le contour.

Le résultat analogue sur les courbes C a une portée moins grande. Tout d'abord, en appliquant à $\frac{\partial \log G}{\partial \varphi}$ les raisonnements ci-dessus, on voit qu'il ne peut pas exister de domaines finis, limités exclusivement par des arcs de courbes C , et tels qu'ils ne contiennent, ni dans leur intérieur, ni sur leurs contours, aucun zéro de G . De plus, il est évident que chaque zéro de G est nécessairement situé sur une courbe $\frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0$. D'où ce résultat :

S'il existe un domaine fini, limité exclusivement par des arcs de courbes C et n'en contenant aucun dans son intérieur, il faut que l'un au moins de ces arcs contienne un zéro de G (c'est-à-dire de f).

L'exemple du n° 10 montrera du reste que cette circonstance peut bien se présenter.

6. Nous pouvons maintenant aborder notre problème principal, la recherche des plus grandes valeurs $M(r)$ de G sur les différents cercles (r) . Nous commencerons par une orientation rapide, puis nous approfondirons.

Prenons donc un cercle déterminé (r_0) ($r_0 < R$) et cherchons-en les points dans lesquels G prend la valeur $M(r_0)$. Je les appellerai les *points maxima* du cercle. Ces points sont certainement compris parmi les intersections du cercle avec les courbes C . Comme le nombre de ces intersections est $\leq K$, la détermination des points maxima n'offre pas de difficulté théorique. Il peut y en avoir un ou plusieurs.

Il s'agit maintenant de trouver les points maxima sur les cercles voisins de (r_0) .

Supposons d'abord qu'il n'y ait, sur (r_0) , qu'un seul point maximum et un seul élément C , des courbes C passant par ce

point. Alors les choses sont très simples. Comme, sur (r_0) , aux intersections avec les autres courbes C correspondent des valeurs de G plus petites que $M(r_0)$, de même, sur tous les cercles d'un certain voisinage de (r_0) , la courbe C_1 fournira les plus grandes valeurs de G , c'est-à-dire que, dans ce voisinage, les points maxima seront les points d'intersection des différents cercles avec la même courbe algébroïde C_1 . Ce voisinage comprend des valeurs r et plus petites et plus grandes que r_0 .

J'appellerai *courbe maxima* tout arc de courbe formé par des points maxima. Donc, dans notre cas, il y a, dans le voisinage de r_0 , une seule courbe maxima, arc de la courbe algébroïde C_1 .

Mais le cas général est plus compliqué. En effet, s'il y a sur r_0 plusieurs points maxima et plusieurs éléments C passant par eux, il faut traiter séparément les valeurs $r > r_0$ et $r < r_0$. Étudions d'abord le cas $r > r_0$. Envisageons tous les éléments de C passant par les points maxima de (r_0) et suivons-les dans la direction des r croissants. Les points maxima des cercles (r) ($r > r_0$) sont certainement, dans un certain voisinage de (r_0) , compris parmi les intersections de (r) avec ces éléments, d'après la remarque faite à la fin du n° 4. Donc, les courbes maxima seront, dans le voisinage de (r_0) , comprises parmi ces éléments : ce seront ceux qui fournissent sur chaque cercle (r) ($r > r_0$) assez voisin de (r_0) les plus grandes valeurs de G . Il peut y en avoir plusieurs.

Les mêmes raisonnements sont valables pour les valeurs $r < r_0$. *Mais les courbes maxima peuvent être différentes pour $r > r_0$ et pour $r < r_0$.*

C'est là un fait capital, par suite duquel la fonction $M(r)$ se comporte d'une façon complètement différente des deux côtés du point r_0 .

Je dirai que r_0 est un *point anguleux* de la fonction $M(r)$, si cette circonstance se présente, c'est-à-dire, *si les courbes maxima sont différentes pour $r > r_0$ et $r < r_0$.*

Il y aura, du reste, lieu de distinguer deux sortes de points anguleux :

1° *Points anguleux de la première sorte.* — Les courbes maxima des deux côtés du cercle (r_0) sont différentes, mais elles

passent par les mêmes points maxima de (r_0) ⁽¹⁾. (Ce cas ne peut se présenter que lorsque plusieurs éléments C passent par un point maximum);

2° *Points anguleux de la deuxième sorte.* — Les courbes maxima des deux côtés passent par des points maxima différents.

Nous reviendrons sur cette classification (n° 9).

Les courbes maxima sont donc des arcs de courbes C, coupés aux points anguleux.

Mais les raisonnements ci-dessus ne sont qu'approximatifs. Il faut les rendre concluants par une voie analytique, ce qui ne présente pas de difficulté.

7. A cet effet, nous allons calculer la fonction $M(r)$ au voisinage de r_0 , ce qui se fait par une élimination.

Nous écrirons les développements (5) de tous les éléments C passant par les points maxima de (r_0) . C'est un nombre fini ($\leq K$) de développements que nous désignerons par

$$D_1, D_2, \dots, D_q.$$

Nous aurons

$$(5a) \quad D_\lambda : \varphi^{(\lambda)} - \varphi_0^{(\lambda)} = \sum_i \varepsilon_i^{(\lambda)} t^i.$$

La lettre t désigne dans tous ces développements la même puissance fractionnaire de $r - r_0$.

Certains de ces développements pourront du reste n'être réels que pour $r < r_0$ ou $r > r_0$.

Nous avons, d'autre part, autour du point maximum $(r_0, \varphi_0^{(\lambda)})$:

$$(4b) \quad G^2(r, \varphi) = M^2(r_0) + \sum_{k,l} \delta_{kl}^{(\lambda)} (r - r_0)^k (\varphi - \varphi_0^{(\lambda)})^l,$$

la somme s'annulant pour $r = r_0, \varphi = \varphi_0^{(\lambda)}$.

⁽¹⁾ Pour parler plus exactement : il y a au moins un couple de courbes maxima des deux côtés de (r_0) qui passent par le même point maximum de (r_0) .

Nous désignerons par $\bar{G}_\lambda(r)$ les valeurs de $G(r, \varphi)$ sur l'élément D_λ . Substituant (5^a) dans (4^b) et tenant compte de ce que $r - r_0$ est une puissance entière de t , nous trouvons

$$\bar{G}_\lambda(r) = M(r_0) + \sum_1^{\infty} B_i^{(\lambda)} t^i,$$

et, par suite, puisque $M(r_0)$ est différent de zéro :

$$(6) \quad \bar{G}_\lambda(r) = M(r_0) + \sum_1^{\infty} A_i^{(\lambda)} t^i,$$

tous ces développements étant valables à la fois dans un voisinage fini et déterminé de r_0 .

Les $\bar{G}_\lambda(r)$ sont donc des éléments algébroides en r . Certains peuvent n'être réels que pour $r < r_0$ ou $r > r_0$. Il peut aussi y en avoir plusieurs d'identiques : dans ce cas, nous n'en conserverons qu'un seul.

Distinguons maintenant les deux cas $r < r_0$ et $r > r_0$. Prenons d'abord $r > r_0$. Formons toutes les différences deux à deux des $\bar{G}_\lambda$ réels pour $r > r_0$. Soit

$$\bar{G}_\lambda - \bar{G}_\mu = t^s \sum_0^{\infty} \bar{A}_i t^i \quad (\bar{A}_0 \neq 0)$$

une de ces différences. Elle a pour toutes les valeurs de $r (> r_0)$ dans le voisinage de r_0 un signe constant, celui de $\bar{A}_0 t^s$. Donc il y a un développement bien déterminé, soit $\bar{G}_\lambda$, qui, pour toutes les valeurs $r > r_0$ d'un voisinage fini, donne des valeurs de G supérieures (ou au moins égales) à celles fournies par les autres développements. *On a alors dans tout ce voisinage*

$$(6^a) \quad M(r) = \bar{G}_\lambda(r) = M(r_0) + \sum_1^{\infty} A_i^{(\lambda)} t^i \quad (r > r_0).$$

Le même raisonnement s'applique aux valeurs $r < r_0$, il y aura encore un développement maximum, soit $\bar{G}_\mu$, mais il est évi-

dent qu'en général, $\overline{G}_\mu$ est différent de $\overline{G}_\lambda$. Donc

$$(6b) \quad M(r) = \overline{G}_\mu(r) = M(r_0) + \sum_1^{\infty} A_i^{(\mu)} t^i \quad (r < r_0).$$

Si G_λ et G_μ diffèrent, r_0 est un point anguleux de $M(r)$.

Voici donc le résumé des résultats acquis :

De chaque côté d'un point quelconque r_0 , la fonction $M(r)$ admet un développement algébroïde. Ces développements sont valables dans un intervalle d'étendue finie. Si les développements des deux côtés sont identiques, nous avons un point ordinaire, sinon un point anguleux de $M(r)$.

8. *A l'intérieur d'un intervalle fini $(0 \dots R)$, il n'y a qu'un nombre fini de points anguleux.*

En effet, s'il y en avait une infinité, ils auraient un point limite $\leq R$, ce qui est inadmissible, puisque, pour ce point, le théorème du numéro précédent serait en défaut.

Notre proposition générale, énoncée au n° 1, est donc bien établie.

Voici une autre forme du même résultat : *Les courbes maxima sont des arcs de courbes algébroïdes. Toute courbe C qui est maxima dans un élément l'est sur un arc de longueur finie. Pour $r \leq R$, cette longueur reste au-dessus d'une limite fixe, différente de zéro.*

9. Je ferai encore quelques remarques à l'égard des points anguleux. En les appelant ainsi, j'ai un peu généralisé l'acception ordinaire du mot. En effet, la définition ci-dessus du point anguleux n'implique pas qu'il y ait forcément discontinuité de la tangente.

Il y a même dans cet ordre d'idées une proposition spéciale sur les points anguleux de première sorte.

En un point anguleux de première sorte, la tangente est toujours continue.

C'est une conséquence immédiate d'une formule très simple relative à la dérivée $\frac{dM}{dr}$.

Soit $\frac{d\varphi}{dr}$ le coefficient angulaire de la courbe maxima au point r .

Nous supposons d'abord que $\frac{d\varphi}{dr}$ n'est pas infini. On a alors

$$(7) \quad \frac{dM}{dr} = \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{\partial G}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dr} = \frac{\partial G}{\partial r}.$$

Mais cette formule subsiste encore pour les points où le coefficient angulaire est infini [c'est-à-dire où la courbe maxima est tangente au cercle (r)]. Nous savons en effet, par suite du caractère algébroïde des courbes C , que ces points sont isolés. Or la relation (7) étant vérifiée pour des points infiniment voisins du point isolé, l'est aussi pour le point même, parce que, sur une même courbe maxima, $\frac{dM}{dr}$ ne fait pas de sauts brusques.

La formule (7) est assez remarquable : on en conclut, entre autres, que la dérivée $\frac{dM}{dr}$ est partout finie, ce qui ne paraît nullement évident *a priori* ⁽¹⁾.

Pour démontrer notre proposition sur les points anguleux de première sorte, nous n'avons qu'à appliquer la formule (7) au point de rencontre (r_0, φ_0) des deux courbes maxima pour $r < r_0$ et $r > r_0$.

10. La conclusion à tirer de notre théorème général est que la fonction $M(r)$ est loin de se comporter d'une façon simple ; ce sont surtout les points anguleux qui y introduisent une complication très sensible. Il m'a donc paru intéressant de vérifier sur un exemple que ces discontinuités que notre méthode de démonstration a fait prévoir se présentent bien en réalité. L'exemple le plus simple d'une courbe $M(r)$ composée de plusieurs arcs de courbes analytiques différentes est fourni par des polynômes du second degré ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Voir aussi le théorème cité à la fin de ce travail (n° 11), qui assure la même propriété à la dérivée seconde $\frac{d^2 M}{dr^2}$.

⁽²⁾ M. Ed. Landau a bien voulu me faire savoir que, dès 1904, il avait trouvé et donné dans ses cours l'exemple de la fonction

$$f(z) = 1 + z - z^2,$$

qui rentre dans notre catégorie.

Considérons d'abord une fonction linéaire $f(z) = z + \beta$. Il est évident que cette fonction prend son module maximum une seule fois sur chaque cercle ayant l'origine comme centre; la fonction $M(r)$ a la forme très simple

$$M(r) = r + |\beta|.$$

Mais passons aux polynômes du second degré. Ici, des circonstances très variées peuvent se présenter. Pour les étudier, je n'ai pas pu me servir des procédés éliminatoires directs qui conduisent à des calculs à peu près inextricables, mais j'ai dû recourir à des considérations géométriques.

Je désignerai par e_1, e_2 les deux racines du polynôme du second degré, de sorte que nous aurons

$$f(z) = z^2 + \alpha z + \beta = (z - e_1)(z - e_2).$$

Nous marquerons dans le plan les deux points e_1 et e_2 et nous poserons

$$|z - e_1| = r_1, \quad |z - e_2| = r_2,$$

donc

$$G(r, \varphi) = r_1 r_2, \quad M(r) = \max(r_1, r_2) \quad \text{pour } |z| = r.$$

La fonction $M(r)$ est particulièrement simple, si e_1, e_2 sont des nombres complexes conjugués (et dans les cas qui se réduisent à celui-ci par une rotation du plan). On a alors évidemment

$$M(r) = r^2 + |\alpha| r + |\beta|.$$

Écartons ce cas-là et de même, pour un moment, le cas de valeurs e_1, e_2 réelles (et les cas réductibles à ceux-ci). Pour toutes les autres positions des points e_1, e_2 j'ai pu démontrer, par une voie un peu détournée, que la fonction $M(r)$ est partout algébrique et sans points anguleux, mais le calcul effectif de la fonction serait, probablement, assez long.

Le cas le plus intéressant est celui de valeurs e_1, e_2 réelles et de signes contraires; si e_1, e_2 ont le même signe, on a évidemment le même résultat que dans le cas de valeurs complexes conjuguées.

Soient donc e_1, e_2 deux points situés sur l'axe des x . Envisageons les courbes $r_1 r_2 = \text{const.}$ Ce sont des courbes de Cassini ayant les points e_1, e_2 pour foyers. Une telle courbe a, au plus,

quatre points réels communs avec un cercle ⁽¹⁾. Soit donc $M(r) = \alpha^2$ le maximum du module sur le cercle (r) . Ce cercle est alors renfermé tout entier à l'intérieur de la courbe $r_1 r_2 = \alpha^2$ et il a au moins un point commun avec elle. En ces points communs, il doit y avoir contact entre la courbe et le cercle. Nous avons donc deux cas à distinguer :

1° Le cercle (r) a un seul point de contact avec la courbe (α) (cercle simplement tangent). Pour des raisons de symétrie, ce point est situé sur l'axe des x .

2° Le cercle a deux points de contact avec la courbe (cercle doublement tangent). Les points de contact sont symétriques par rapport à l'axe des x .

Nous chercherons toutes les valeurs de r qui correspondent à des cercles doublement tangents.

L'équation d'une courbe de Cassini ayant les foyers e_1, e_2 est

$$(a) \quad [(x - e_1)^2 + y^2][(x - e_2)^2 + y^2] = \alpha^4.$$

Nous supposons, d'après ce que nous venons de remarquer, que e_1, e_2 sont de signe contraire, et en particulier $e_1 = |e_1|$, $e_2 = -|e_2|$; nous supposons en outre $e_1 \neq -e_2$, le cas $e_1 = -e_2$ étant un cas limite particulièrement simple ⁽²⁾. Pour fixer les idées, nous choisirons $e_1 + e_2 < 0$, ce qui ne restreint pas la généralité.

Éliminant y entre (a) et l'équation du cercle

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

nous trouvons l'équation en x

$$(b) \quad (-2e_1x + e_1^2 + r^2)(-2e_2x + e_2^2 + r^2) = \alpha^4, \\ 4e_1e_2x^2 - 2(e_1 + e_2)(e_1e_2 + r^2)x + (e_1^2 + r^2)(e_2^2 + r^2) = \alpha^4.$$

Pour qu'il y ait deux points de contact, il faut que cette équation ait une racine double. La condition est, tous calculs faits,

$$(c) \quad \alpha^4 = -\frac{(e_1 - e_2)^2}{4e_1e_2}(r^2 - e_1e_2)^2 = \frac{(e_1 - e_2)^2}{4|e_1e_2|}(r^2 - e_1e_2)^2,$$

⁽¹⁾ Parce que les deux points infinis du cercle sont des points doubles de la courbe de Cassini.

⁽²⁾ Voir à la fin de ce numéro.

et l'abscisse commune des points de contact est

$$(d) \quad x_t = \frac{1}{4} \frac{(e_1 + e_2)(e_1 e_2 + r^2)}{e_1 e_2}.$$

Il semble donc qu'à chaque cercle r corresponde une courbe (α) à contact double, α étant donné par la formule (c). Mais ces points de contact ne sont pas tous réels. En effet, substituant la valeur de x_t dans l'équation du cercle, on trouve pour l'ordonnée la valeur

$$(e) \quad y_t^2 = r^2 - \frac{1}{16} \frac{(e_1 + e_2)^2 (e_1 e_2 + r^2)^2}{e_1^2 e_2^2},$$

valeur évidemment négative pour les grandes et les petites valeurs de r . Pour présenter nettement les choses, éliminons r entre (d) et (e); nous trouverons *la courbe formée par les points de contact*. Un calcul facile nous donne

$$(f) \quad x_t^2 + y_t^2 = \frac{4 e_1 e_2}{e_1 + e_2} x_t - e_1 e_2.$$

C'est l'équation d'un cercle ayant le point

$$X = \frac{2 e_1 e_2}{e_1 + e_2}, \quad Y = 0$$

comme centre et comme rayon la longueur

$$\sqrt{|e_1 e_2|} \left| \frac{e_1 - e_2}{e_1 + e_2} \right|.$$

Le cercle coupe l'axe des x aux deux points

$$\begin{aligned} -r_1 &= (\sqrt{|e_1|} - \sqrt{|e_2|})^2 \frac{\sqrt{|e_1 e_2|}}{e_1 + e_2}, \\ r_2 &= -(\sqrt{|e_1|} + \sqrt{|e_2|})^2 \frac{\sqrt{|e_1 e_2|}}{e_1 + e_2} \end{aligned}$$

(les racines étant affectées du signe +); d'après nos hypothèses sur les valeurs e_1, e_2 , le premier point est situé à gauche, le second à droite de l'origine.

Donc, il y a contact double entre les cercles et les courbes de Cassini correspondantes pour les valeurs de r entre

$$r_1 = (\sqrt{|e_1|} - \sqrt{|e_2|})^2 \frac{\sqrt{|e_1 e_2|}}{|e_1 + e_2|} \quad \text{et} \quad r_2 = (\sqrt{|e_1|} + \sqrt{|e_2|})^2 \frac{\sqrt{|e_1 e_2|}}{|e_1 + e_2|}.$$

Les cercles sont d'ailleurs contenus dans l'intérieur des courbes tangentes. On s'en assure en remarquant que, pour tous les points du cercle (r) , on a l'équation analogue à (b)

$$(-2e_1x + e_1^2 + r^2)(-2e_2x + e_2^2 + r^2) = r_1^2 r_2^2.$$

Mais le premier membre a son maximum pour $x = x_t$.

Donc, pour $r_1 \leq r \leq r_2$, il y a deux courbes maxima, à savoir les demi-cercles supérieur et inférieur (f) . La fonction $M(r)$ est donnée par

$$(c') \quad M(r) = \frac{|e_1| + |e_2|}{2\sqrt{|e_1 e_2|}} (r^2 + |e_1 e_2|) \quad r_1 \leq r \leq r_2.$$

Son image géométrique est un arc de parabole.

Considérons maintenant les valeurs $r \leq r_1$ et $r \geq r_2$. Nous avons vu que pour ces valeurs il n'y a que des cercles simplement tangents. Les courbes maxima sont donc des segments de l'axe des x (voir p. 227, 1°). Je dis qu'avec nos hypothèses sur e_1, e_2 , la courbe maxima entre $r = 0$ et $r = r_1$ est le segment négatif entre $x = 0$ et $x = -r_1$; pour $r \geq r_2$, au contraire, c'est le segment positif à partir de $x = +r_2$.

La démonstration étant très simple, je ne l'indiquerai brièvement que pour $r < r_1$. Il faut s'assurer que la quantité

$$r_1 r_2 = \sqrt{[(x - e_1)^2 + y^2]} \sqrt{[(x - e_2)^2 + y^2]}$$

est plus grande pour $x = -r, y = 0$ que pour $x = +r, y = 0$ ($r \leq r_1$). Or

$$\text{pour } x = -r, y = 0 : (r_1 r_2)_- = |r + e_1| |r - e_2|,$$

$$\text{pour } x = +r, y = 0 : (r_1 r_2)_+ = |r - e_1| |r + e_2|.$$

La formule pour r_1 montre que, d'après nos hypothèses sur e_1, e_2 ,

$$r \leq r_1 = \frac{(\sqrt{|e_2|} - \sqrt{|e_1|})^2}{|e_2| - |e_1|} \sqrt{|e_1 e_2|} = \frac{\sqrt{|e_2|} - \sqrt{|e_1|}}{\sqrt{|e_2|} + \sqrt{|e_1|}} \sqrt{|e_1 e_2|} < \sqrt{|e_1 e_2|} < |e_2|.$$

Donc

$$(r_1 r_2)_- = (|e_1| + r)(|e_2| - r),$$

tandis qu'il y a deux hypothèses admissibles sur $(r_1 r_2)_+$:

$$1^\circ \quad (r_1 r_2)_+ = (|e_1| - r)(|e_2| + r),$$

$$2^\circ \quad (r_1 r_2)_+ = (r - |e_1|)(r + |e_2|).$$

Avec la première hypothèse, l'inégalité cherchée

$$(r_1 r_2)_+ < (r_1 r_2)$$

est évidente; avec la seconde, on a

$$(r_1 r_2)_- - (r_1 r_2)_+ = 2 \{ |e_1 e_2| - r_2^2 \} \geq 2 \{ |e_1 e_2| - r_1^2 \} > 0,$$

ce qui prouve encore notre inégalité.

Nous résumerons, comme il suit, nos résultats :

1° *Les courbes maxima.* Entre $r = 0$ et $r = r_1$,

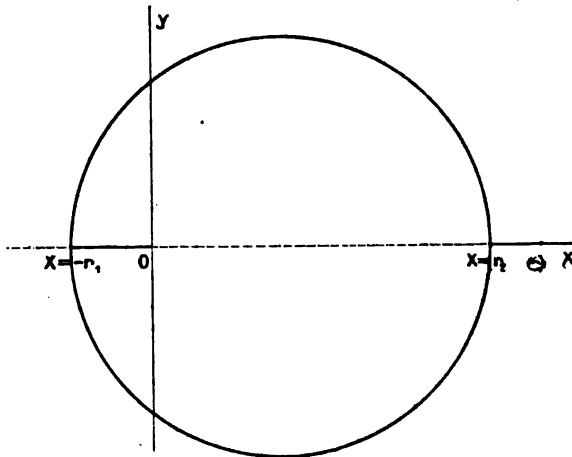
$$r_1 = \frac{\sqrt{|e_2|} - \sqrt{|e_1|}}{\sqrt{|e_2|} + \sqrt{|e_1|}} \sqrt{|e_1 e_2|}$$

il y a une seule courbe maxima : le segment $(0 \dots -r_1)$ de l'axe des x ; entre r_1 et r_2

$$r_2 = \frac{\sqrt{|e_2|} + \sqrt{|e_1|}}{\sqrt{|e_2|} - \sqrt{|e_1|}} \sqrt{|e_1 e_2|}$$

il y a deux courbes maxima : les deux demi-cercles (f); pour $r > r_2$

Fig. 1.



il y a encore une seule courbe maxima : le segment $(+r_2 \dots +\infty)$ de l'axe des x (fig. 1).

2° La fonction $M(r)$. Elle se compose de trois arcs différents :

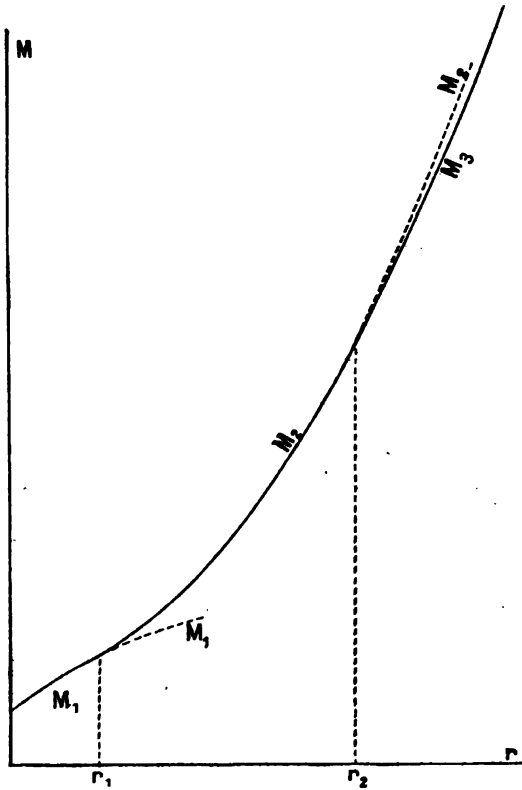
pour $0 \leq r \leq r_1$: $M_1(r) = |e_1 e_2| + \frac{1}{2}(|e_2| - |e_1|)r - r^2$;

pour $r_1 \leq r \leq r_2$: $M_2(r) = \frac{|e_1| + |e_2|}{2\sqrt{|e_1 e_2|}} (r^2 + |e_1 e_2|)$;

pour $r > r_2$: $M_3(r) = r^2 + \frac{1}{2}(|e_2| - |e_1|)r - |e_1 e_2|$.

Ce sont trois arcs de paraboles (fig. 2).

Fig. 2.



Les points r_1 et r_2 sont les points anguleux de $M(r)$ ⁽¹⁾.

(1) Ils sont de la *première* sorte. On vérifie facilement la continuité des tangentes. Il serait peut-être intéressant de se procurer aussi un exemple de points anguleux de la *deuxième* sorte. Je crois qu'on en trouvera parmi les polynômes du troisième degré.

Remarquons, pour finir, que le cas $e_2 = -e_1$ est un cas limite dégénéré : on a alors $r_1 = 0$, le cercle (f) dégénère dans l'axe des y , et

$$M(r) = r^2 + e^2 \quad (e = e_1 = -e_2).$$

Remarquons encore que l'axe des x , qui n'est courbe maxima que sur une partie de son étendue, est partout une courbe $\frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0$.

11. Il est clair que les propriétés que nous venons de démontrer sur la fonction $M(r)$ sont bien loin de la caractériser complètement. Peut-on indiquer des conditions *suffisantes* simples pour qu'à une fonction $M(r)$ on puisse faire correspondre une fonction entière $f(z)$ telle que

$$M(r) = \max |f(z)| \quad \text{pour } |z| = r?$$

C'est une question très importante, mais qui ne paraît pas près d'être résolue. En attendant, une autre condition nécessaire a été trouvée par trois voies toutes différentes par M. Hadamard ⁽¹⁾, M. Faber ⁽²⁾ et moi-même ⁽³⁾. Nous avons démontré, en effet, que l'expression

$$\frac{d \log M}{d \log r} = \frac{r}{M} \frac{dM}{dr}$$

est toujours croissante. Il s'ensuit que, pour les fonctions entières non linéaires, la dérivée $\frac{dM}{dr}$ est croissante à partir d'une certaine valeur de r , car pour toutes ces fonctions $\frac{r}{M}$ diminue si r va en augmentant à partir d'une certaine valeur ⁽⁴⁾.

Comme je ne connaissais pas le travail antérieur de M. Hadamard lors de la publication de mon Mémoire, je profite de l'occasion pour faire cette rectification bibliographique.

⁽¹⁾ *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXIV, 1896. M. Hadamard n'a pas publié sa démonstration, il a bien voulu me l'indiquer par écrit. Sa proposition a été reproduite par M. d'Adhémar dans sa rédaction des *Leçons sur les séries à termes positifs* de M. Borel. Là encore, la démonstration manque, car le raisonnement ajouté par M. d'Adhémar ne porte pas sur la question.

⁽²⁾ *Math. Ann.*, t. LXIII, 1907.

⁽³⁾ *Jahresber. d. deutschen Math.-Ver.*, t. XVI, 1907.

⁽⁴⁾ Voir aussi n° 9, la note en bas de la page 225.

SUR LES COURBES GAUCHES UNICURSALES DU QUATRIÈME ORDRE;

PAR M. CH. BIOCHE.

On sait que les courbes gauches du quatrième ordre appartiennent à deux familles distinctes :

1° Les *biquadratiques*, par chacune desquelles il passe une infinité de surfaces du second ordre;

2° Les *quartiques de Steiner*, par chacune desquelles il ne passe qu'une surface du second ordre, dont un système de génératrices est constitué par les sécantes triples de la courbe.

Les quartiques de Steiner sont unicursales; leur classe est 6, 5 ou 4.

Les biquadratiques ne sont unicursales que si elles ont un point double; si celui-ci est un point double ordinaire, la courbe est de sixième classe; si c'est un point de rebroussement, la courbe est de quatrième classe ⁽¹⁾.

J'ai été conduit à écrire ce Mémoire à la suite de cette remarque : si d'un point M d'une courbe de sixième classe on mène les trois plans osculateurs qui ont leurs points de contact distincts de M, ces points sont dans un plan Π passant par M. J'ai obtenu des résultats curieux en cherchant l'enveloppe de ce plan Π et, pour pouvoir effectuer simplement les calculs, j'ai dû chercher des formes réduites des équations générales des courbes gauches unicursales du quatrième ordre. Enfin, en cherchant des exemples, j'ai obtenu des formes assez générales d'équations donnant lieu à des remarques intéressantes.

I. — PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES.

1. Une courbe gauche unicursale du quatrième ordre peut tou-

⁽¹⁾ J'ai déjà étudié les courbes de quatrième ordre et de quatrième classe (*Bull. Soc. Math.*, t. XXXIII, 1905, p. 18).

jours se présenter par les équations

$$\begin{aligned} X &= a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4, \\ Y &= b_0 \lambda^4 + b_1 \lambda^3 + b_2 \lambda^2 + b_3 \lambda + b_4, \\ Z &= c_0 \lambda^4 + c_1 \lambda^3 + c_2 \lambda^2 + c_3 \lambda + c_4, \\ T &= d_0 \lambda^4 + d_1 \lambda^3 + d_2 \lambda^2 + d_3 \lambda + d_4, \end{aligned}$$

les polynomes en λ étant premiers entre eux dans leur ensemble.

Les λ des points d'intersection de la courbe avec un plan quelconque sont liés par une relation qui doit être du premier degré par rapport à chacun de ces λ pris isolément, puisque, trois d'entre eux étant donnés arbitrairement, on doit avoir une équation du premier degré pour déterminer le quatrième. Il est facile de voir que, si l'on considère le tableau des coefficients

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
b_0	b_1	b_2	b_3	b_4
c_0	c_1	c_2	c_3	c_4
d_0	d_1	d_2	d_3	d_4

si l'on désigne par Δ_i le déterminant déduit de ce tableau en supprimant la colonne d'indice i , et par S_k la somme des produits k à k des quatre λ des points d'intersection de la courbe avec un plan, la relation en question peut s'écrire

$$(1) \quad \Delta_0 + \Delta_1 S_1 + \Delta_2 S_2 + \Delta_3 S_3 + \Delta_4 S_4 = 0.$$

2. Soit λ le paramètre correspondant au point de contact d'un plan osculateur et λ' le paramètre correspondant au point où ce plan coupe la courbe, la relation précédente montre que λ et λ' sont liés par la relation

$$(2) \quad \Delta_0 + 3\Delta_1 \lambda^2 + 3\Delta_2 \lambda + \Delta_3 \lambda^3 + \lambda'(\Delta_1 + 3\Delta_2 \lambda + 3\Delta_3 \lambda^2 + \Delta_4 \lambda^3) = 0;$$

on en déduit immédiatement que, si l'on se donne λ' , on a trois valeurs pour λ . Autrement dit; d'un point de la courbe on peut mener trois plans osculateurs autres que celui qui a son point de contact au point correspondant à λ' ; ce dernier comptant pour 3, on voit que la courbe est ordinairement de la classe $3 + 3 = 6$. Le nombre qui mesure la classe s'abaisse, si l'équation (2) donne pour λ des racines indépendantes de λ' . On peut reconnaître que

les points correspondant à ces valeurs de λ sont des points d'*inflexion linéaire*, c'est-à-dire des points tels que la tangente y coupe la courbe en trois points confondus, de sorte que tout plan passant par cette tangente y a également trois points d'intersection confondus; la présence d'un de ces points abaisse la classe d'une unité (¹).

Il peut arriver qu'un plan coupe la courbe en des points qui correspondent à une seule valeur de λ ; les λ des points en question sont donnés par l'équation

$$(3) \quad \Delta_0 + 4\Delta_1\lambda + 6\Delta_2\lambda^2 + 4\Delta_3\lambda^3 + \Delta_4\lambda^4 = 0;$$

le plan est alors dit *stationnaire*. Les plans stationnaires peuvent être, on le constate facilement sur des exemples, soit réels, soit imaginaires, soit les uns réels et les autres imaginaires.

3. En comparant les équations (2) et (3), on voit facilement que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (2) ait une racine en λ indépendante de λ' (racine que j'appellerai *racine singulière*), c'est-à-dire pour que le coefficient de λ' et le terme indépendant admettent un facteur commun, est que l'équation (3) possède une racine multiple. En examinant les divers cas qui peuvent se présenter on reconnaît que :

1° Si l'équation (3) a une *racine double*, l'équation (2) a une racine singulière; la courbe correspondante est une *quartique à sécantes triples* ayant un point d'inflexion linéaire, qui correspond à la racine singulière. La courbe est de *cinquième classe*.

2° Si l'équation (3) a *deux racines doubles*, l'équation (2) a deux racines singulières distinctes; la courbe correspondante est une *quartique à sécantes triples* ayant deux points d'inflexion linéaire qui correspondent aux racines singulières. La courbe est de *quatrième classe*. Elle a comme tangentes des droites faisant partie d'un complexe linéaire. Les courbes de cette nature sont les lignes asymptotiques des surfaces réglées du troisième ordre à directrices distinctes.

3° Si l'équation (3) a une *racine triple*, l'équation (2) a une

(¹) Voir, *Bull. Soc. Math.*, t. IX, 1880-1881, un Mémoire de M. Genty.

racine singulière double; la courbe correspondante est une *biquadratique ayant un point de rebroussement* donné par la racine singulière. La courbe est de *quatrième classe*.

L'équation (3) ne peut pas avoir de racine quadruple, ou, autrement dit, le coefficient de λ' et le terme indépendant de l'équation (2) ne peuvent avoir leurs coefficients proportionnels lorsque les polynômes en λ qui donnent les expressions des coordonnées d'un point de la courbe considérée sont premiers entre eux dans leur ensemble.

4. Considérons une quartique gauche unicursale de sixième classe. Si l'on fait la perspective sur un plan quelconque en prenant comme point de vue un point M de la courbe, on obtient comme perspective une cubique plane unicursale. Les tangentes d'inflexion de cette cubique sont les traces sur le plan du tableau des plans osculateurs menés par M; comme on sait que les points d'inflexion de la cubique sont en ligne droite, on en déduit que *les points de contact des plans osculateurs menés par un point M de la courbe sont dans un plan passant par M*. Pour abréger, je désignerai ce plan par Π .

A chaque point M correspond un plan Π . Si l'on forme l'équation de ce plan, on reconnaît facilement que les coefficients de celle-ci sont du deuxième degré par rapport au paramètre λ' du point M. On en déduit que le plan enveloppe un cône du second degré, par suite passe constamment par un point fixe que je désignerai par ω . Je crois inutile de montrer l'existence du cône en question au moyen des équations générales, et je vais, avant de traiter les questions relatives au plan Π , montrer comment on peut simplifier les équations des courbes à étudier, par un choix convenable du tétraèdre de référence et des transformations homographiques simples.

II. — ÉQUATIONS RÉDUITES.

5. Prenons pour faces du tétraèdre de référence deux plans osculateurs et deux plans qui passent chacun par la corde qui

joint les deux points et par la tangente en l'un d'eux; si l'un des points correspond à la valeur zéro du paramètre λ et l'autre à la valeur infinie, hypothèse qu'il est facile de réaliser, les équations seront

$$X = a\lambda^4 + a'\lambda^3, \quad Y = b\lambda^3 + b'\lambda^2, \quad Z = c\lambda^2 + c'\lambda, \quad T = d\lambda + d',$$

$X = 0$, $T = 0$ étant les plans osculateurs; on trouve facilement alors pour les coefficients des équations (1), (2) et (3)

$$\Delta_0 = a'b'c'd', \quad \Delta_1 = ab'c'd', \quad \Delta_2 = abc'd', \quad \Delta_3 = abcd', \quad \Delta_4 = abcd.$$

On peut distinguer les biquadratiques des quartiques à sécantes triples; il suffit de remarquer qu'une de ces dernières n'a jamais de point double, tandis qu'une biquadratique unicursale en a toujours un. Or, pour qu'il y ait un point double, il faut et il suffit que l'on puisse trouver un couple de valeurs de λ et μ , de façon que

$$\frac{a\lambda^4 + a'\lambda^3}{a\mu^4 + a'\mu^3} = \frac{b\lambda^3 + b'\lambda^2}{b\mu^3 + b'\mu^2} = \frac{c\lambda^2 + c'\lambda}{c\mu^2 + c'\mu} = \frac{d\lambda + d'}{d\mu + d'};$$

ces équations débarrassées de la solution $\lambda = \mu$ donnent le système

$$ab\lambda\mu + ab'(\lambda + \mu) + a'b' = 0,$$

$$bc\lambda\mu + bc'(\lambda + \mu) + b'c' = 0,$$

$$cd\lambda\mu + cd'(\lambda + \mu) + c'd' = 0;$$

on en déduit immédiatement que la condition cherchée s'exprime par

$$\begin{vmatrix} ab & ab' & a'b' \\ bc & bc' & b'c' \\ cd & cd' & c'd' \end{vmatrix} = 0.$$

6. Si l'on prend comme sommets du tétraèdre de référence situés sur la courbe les points de contact de deux plans stationnaires on a

$$a' = 0, \quad d = 0,$$

et, comme a et d' doivent être alors différents de zéro pour que l'on ait une courbe gauche du quatrième ordre, on peut, par une transformation consistant à diviser X et T par a et d' respective-

ment, ramener les équations à la forme

$$\frac{X}{\lambda^3} = \frac{Y}{b\lambda^2 + b'\lambda^2} = \frac{Z}{c\lambda^2 + c'\lambda} = \frac{T}{1}.$$

Pour voir quelle est la classe d'une courbe représentée par ces équations, on peut considérer, soit l'équation du plan osculateur qui est

$$(3bc\lambda^2 + 3bc'\lambda + b'c')X - 2(4c\lambda + 3c')\lambda^2 Y + 2(3b\lambda + 4b')\lambda^2 Z - (bc\lambda^2 + 3bc'\lambda + 3b'c')\lambda^3 = 0,$$

soit l'équation qui donne les points stationnaires; cette dernière a une racine infinie, une racine nulle et les deux autres sont données par

$$2bc\lambda^2 + 3bc'\lambda + 2b'c' = 0.$$

Il serait facile de faire le tableau des cas qui peuvent se présenter. Pour obtenir des formes d'équations aussi simples que possible, je ferai remarquer que, si l'on écarte le cas des courbes de quatrième classe que j'ai déjà étudiées dans un autre Mémoire, on peut toujours supposer b, b', c, c' différents de zéro. En effet, si $b = 0$ ou $c' = 0$, l'équation qui donne les points de contact des plans stationnaires a une racine triple infinie ou nulle; la courbe est une biquadratique de quatrième classe.

Si $c = 0$ ou $b' = 0$, l'équation qui donne les plans stationnaires a une racine double infinie ou nulle; on a alors une courbe de cinquième classe, si une seule des conditions est vérifiée, ou une quartique de quatrième classe à sécantes triples, si les deux conditions sont vérifiées simultanément.

Dans le cas où la courbe est de cinquième classe, on a vu que celle-ci avait deux plans stationnaires ordinaires et un plan correspondant à une tangente d'inflexion; c'est celui-ci qui correspond à la racine double. Comme on peut toujours prendre pour sommets du tétraèdre de référence les points de contact des plans stationnaires ordinaires, on peut toujours faire en sorte que l'équation qui donne ceux-ci n'ait pour racines infinie ou nulle que des racines simples.

Si donc on suppose $bb'cc' \neq 0$ on peut, par une transformation analogue à celle que j'ai employée au début de ce numéro, ramener

les équations à la forme

$$\frac{X}{\lambda^2} = \frac{Y}{\lambda^2 + \beta\lambda^2} = \frac{Z}{\lambda^2 + \gamma\lambda} = \frac{T}{1},$$

β et γ étant tous deux différents de zéro.

7. Si maintenant on remplace λ par $\beta\lambda$, X par $\beta^4 X$, Y par $\beta^3 Y$, Z par $\beta^2 Z$ et si l'on pose $\gamma = h\beta$, on obtient les équations

$$\frac{X}{\lambda^2} = \frac{Y}{\lambda^2 + \lambda^2} = \frac{Z}{\lambda^2 + h\lambda} = \frac{T}{1},$$

et, d'après ce qui précède, toute courbe du quatrième ordre, de sixième ou de cinquième classe est transformée homographique d'une des courbes représentées par ces équations. L'équation qui donne les points de contact des plans stationnaires est alors

$$2\lambda^2 + 3h\lambda + 2h = 0;$$

si $h \neq 0$, l'équation ne peut avoir de racine double que si

$$9h - 16 = 0;$$

dans ce cas la courbe est de cinquième classe.

La courbe est en général une quartique à sécantes triples; pour que ce soit une biquadratique, il faut et il suffit que $h = 2$. La courbe est alors sur les quadriques

$$Y^2 - ZX - X = 0,$$

$$Z^2 - X - 4Y = 0.$$

Les valeurs de λ qui correspondent au point double sont données par

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0.$$

8. On peut maintenant faire l'énumération complète des types de courbes qui, au moyen de transformations homographiques, donnent toutes les courbes gauches unicursales du quatrième ordre :

Biquadratique à rebroussement,

$$X = \lambda^4, \quad Y = \lambda^2, \quad Z = \lambda;$$

quartique de quatrième classe à sécantes triples,

$$X = \lambda^4, \quad Y = \lambda^3, \quad Z = \lambda;$$

quartique de cinquième classe à sécantes triples,

$$X = \lambda^4, \quad Y = \lambda^3 + \lambda^2, \quad Z = \lambda^2 + \frac{16}{9}\lambda;$$

biquadratique à point double ordinaire,

$$X = \lambda^4, \quad Y = \lambda^3 + \lambda^2, \quad Z = \lambda^2 + 2\lambda;$$

quartique de sixième classe à sécantes triples,

$$X = \lambda^4, \quad Y = \lambda^3 + \lambda^2, \quad Z = \lambda^2 + h\lambda,$$

h étant, dans ce dernier, différent de 0, 2 et $\frac{16}{9}$.

On peut remarquer que les équations des quatre premiers types ne contiennent plus de constante arbitraire; on en conclut immédiatement que toutes les courbes correspondant à l'un de ces types se déduisent homographiquement de l'une d'elles.

On peut remarquer aussi que les équations

$$X = \lambda^4, \quad Y = \lambda^3 + \lambda^2, \quad Z = \lambda^2 + h\lambda$$

donneraient une biquadratique à rebroussement pour $h = 0$. De sorte que ces équations peuvent être considérées, à une transformation homographique près, comme représentant toute courbe gauche unicursale du quatrième ordre, sauf les quartiques de Steiner de quatrième classe, qui se distinguent des autres courbes du quatrième ordre par ce fait que leurs tangentes appartiennent à un complexe linéaire.

III. — LES PLANS STATIONNAIRES.

9. Les λ des points de contact des plans stationnaires étant donnés par l'équation

$$\Delta_0 + 4\Delta_1\lambda + 6\Delta_2\lambda^2 + 4\Delta_3\lambda^3 + \Delta_4\lambda^4 = 0,$$

la condition pour que ces points soient dans un même plan s'ex-

prime par

$$\Delta_0 \Delta_4 - 4 \Delta_1 \Delta_3 + 6 \Delta_2^2 - 4 \Delta_3 \Delta_1 + \Delta_4 \Delta_0 = 0.$$

Si l'on prend les équations sous la forme réduite donnée au n° 7, la condition précédente donne

$$h = \frac{4}{3}.$$

Donc les courbes dont les points de contact des plans stationnaires sont dans un même plan sont transformées homographiquement de

$$X = \lambda^4, \quad Y = \lambda^3 + \lambda^2, \quad Z = \lambda^2 + \frac{4}{3}\lambda.$$

On peut constater que les points en question sont dans le plan

$$Y + 3Z = 0$$

et que deux d'entre eux sont imaginaires.

10. Dans le cas général, il existe une relation simple entre les tangentes à la courbe aux points stationnaires. *Ces tangentes sont sur une même quadrique.*

En effet l'équation générale des quadriques passant par les deux tangentes qui sont les arêtes du tétraèdre de référence est

$$Z(AX + BY) + (CX + DY) = 0;$$

si l'on forme l'équation qui donne les λ des points d'intersection de la quadrique avec la courbe, on obtient

$$A\lambda^6 + (B + Ah)\lambda^5 + (B + Bh + C)\lambda^4 + (Bh + D)\lambda^3 + D\lambda^2 = 0;$$

or le premier membre de cette équation est le carré du polynôme

$$2\lambda^3 + 3h\lambda^2 + 2h\lambda,$$

qui égalé à zéro donne les λ des plans stationnaires, si l'on a

$$A = 4, \quad B = 8h, \quad C = h^2, \quad D = 4h^2.$$

Donc la quadrique

$$4XZ + 8hYZ + h^2X + 4h^2Y = 0,$$

qui contient deux tangentes, est coupée par chacune des autres en

deux points confondus; de plus, les coefficients directeurs des tangentes en ces points étant

$$4\lambda^2, \quad 3\lambda^2 + 2\lambda, \quad 2\lambda + h,$$

ces droites sont parallèles au plan directeur

$$X + 2hY = 0$$

de la quadrique puisque la condition de parallélisme s'exprime par

$$4\lambda^2 + 6h\lambda^2 + 4h\lambda = 0,$$

équation vérifiée par les λ des points de contact. Donc les tangentes considérées ont trois points communs avec la quadrique.

11. Cette quadrique se décompose en deux plans si $h = 2$, c'est-à-dire si la courbe est une biquadratique; ces deux plans

$$X + 4Y = 0, \quad Z + 1 = 0$$

sont des plans bitangents contenant chacun un couple de tangentes aux points de contact des plans stationnaires.

Quand la quadrique ne se décompose pas, les plans

$$X + 4Y = 0, \quad 4Z + h^2 = 0,$$

qui sont tangents à cette surface aux sommets du tétraèdre de référence où la courbe a des plans stationnaires, sont encore des plans bitangents. Ces points étant deux quelconques des quatre points de contact des plans stationnaires, la propriété appartient à tous ces points. Donc *les plans tangents à la quadrique des tangentes aux points de contact des plans stationnaires sont des plans bitangents à la courbe.*

12. Les plans stationnaires forment un tétraèdre; la raison de ce fait est qu'un plan stationnaire comptant comme deux plans osculateurs confondus, si les plans stationnaires avaient un point commun de ce point, on pourrait mener huit plans osculateurs à la courbe, ce qui est impossible. C'est pour une raison analogue que les trois tangentes d'inflexion à une cubique plane à point double ne peuvent être concourantes.

On peut donc prendre les plans stationnaires comme faces du tétraèdre de référence; les équations de la courbe peuvent alors

s'écrire

$$X = a(\lambda + \alpha)^4, \quad Y = b(\lambda + \beta)^4, \quad Z = c(\lambda + \gamma)^4, \quad T = d(\lambda + \delta)^4,$$

et le plan osculateur a pour équation

$$\begin{vmatrix} \frac{X}{a} & \frac{Y}{b} & \frac{Z}{c} & \frac{T}{d} \\ (\lambda + \alpha)^3 & (\lambda + \beta)^3 & (\lambda + \gamma)^3 & (\lambda + \delta)^3 \\ \alpha(\lambda + \alpha)^2 & \beta(\lambda + \beta)^2 & \gamma(\lambda + \gamma)^2 & \delta(\lambda + \delta)^2 \\ \alpha^2(\lambda + \alpha) & \beta^2(\lambda + \beta) & \gamma^2(\lambda + \gamma) & \delta^2(\lambda + \delta) \end{vmatrix} = 0.$$

On voit que cette équation est bien du sixième degré en λ , autrement dit, qu'une courbe ayant quatre plans stationnaires distincts est de sixième classe. Si l'on forme la condition pour que les quatre points de contact des plans stationnaires soient dans un même plan, on voit que les déterminants $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ ont en facteur un déterminant de Vandermonde, et il reste

$$12\alpha\beta\gamma\delta - 3\Sigma\alpha\Sigma\alpha\beta\gamma + (\Sigma\alpha\beta)^2 = 0;$$

l'équation du deuxième degré, qui donnerait une des quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ si les trois autres étaient données, a ses racines imaginaires, ce qui est d'accord avec le résultat signalé à la fin du n° 9.

IV. — LE PLAN Π .

13. J'ai déjà fait remarquer que, si d'un point M d'une courbe de sixième classe on mène les plans osculateurs à la courbe, les points de contact de ces plans sont dans un plan passant par M et que j'ai désigné par Π . On peut se proposer de chercher si les points de contact des points osculateurs sont sur une même droite.

Si la courbe est donnée par les équations

$$X = \lambda^4, \quad Y = \lambda^3 + \lambda^2, \quad Z = \lambda^2 + h\lambda,$$

la relation entre les λ des points d'intersection avec un plan est

$$hS_1 + hS_2 + S_3 = 0,$$

S_k désignant la somme des produits k à k des quatre λ . Si trois des points sont en ligne droite et si l'on désigne par $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ la

somme de ces λ ou de leurs produits 2 à 2 ou 3 à 3, et par λ' le quatrième λ , la relation précédente s'écrit

$$h(\sigma_1 + \lambda') + h(\sigma_2 + \sigma_1 \lambda') + (\sigma_3 + \sigma_2 \lambda') = 0.$$

Pour que les trois points soient en ligne droite il faut que cette équation ne donne pas pour λ' une valeur déterminée, c'est-à-dire que l'on ait simultanément

$$h\sigma_1 + h\sigma_2 + \sigma_3 = 0,$$

$$h + h\sigma_1 + \sigma_2 = 0.$$

Or les λ des points de contact des plans osculateurs menés du point λ' sont donnés par l'équation

$$\lambda^3 + 3(h + \lambda')\lambda^2 + 3h(\lambda' + 1)\lambda + \lambda'h = 0.$$

Si l'on remplace dans les équations de conditions précédentes σ_1 , σ_2 , σ_3 par leurs expressions déduites de cette dernière équation, on obtient, après réductions simples,

$$\lambda'(3h^2 - 4h) = 0, \quad 4h - 3h^2 = 0.$$

On en déduit immédiatement, puisque h ne peut être nul, que, pour que les points considérés soient en ligne droite, il faut et il suffit que

$$h = \frac{4}{3},$$

ce qui est la condition pour que les points de contact des plans stationnaires soient dans un plan; le point d'où l'on mène les plans osculateurs n'intervient pas dans la condition. Donc :

1° *Si les points de contact des plans osculateurs menés d'un point de la courbe sont en ligne droite, il en est toujours de même, quel que soit le point pris sur la courbe;*

2° *La condition nécessaire et suffisante pour que ce fait se produise est que les points de contact des plans stationnaires soient dans un même plan.*

14. Pour obtenir l'équation du plan Π , je vais écrire que les λ des points d'intersection de ce plan avec la courbe sont λ' et les trois λ correspondant aux plans osculateurs menés par λ' . L'équa-

tion d'un plan étant

$$AX + BY + CZ + D = 0,$$

il s'agit d'identifier l'équation

$$A\lambda^4 + B(\lambda^3 + \lambda^2) + C(\lambda^2 + h\lambda) + D = 0,$$

avec l'équation

$$(\lambda - \lambda')[\lambda^2 + 3(\lambda' + h)\lambda^2 + 3h(\lambda' + 1)\lambda + h\lambda'] = 0.$$

On voit immédiatement que l'on peut prendre

$$A = 1, \quad B = 2\lambda' + 3h, \quad C = -(3\lambda'^2 + 2\lambda'), \quad D = -h\lambda'^2,$$

de sorte que l'équation du plan peut s'écrire

$$(X + 3hY) + 2(Y - Z)\lambda' - (3Z + h)\lambda'^2 = 0;$$

on en déduit facilement que *le plan a pour enveloppe le cône*

$$(Y - Z)^2 + (X + 3hY)(3Z + h) = 0,$$

dont le sommet est le point ω

$$X = h^2, \quad Y = -\frac{h^2}{3}, \quad Z = -\frac{h}{3}.$$

Pour que le point ω soit sur la courbe, il faut que $h = \frac{9}{16}$; la courbe serait alors de cinquième classe; d'un point M de la courbe on ne peut mener que deux plans osculateurs, le plan passant par M et par les points de contact passe par le point d'inflexion linéaire, qui est le point ω .

15. *Le cône enveloppe du plan Π touche la courbe aux points de contact des plans stationnaires*, car, si l'on remplace X, Y, Z par leurs expressions en fonction de λ dans le premier membre de l'équation du cône, on obtient, après simplifications et réductions,

$$\lambda^2(2\lambda^2 + 3h\lambda + 2\lambda)^2 = 0.$$

Or le premier membre de cette équation est le carré du premier membre de celle qui donne les points stationnaires.

Il est facile de reconnaître que, lorsque les points stationnaires

sont dans un même plan, le point ω est le pôle de ce plan par rapport à la quadrique qui contient les quatre tangentes. Les plans qui touchent cette quadrique aux points stationnaires ne sont autres que les plans Π correspondant aux points stationnaires.

V. — COURBES PARTICULIÈRES.

16. Les courbes données par les équations

$$\frac{X}{\cos \theta} = \frac{Y}{\sin \theta} = \frac{Z}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{T}{\alpha \cos^2 \theta + \beta \sin^2 \theta},$$

ou, si l'on pose $\tan \frac{\theta}{2} = \lambda$,

$$\frac{X}{1 - \lambda^2} = \frac{Y}{2\lambda(1 + \lambda^2)} = \frac{Z}{2\lambda(1 - \lambda^2)} = \frac{T}{\alpha(1 - \lambda^2)^2 + 4\beta\lambda^2},$$

sont des courbes unicursales du quatrième ordre. Les trois arêtes du tétraèdre de référence qui passerait par le point $X=Y=Z=0$ sont des cordes de la courbe et le plan $T=0$ est celui qui passe par les conjugués du point de concours de ces cordes par rapport aux segments déterminés par la courbe.

L'équation qui détermine les points de contact des plans stationnaires est

$$(\alpha - 2\beta)\lambda^4 + 6\alpha\lambda^2 + (\alpha - 2\beta) = 0.$$

La discussion de cette équation montre qu'elle a ses racines distinctes, sauf dans les cas suivants, où elle a deux racines doubles :

$$\begin{aligned} \alpha &= 2\beta, & \text{racine nulle et racine infinie;} \\ \beta &= 2\alpha, & \text{racines } \pm 1; \\ \alpha + \beta &= 0, & \text{racines } \pm i. \end{aligned}$$

Dans ces cas, on a des quartiques de Steiner de quatrième classe. Dans les autres cas, on a des courbes de quatrième ordre et de sixième classe (1).

(1) Les lignes de striction des hyperboloïdes à une nappe sont des transformées homographiques de courbes appartenant à la catégorie considérée. Ce sont des quartiques de Steiner; elles sont en général de sixième classe. Le cas où elles sont de quatrième classe correspond, comme me l'a fait remarquer M. Blutel, au cas des hyperboloïdes dont les plans cycliques sont rectangulaires.

17. On peut distinguer facilement les cas dans lesquels les courbes données par les équations précédentes sont des biquadratiques. Pour une biquadratique il passe par chaque point de l'espace deux cordes proprement dites et la droite qui passe par le point double. Le point $X = Y = Z = 0$ étant sur chaque droite le conjugué du point situé dans le plan $T = 0$, pour que la courbe ait un point double, il faut que ce point soit dans le plan $T = 0$.

On voit ainsi que l'on a des biquadratiques dans les cas suivants :

1° $\alpha = 0$; la courbe est l'intersection des quadriques

$$\beta^2(Y^2 - Z^2) = T^2, \quad \beta YZ = TX;$$

2° $\beta = 0$; la courbe est l'intersection des quadriques

$$\alpha^2(X^2 - Z^2) = T^2, \quad \alpha X^2 = TX;$$

3° $\alpha = \beta$; la courbe est l'intersection des quadriques

$$\alpha^2(X^2 + Y^2) = T^2, \quad \alpha XY = TZ.$$

Dans tous les cas, la courbe est sur la quadrique

$$\alpha^2 X^2 + \beta^2 Y^2 - (\alpha - \beta)^2 Z^2 = T^2.$$

18. Si l'on rejette à l'infini l'une des faces du tétraèdre de référence, les trois autres faces étant rectangulaires, on obtient une courbe qui admet pour axes de symétrie les trois axes de coordonnées, sans avoir de centre de symétrie. On obtient les points symétriques d'un point correspondant à une valeur θ de l'angle qui figure dans les premières équations en remplaçant θ par $-\theta$, $\pi - \theta$, $\pi + \theta$.

On a ainsi des courbes transformables de quatre façons différentes, en courbes ayant pour axes de symétrie les trois arêtes d'un trièdre trirectangle, sans que le sommet de ce trièdre soit un centre.

Il est facile de constater que le point ω considéré plus haut n'est autre, dans le cas actuel, que le point $X = Y = Z = 0$.

**SUR LA REPRÉSENTATION DES NOMBRES PAR LES CLASSES DE FORMES
APPARTENANT A UN DÉTERMINANT DONNÉ;**

PAR M. T. LALESKO.

1. Dans l'étude de la représentation des nombres par les classes de formes appartenant à un déterminant donné D , on peut se borner à considérer le groupe des classes primitives, c'est-à-dire des classes de formes

$$(1) \quad ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

les nombres a , b et c étant premiers dans leur ensemble.

On sait que la véritable représentation d'un nombre m par une forme (1) est celle que l'on appelle la représentation *propre* de ce nombre, c'est-à-dire une représentation telle que

$$m = a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2,$$

où les nombres ξ et η sont premiers entre eux, car les représentations impropres reviennent toujours à des représentations propres irréductibles.

Ceci rappelé, prenons deux nombres m et n représentés proprement par deux classes quelconques que nous désignerons par K_m et K_n . La théorie de la composition des formes nous apprend alors que le produit mn pourra être représenté par la classe composée que nous désignerons par $K_m K_n$; mais cette représentation sera-t-elle propre ou non?

Si les nombres m et n sont premiers entre eux, une identité fondamentale de la théorie de la composition des formes montre tout de suite que cette représentation résultante sera propre également; mais, si les nombres m et n ne sont pas premiers entre eux, cela n'est plus vrai, comme on l'a admis quelquefois. Je me propose de montrer ici qu'en général, dans ce cas, il y a plus de représentations résultantes impropres et j'établirai un critère permettant de distinguer les deux cas.

2. Soient

$$m = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_k^{\alpha_k} b_1^{\beta_1} b_2^{\beta_2} \dots b_p^{\beta_p},$$

$$n = a_1^{\alpha'_1} a_2^{\alpha'_2} \dots a_k^{\alpha'_k} c_1^{\gamma_1} c_2^{\gamma_2} \dots c_q^{\gamma_q},$$

les deux nombres considérés, supposés d'abord premiers à 2D. Faisons la remarque évidente que toute représentation propre d'un produit de deux facteurs premiers entre eux provient nécessairement de la composition de deux représentations propres convenables de ses facteurs; en effet, l'identité fondamentale

$$aa'X^2 + 2bXY + cY^2 = (ax^2 + 2bxy + a'cy^2)(a'x'^2 + 2bx'y' + acy'^2),$$

où

$$X = xx' - cyy',$$

$$Y = ax'y + a'xy' + 2byy',$$

nous montre que la représentation propre du nombre aa' par la forme (aa', b, c) peut résulter de la composition des représentations propres des nombres a et a' à l'aide des formes $(a, b, a'c)$ et (a', b, ac) .

Pour former donc toutes les représentations propres d'un nombre composé, il suffira de déterminer toutes les représentations propres de ses facteurs premiers deux à deux et de composer ensuite ces représentations de toutes les manières possibles. Or, soit K_λ et K_λ^{-1} les deux classes opposées qui, elles seules, représentent proprement le nombre premier λ ; la puissance λ^n ne sera représentable proprement que par les classes K_λ^n et K_λ^{-n} , en représentant par K_λ^n la classe qui résulte de la composition de K_λ , n fois de suite avec elle-même. Comme, d'après une remarque déjà faite, les représentations propres de deux nombres premiers entre eux donnent par composition une représentation qui est propre aussi, les expressions générales des classes dont chacune fournira une représentation propre distincte des nombres m et n seront respectivement

$$K_m = K_{a_1}^{\pm \alpha_1} K_{a_2}^{\pm \alpha_2} \dots K_{a_k}^{\pm \alpha_k} K_{b_1}^{\pm \beta_1} \dots K_{b_p}^{\pm \beta_p},$$

$$K_n = K_{a_1}^{\pm \alpha'_1} K_{a_2}^{\pm \alpha'_2} \dots K_{a_k}^{\pm \alpha'_k} K_{c_1}^{\pm \gamma_1} \dots K_{c_q}^{\pm \gamma_q}.$$

Nous obtenons ainsi 2^{p+k} représentations propres différentes du nombre m et 2^{q+k} du nombre n .

Considérons maintenant le produit

$$mn = a_1^{\alpha_1 + \alpha'_1} \dots a_k^{\alpha_k + \alpha'_k} b_1^{\beta_1} \dots b_p^{\beta_p} c_1^{\gamma_1} \dots c_q^{\gamma_q}.$$

Ce nombre aura donc effectivement et seulement 2^{p+q+k} représentations propres par les classes du déterminant D. Or, on peut combiner une représentation propre du nombre m à une représentation propre de n , de 2^{p+q+2k} façons différentes. *Il y aura donc, en général, $2^{p+q+k}(2^k - 1)$ cas où la représentation résultante du produit mn ne sera pas propre, quoique les représentations des nombres m et n le soient.*

Si donc $k > 1$, c'est le nombre des cas d'exception qui sera le plus grand. D'autre part, il est évident que les représentations impropres seront données par les classes

$$K_{a_1}^{\pm(\alpha - \alpha')} \dots K_{a_k}^{\pm(\alpha_k - \alpha'_k)} K_{b_1}^{\pm\beta_1} \dots K_{b_p}^{\pm\beta_p} K_{c_1}^{\pm\gamma_1} \dots K_{c_q}^{\pm\gamma_q},$$

et ceci nous permet d'énoncer le résultat suivant :

La représentation résultante sera impropre toutes les fois que, dans les représentations propres des nombres m et n , l'un au moins des facteurs communs de ces nombres sera représenté par des classes opposées, et seulement dans ce cas.

3. Examinons maintenant les représentations des nombres qui ne sont pas premiers à 2D.

D'après la remarque faite plus haut, cette question revient à l'étude de la représentation du nombre 2 et des facteurs de D. Nous supposons ici D *sans diviseurs carrés*; dans ces conditions, je dis qu'on a le théorème suivant :

Un facteur d de D ($D = d\delta$) n'est représentable proprement que par la classe ambiguë

$$dx^2 - \delta y^2.$$

Aucune puissance de ce nombre n'est représentable proprement par les classes des formes du déterminant D.

En effet, si d est représentable proprement par une classe K_d , cette classe contiendra la forme (d, n, l) où $n^2 - dl = D = d\delta$;

on déduit de là $n = kd$ et, par conséquent,

$$dx^2 + 2nxy + ly^2 = d(x + ky)^2 - \delta y^2,$$

ce qui prouve que la classe K_d est bien une classe de formes ambiguës.

Prenons maintenant le nombre d^k ; on devrait avoir d'une façon analogue $n^2 - d^k l = d\delta$; or, cette égalité est impossible si $k > 1$, puisque δ est premier à d .

Nous avons ainsi (remarquons-le en passant) une propriété caractéristique des formes ambiguës : ce sont les seules classes qui représentent proprement les facteurs de D . Cette propriété ne subsiste plus si D a des facteurs carrés : ainsi, par exemple, la forme $9x^2 + 6xy + 11y^2$ représente proprement 9 ($x=1, y=0$); son déterminant est $-90 = -3^2 \cdot 10$, et pourtant ce n'est pas une forme ambiguë.

La limitation aux déterminants sans diviseurs carrés est donc utile pour simplifier les résultats, même dans la théorie de la représentation des nombres. Ce théorème s'applique aussi pour le facteur 2 si D est pair.

Il nous reste donc à examiner le cas de la représentation de 2 quand D est impair. Or, un théorème bien connu sur les congruences

$$x^2 \equiv D \pmod{2^k}$$

nous permet d'affirmer immédiatement que 2 est toujours représentable proprement par la seule classe

$$2x^2 + 2xy + ky^2 \quad (1 - 2k = D);$$

que 4 est toujours représentable par les deux classes opposées

$$4x^2 \pm 2xy + k'y^2 \quad (1 - 4k' = D),$$

si D est de la forme $4n + 1$ et seulement dans ce cas, et qu'enfin 2^k ($k > 2$) est représenté proprement par 4 classes, deux à deux opposées, si $D = 8n + 1$ et seulement dans ce cas.

On voit maintenant avec facilité comment on devra modifier l'énoncé général trouvé précédemment pour ces divers cas. Ainsi, par exemple, nous aurons les propriétés suivantes :

Si un facteur de D figure à la fois dans m et n , la représen-

tation composée sera sûrement impropre ; mais, si les nombres m et n , tout en n'étant pas premiers à D , ne sont pas divisibles par les mêmes facteurs de D , et si les autres conditions sont remplies, la représentation résultante sera propre.

Dans l'évaluation des nombres p et q , il ne faudra pas tenir compte des facteurs de D ; enfin, 2 rentre dans la règle générale si D est pair.

REMARQUES SUR LE MOUVEMENT D'UNE FIGURE PLANE DANS SON PLAN ;

PAR M. A. PELLET.

1. Le centre de courbure (α, β) de l'enveloppe des droites

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - f(\varphi) = 0$$

est donné par les équations

$$-\alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi - f' = 0, \quad \alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi + f'' = 0,$$

d'où l'on déduit

$$x^2 + y^2 = f^2 + f'^2, \quad x^2 + \beta^2 = f'^2 + f''^2, \quad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (f + f'')^2, \\ \alpha x + \beta y = f'^2 - f f''.$$

Ainsi, lorsque f est de la forme $a \cos(b\varphi - c)$, a, b, c étant des constantes, un point de la courbe et son centre de courbure sont conjugués par rapport à un cercle, de rayon ab . C'est précisément le cas des épicycloïdes et le cercle n'est autre que le cercle de base.

2. Nous pouvons définir le mouvement d'une figure plane dans son plan par les positions successives de deux de ses droites que nous choisirons rectangulaires l'une sur l'autre. Soient

$$\xi = x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0, \quad \eta = -x \sin \varphi + y \cos \varphi - p_1 = 0,$$

les équations de ces droites par rapport à des axes fixes ; et

$$A\xi + B\eta + C = 0,$$

A, B, C étant des constantes, l'équation d'une droite du plan mobile. Dans le mouvement du plan, cette droite enveloppe une courbe dont la normale a pour équation $A\xi'_\varphi + B\gamma'_\varphi = 0$. Elle passe par le point $\xi'_\varphi = 0, \gamma'_\varphi = 0$, centre instantané de rotation I. De même la développée $n^{\text{ième}}$ a pour normale la droite

$$A\xi_{\varphi^{(n+1)}}' + B\gamma_{\varphi^{(n+1)}}' = 0.$$

Elle passe par un point $I_n, (n+1)^{\text{ième}}$ centre instantané de rotation, indépendant des coefficients A, B, C.

Lorsque φ varie, le lieu du point I dans le plan mobile est la roulette, dans le plan fixe la base; la droite II est normale pour une valeur de φ à la base et à la roulette en leur point de contact, et en général la droite $I_n I_{n+1}$ à la courbe engendrée par le point I_n ; enfin le second centre instantané I_1 est situé sur la *polaire du centre de courbure de la roulette par rapport au cercle de courbure de la base*.

Lorsque pour deux mouvements $I, I_1, I_2, \dots, I_{n-1}$ coïncident, les *deux mouvements ont un contact d'ordre n*, c'est-à-dire que les courbes décrites par un même point ont un contact d'ordre n et réciproquement.

Soient I, I'_1, I'_2 les trois premiers centres instantanés de rotation lorsqu'on fait rouler le cercle osculateur de la roulette sur le cercle osculateur de la base; I'_1 coïncide avec I_1 ; I'_2 est le pied de la perpendiculaire abaissée par le point I_2 sur la droite II, (*Journal de Mathématiques spéciales* de M. de Longchamps, 1895, p. 217 et suivantes).

3. Prenons pour axes de coordonnées la tangente, axe des x , et la normale à la base, axe des y , au point de contact avec la roulette à un certain moment; soient

$$x^2 + y^2 - 2Ry = 0, \quad x^2 + y^2 - 2R_1y = 0$$

les équations des cercles osculateurs de la roulette et de la base; les coordonnées du second centre instantané de rotation (x_1, y_1) sont données par les équations

$$x_1 = 0, \quad y_1 R - R_1(y_1 + R) = 0.$$

En faisant rouler le cercle $x^2 + y^2 - 2py = 0$ sur le cercle

$x^2 + y^2 - 2\rho_1 y = 0$, on aura un mouvement ayant un contact du second ordre avec le premier, si la relation

$$y_1 \rho - \rho_1 (y_1 + \rho) = 0$$

est satisfaite. Le cercle de rayon ρ passe par le point α, β si l'on a

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\rho\beta = 0.$$

Comme, dans le roulement du cercle ρ sur le cercle ρ_1 , le point α, β décrit une épicycloïde, le centre de courbure (α_1, β_1) de la trajectoire se trouve à l'intersection des droites

$$\frac{\alpha_1}{\alpha} = \frac{\beta_1}{\beta} = K, \quad \alpha x_1 + \beta \beta_1 - \rho_1 (\beta + \beta_1) = 0,$$

d'où

$$K = \frac{y_1 \beta}{x^2 + \beta^2 + y_1 \beta}.$$

Pour $\alpha = 0$, on a la relation

$$\beta_1 (y_1 + \beta) = y_1 \beta,$$

ou

$$\frac{1}{\beta_1} - \frac{1}{\beta} = \frac{1}{y_1} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R}.$$

Les droites joignant les points α, β et α_1, β_1 aux centres des cercles R et R_1 ont pour équations

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \alpha & \beta & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{R} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \alpha & \beta & \frac{1}{K} \\ 0 & 1 & \frac{1}{R_1} \end{vmatrix} = 0.$$

Par soustraction, on obtient la droite

$$x \alpha_1 + y \beta_1 = 0,$$

d'où le théorème que M. G. Kœnigs veut prendre pour fondement de la théorie (*Bulletin des Sciences mathématiques*, janvier 1907), afin d'éviter des précautions tenant à la question des signes.

4. Soient C le cône lieu des axes instantanés de rotation d'un solide, mobile autour d'un point fixe O , dans l'espace; C' le cône lieu de cet axe dans le solide; OM la génératrice de contact des

deux cônes, axe instantané à l'instant considéré. Menons par le point M un plan perpendiculaire à OM; ce plan coupe le cône C suivant une courbe B et le cône C' suivant une courbe B'; en faisant rouler B' sur B on obtient pour le plan un mouvement ayant un contact du second ordre avec celui qui résulte du mouvement du solide à l'instant considéré; d'ailleurs les points se trouvant sur une même droite passant par le point fixe O décrivent des trajectoires homothétiques.

**SUR LES TRAJECTOIRES
AUXQUELLES DONNENT LIEU LES FORCES CENTRALES;**

PAR M. GEORGES RÉMOUNDOS.

1. Un point mobile, sollicité par une force centrale, peut décrire une trajectoire ayant la propriété intéressante de s'approcher indéfiniment du centre des forces, qui est alors un point asymptote de la trajectoire; c'est là une condition nécessaire pour que le point attiré tende à se choquer avec le point attirant.

Si nous tenons compte de la formule

$$(1) \quad \rho = \frac{\left(r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2 \frac{dr^2}{d\theta^2} - r \frac{d^3 r}{d\theta^3}},$$

nous voyons que le rayon de courbure ρ tend vers zéro, lorsque le rayon polaire r tend vers zéro, pourvu que $\tan \omega$ ne tende pas vers zéro avec r , ω désignant l'angle formé par le rayon polaire et la tangente de la courbe; si, en effet, il en est ainsi, la formule

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\tan \omega}$$

montre que la dérivée $\frac{dr}{d\theta}$ tend vers zéro avec le rayon r ; il en résulte, en vertu de la formule (1), que le rayon de courbure ρ tend aussi vers zéro avec r . Nous supposons, bien entendu, ici, que

la trajectoire ne passe pas par le pôle (centre de force), qui n'est qu'un point asymptote de la courbe.

Dans ce travail, nous allons envisager d'abord ces trajectoires se rapprochant indéfiniment du centre d'attraction, avec l'hypothèse que le rayon de courbure tende vers zéro avec r ; ensuite, nous exposerons quelques résultats concernant le rayon de courbure des trajectoires auxquelles donnent lieu des forces centrales données comme fonctions de la distance du mobile au centre des forces.

2. Nous nous posons le problème suivant :

Quelles sont les lois de forces centrales qui peuvent donner lieu à des trajectoires du genre indiqué dans le paragraphe précédent?

Ces trajectoires sont caractérisées par le fait que le centre de force est un point asymptote de ces courbes, le rayon de courbure ρ tendant vers zéro en même temps que le rayon polaire r .

Pour traiter ce problème nous allons utiliser deux formules indiquées par les mathématiciens Resal (*Comptes rendus*, t. XC, p. 769) et Siacci (*Comptes rendus*, t. LXXXVIII), savoir :

$$(2) \quad F = -\frac{m}{K} \frac{v^2 r}{\rho}, \quad F = -mK^2 \frac{r}{\rho p^3},$$

m désignant la masse, K la constante des aires, v la vitesse, r le rayon polaire, ρ le rayon de courbure, p la distance du centre de la force à la tangente de la trajectoire et F l'intensité de la force; la deuxième formule n'est qu'une conséquence immédiate de la première et de la formule classique $p v = K$.

La relation évidente ⁽¹⁾

$$p = r \sin \omega$$

nous permet d'écrire la formule (2) comme suit :

$$(3) \quad F = -mK^2 \frac{1}{\rho r^2 \sin^3 \omega}.$$

Nous allons nous borner au cas où la force F dépend de la seule

(1) Dans cette formule, l'angle ω est choisi inférieur à deux angles droits.

distance du mobile au centre de force et nous remarquerons que la formule (3) nous permet de conclure que les lois de forces centrales, fonctions de la seule distance r du mobile au centre, qui répondent au problème ci-dessus posé, sont de la forme suivante :

$$F = \frac{-m\mu}{r^n} \quad (n > 2),$$

l'exposant n étant plus grand que deux.

Citons comme exemple la spirale logarithmique

$$r = e^{\mu\theta},$$

qui admet le pôle comme point asymptote et que décrit un mobile sollicité par une force centrale dont l'expression est

$$F = -m(1 + \mu^2)K^2 \frac{1}{r^3},$$

m désignant la masse et K la constante des aires. Cette trajectoire correspond aux conditions initiales

$$\theta_0 = 0, \quad r_0 = 1, \quad v_0 = K\sqrt{1 + \mu^2}.$$

Le rayon de courbure ρ tend, en effet, vers zéro, lorsque le point de la courbe s'approche indéfiniment du point asymptote, qui coïncide ici avec le centre de force.

3. D'une façon générale, si la force centrale est donnée par la formule

$$F = \frac{\alpha}{r^q},$$

α étant une constante, nous aurons, pour le rayon de courbure d'une trajectoire quelconque, la formule suivante :

$$\rho = \lambda \frac{r^{q-2}}{\sin^2 \omega},$$

λ désignant une constante et ω l'angle défini au n° 2. Nous en déduisons l'inégalité

$$(4) \quad \rho \geq |\lambda| r^{q-2},$$

le symbole $|\lambda|$ désignant la valeur absolue de la constante λ .

Cette inégalité nous conduit à plusieurs corollaires :

a. Si $q > 2$, le rayon ρ de courbure tend vers l'infini lorsque r croît indéfiniment sur une branche infinie, s'il en existe.

b. Si $q < 2$, le rayon de courbure ρ tend vers l'infini, lorsque la distance polaire r tend vers zéro sur une branche de la trajectoire s'approchant indéfiniment du centre de la force, s'il existe une telle branche.

En ce qui concerne la détermination de la constante λ , elle se fait immédiatement par les formules du paragraphe précédent; nous avons

$$\lambda = -\frac{mK^2}{\alpha},$$

et nous voyons qu'elle s'exprime au moyen de la masse du point mobile, de la constante des aires et du coefficient d'attraction α .

Si nous supposons que, sur une trajectoire, la vitesse reste inférieure à une certaine limite b , la formule

$$\rho v = K$$

nous permet d'établir aussi une limite supérieure du rayon de courbure de la trajectoire; nous avons en effet, d'une part,

$$\rho > \frac{K}{b}, \quad \frac{1}{\rho^2} < \frac{b^2}{K^2},$$

et, d'autre part,

$$\rho = -\frac{mK^2}{\alpha} \frac{r^{q+1}}{\rho^2};$$

d'où résulte

$$\rho < \left| \frac{mK^2}{\alpha} \right| \frac{b^2}{K^2} r^{q+1},$$

ou encore

$$(5) \quad \rho < \left| \frac{mb^3}{\alpha K} \right| r^{q+1}, \quad \rho < L r^{q+1}, \quad L = \left| \frac{mb^3}{\alpha K} \right|.$$

Les inégalités (4) et (5) présentent un intérêt particulier pour les trajectoires ayant des points à l'infini ou des branches s'approchant indéfiniment du centre d'attraction, puisqu'elles nous renseignent sur la manière dont le rayon de courbure ρ varie avec r

sur une branche allant à l'infini ou sur une branche s'approchant indéfiniment du centre d'attraction.

L'existence de trajectoires ayant des branches non fermées est assurée dans les cas $q \neq 2$ et $q \neq -1$ par un célèbre théorème de Bertrand, d'après lequel les seules lois de force qui donnent lieu à des trajectoires fermées, quelles que soient les conditions initiales, correspondent aux valeurs $q = 2$ et $q = -1$.

Les inégalités

$$|\lambda| r^{q-2} \leq \rho < L r^{q+1}$$

fournissent, en général, des limites d'une précision remarquable pour la grandeur du rayon de courbure d'une trajectoire et, en particulier, pour l'ordre d'infinitude et l'ordre infinitésimal dans les cas où le rayon de courbure tend vers l'infini ou vers zéro sur des branches allant à l'infini ou s'approchant indéfiniment du centre de force.

SUR L'ISOTHERMIE RELATIVE DES RÉSEAUX;

PAR M. L. RAFFY.

Les pages qui suivent ont pour principal objet d'étendre la notion de réseau isotherme, afin de faire rentrer dans une même théorie diverses classes de réseaux, notamment ceux qui caractérisent soit les surfaces isothermiques, soit les surfaces dont les lignes de courbure ont leur représentation sphérique isotherme, et ceux que M. Bianchi appelle isothermes-conjugués.

Je commence par définir l'isothermie relative de deux réseaux et, après avoir montré qu'à deux réseaux qui présentent cette propriété on en peut toujours associer un troisième, qui est dans la même relation avec chacun d'eux, je donne sous forme invariante les conditions qui assurent l'isothermie relative de deux réseaux.

J'applique d'abord ces conditions aux surfaces à lignes de courbure isothermes, et je ramène l'un à l'autre les deux critères de S. Lie et de M. Weingarten relatifs à ces surfaces.

Une seconde application concerne les surfaces à lignes de courbure isothermes-conjuguées, dont l'étude a été commencée par M. Eisenhart (*American Journal of Mathematics*, t. XXV, p. 213-248). Par le fait même de son rattachement à une notion plus large, cette étude se trouve complétée sur divers points. Je calcule à nouveau, en la généralisant, l'équation aux dérivées partielles des surfaces de M. Eisenhart et j'en déduis leurs caractéristiques (lignes de courbure et lignes asymptotiques).

Après diverses indications concernant la compatibilité des deux conditions d'isothermie relative, je montre que toute famille de courbes dont l'équation est de la forme

$$U(u) + V(v) = \text{const.}$$

appartient à un réseau isotherme relativement au réseau des lignes coordonnées ($u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$) et je fais rentrer dans une même catégorie les surfaces isothermiques, celles dont les lignes de courbure ont leur représentation sphérique isotherme et celles dont les lignes de courbure forment un réseau isotherme-conjugué.

I. — DÉFINITION ET CONDITIONS POUR L'ISOTHERMIE RELATIVE DES RÉSEAUX.

1. Quand deux couples de variables, α et β d'une part, φ et χ d'autre part, donnent lieu à une identité telle que

$$(1) \quad d\alpha d\beta = \psi(\varphi, \chi) (d\varphi^2 + d\chi^2),$$

si les équations $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$ sont celles des deux familles de lignes de longueur nulle d'une surface, on dit que le réseau des courbes $\varphi = \text{const.}$, $\chi = \text{const.}$ est un réseau isotherme de la surface ⁽¹⁾.

En vue de généraliser cette notion, nous n'imposerons plus, au

⁽¹⁾ Si, au lieu de l'identité (1), on posait

$$d\alpha d\beta = W(u, v) [U(u) du^2 + V(v) dv^2],$$

le réseau $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ coïnciderait, comme il est bien connu, avec le réseau $\varphi = \text{const.}$, $\chi = \text{const.}$

moins en général, aux lignes $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$ la condition d'être des lignes minima, et nous énoncerons le fait analytique exprimé par l'identité (1) en disant que le réseau $\varphi = \text{const.}$, $\chi = \text{const.}$ est *isotherme relativement au réseau* $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$, ou, plus brièvement, que le réseau (φ, χ) est isotherme relativement au réseau (α, β) .

D'après cette convention de langage, une surface est dite *isothermique* quand le réseau de ses lignes de courbure est isotherme relativement au réseau formé par ses lignes de longueur nulle; la représentation sphérique (des lignes de courbure) d'une surface est dite *isotherme* quand le réseau de ses lignes de courbure est isotherme relativement au réseau qui correspond aux lignes minima de sa représentation sphérique; un réseau est dit *isotherme-conjugué*, au sens de M. Bianchi, quand il est isotherme relativement au réseau formé par les lignes asymptotiques.

2. Revenons à l'identité (1). Pour qu'elle ait lieu, il faut et il suffit que α et β soient deux fonctions ne dépendant, l'une que de $\varphi + i\chi$, l'autre que de $\varphi - i\chi$, de sorte qu'on a, inversement,

$$\varphi + i\chi = 2\alpha_1(\alpha), \quad \varphi - i\chi = 2i\beta_1(\beta).$$

Ces équations entraînent

$$d\varphi d\chi = -i(d\alpha_1^2 + d\beta_1^2).$$

Or, le réseau (α_1, β_1) n'est pas distinct du réseau (α, β) ; d'où cette conclusion :

THÉORÈME I. — *Si un réseau (φ, χ) est isotherme relativement à un réseau (α, β) , le réseau (α, β) est isotherme relativement au réseau (φ, χ) , et réciproquement. En d'autres termes, pour qu'un réseau soit isotherme relativement à un autre, il faut et il suffit que cet autre soit isotherme relativement au premier.*

Comme application, cherchons la condition d'isothermie des lignes de courbure d'une surface (S) rapportée à ses lignes minima. Soit

$$ds^2 = 4\lambda^2(\alpha, \beta) d\alpha d\beta$$

son élément linéaire et soit ξ l'une des coordonnées isotropes,

$x + iy$, par exemple, d'un point variable sur cette surface; les lignes de courbure sont déterminées (O. Bonnet) par l'équation

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\xi'_\alpha}{\lambda^2} \right) dx^2 - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\xi'_\beta}{\lambda^2} \right) d\beta^2 = 0.$$

Soient $\varphi = \text{const.}$, $\chi = \text{const.}$ leurs équations finies; on a

$$\mu d\varphi d\chi = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\xi'_\alpha}{\lambda^2} \right) dx^2 - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\xi'_\beta}{\lambda^2} \right) d\beta^2.$$

Pour exprimer que la surface (S) est isothermique, écrivons que le réseau (α, β) est isotherme relativement au réseau (φ, χ) : nous trouvons immédiatement

$$\frac{1}{A_0(\alpha)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\xi'_\alpha}{\lambda^2} \right) = \frac{1}{B_0(\beta)} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\xi'_\beta}{\lambda^2} \right),$$

ce qui est la condition connue.

Comme autre application, considérons une surface rapportée aux coordonnées tangentielles isotropes d'Ossian Bonnet, qui sont les paramètres (α, β) des lignes minima de sa représentation sphérique, et cherchons la condition pour que l'élément linéaire

$$d\sigma^2 = \frac{4 d\alpha d\beta}{(\alpha\beta + 1)^2}$$

de la sphère de Gauss acquière la forme $\psi(d\varphi^2 + d\chi^2)$, quand on prend pour variables les paramètres (φ, χ) des lignes de courbure. Le plan tangent à la surface a pour équation

$$(x - \beta)x - i(x - \beta)y + (x\beta - 1)z + \xi = 0,$$

et, si l'on pose

$$p = \xi'_\alpha, \quad q = \xi'_\beta, \quad r = \xi''_{\alpha\alpha}, \quad s = \xi''_{\alpha\beta}, \quad t = \xi''_{\beta\beta},$$

l'équation différentielle des lignes de courbure est

$$r dx^2 - t d\beta^2 = 0,$$

de sorte qu'on a

$$\lambda d\varphi d\chi = r dx^2 - t d\beta^2.$$

Au lieu d'écrire que le réseau (φ, χ) est isotherme relativement

au réseau (α, β) , écrivons que celui-ci est isotherme relativement au premier; nous trouvons immédiatement

$$\frac{r}{A_0(\alpha)} = \frac{t}{B_0(\beta)};$$

c'est la condition pour que la représentation sphérique (des lignes de courbure) de la surface soit isotherme. Elle entraîne l'équation aux dérivées partielles du quatrième ordre

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \log \frac{r}{t} = 0,$$

qui lui est équivalente, et dont les caractéristiques sont définies par la relation

$$d\alpha d\beta (r d\alpha^2 - t d\beta^2) = 0.$$

Ainsi, l'équation aux dérivées partielles des surfaces pour lesquelles la représentation sphérique des lignes de courbure est isotherme admet comme caractéristiques les lignes de courbure et les lignes qui correspondent aux lignes minima de la représentation sphérique.

3. L'isothermie relative de deux réseaux peut se reconnaître à un caractère, théorique comme le précédent, et que voici :

THÉORÈME II. — *Pour que deux réseaux soient isothermes l'un relativement à l'autre, il faut et il suffit : 1° que les tangentes aux courbes de l'un d'eux forment en tout point un faisceau harmonique avec les tangentes aux courbes de l'autre; 2° qu'ils soient isothermes l'un et l'autre relativement à un troisième réseau.*

1° Soient (α, β) et (φ, χ) les deux réseaux. On a, par hypothèse,

$$d\alpha d\beta = \psi(\varphi, \chi)(d\varphi^2 + d\chi^2).$$

Or, si l'on rapporte le second membre au type général

$$\mathcal{F} = A d\varphi^2 + 2B d\varphi d\chi + C d\chi^2,$$

on aura

$$A = C = \psi, \quad B = 0.$$

De même, si l'on compare le produit $2 d\varphi d\chi$ au type général

$$\mathcal{F}_1 = A_1 d\varphi^2 + 2 B_1 d\varphi d\chi + C_1 d\chi^2,$$

on aura

$$A_1 = C_1 = 0, \quad B_1 = 1.$$

De là résulte immédiatement

$$AC_1 - 2 BB_1 + CA_1 = 0,$$

ce qui exprime que les tangentes aux courbes du réseau $\mathcal{F} = 0$ ou (α, β) forment en tout point un faisceau harmonique avec les tangentes aux courbes du réseau $\mathcal{F}_1 = 0$ ou (φ, χ) . Nous dirons avec M. Darboux (*Théorie des surfaces*, t. IV, p. 65) que les réseaux $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_1$ se divisent harmoniquement.

2° Une extension facile d'un théorème dû à M. Tisserot conduit à cet énoncé : *Étant données deux formes quadratiques binaires de différentielles, il existe des variables telles que les deux formes, exprimées au moyen de ces variables, ne contiennent pas de terme rectangle.* Si les deux formes $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_1$ ne sont pas proportionnelles, ce système de variables est unique et il est fourni par les intégrales de l'équation

$$(2) \quad \begin{vmatrix} A d\varphi + B d\chi & A_1 d\varphi + B_1 d\chi \\ B d\varphi + C d\chi & B_1 d\varphi + C_1 d\chi \end{vmatrix} = 0,$$

qu'on obtient en égalant à zéro le covariant jacobien des deux formes. Dans le problème qui nous occupe, les deux réseaux étant distincts, les formes $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_1$ ne peuvent pas être proportionnelles.

Appliquons cette règle au cas présent. L'équation différentielle du réseau qu'elle fait correspondre aux deux réseaux (α, β) et (φ, χ) est

$$\mathcal{F}_1 = d\varphi^2 - d\chi^2 = 0.$$

Posons

$$d\varphi + d\chi = 2 du, \quad d\varphi - d\chi = 2 dv.$$

Nous déduisons de là

$$d\alpha d\beta = \psi (d\varphi^2 + d\chi^2) = 2\psi (du^2 + dv^2), \quad d\varphi d\chi = du^2 - dv^2,$$

ce qui prouve que le réseau $\mathcal{F}_1 = 0$ ou (u, v) est isotherme relativement aux deux réseaux (α, β) et (φ, χ) , et que ces deux réseaux sont isothermes relativement à lui.

Réciproquement, supposons qu'il existe un réseau (u, v) tel que, quand on rapporte la surface à ce réseau, les deux formes $dx d\beta$ et $d\varphi d\chi$ deviennent respectivement

$$dx d\beta = 2\psi (du^2 + dv^2), \quad d\varphi d\chi = \lambda [U(u) du^2 - V(v) dv^2].$$

Si, de plus, les deux réseaux (α, β) et (φ, χ) se divisent harmoniquement, on devra, d'après la condition rappelée plus haut, avoir $U = V$, de sorte qu'il viendra

$$d\varphi d\chi = \mu (du^2 - dv^2).$$

Dès lors l'identité

$$2d(u + iv) d(u - iv) = [d(u + v)]^2 + [d(u - v)]^2$$

prouve que le réseau $(u + v, u - v)$, c'est-à-dire le réseau (φ, χ) , est isotherme relativement au réseau $(u + iv, u - iv)$ ou (α, β) .

La proposition est donc complètement démontrée. Le réseau (u, v) , isotherme relativement aux deux réseaux proposés, n'est autre que celui qui est défini par l'extension du théorème de M. Tissot. Son équation, que nous avons dans le cas général mise sous la forme (2), peut aussi s'écrire

$$\begin{vmatrix} d\chi^2 & -d\varphi d\chi & d\varphi^2 \\ A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Elle exprime simplement que ce réseau divise harmoniquement les deux réseaux proposés.

4. *Remarques et exemples.* — Faisons, pour un instant, abstraction de l'hypothèse concernant l'isothermie relative des réseaux et considérons, sur une surface, deux réseaux (R_1) et (R_2) , définis respectivement par l'évanouissement de deux formes quadratiques de différentielles

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= A_1 d\varphi^2 + 2C_1 d\varphi d\chi + C_1 d\chi^2 = 0, \\ \mathcal{F}_2 &= A_2 d\varphi^2 + 2C_2 d\varphi d\chi + C_2 d\chi^2 = 0. \end{aligned}$$

En égalant à zéro le covariant jacobien $\mathcal{F}_3$ de ces deux formes, on définit un troisième réseau (R_3) , qui divise harmoniquement le réseau (R_1) et le réseau (R_2) . Si donc ces deux réseaux se di-

visent harmoniquement, quel que soit celui des trois réseaux (R_1), (R_2), (R_3) que l'on considère, il divise harmoniquement chacun des deux autres : la condition est nécessaire et suffisante.

Quand elle est réalisée, les trois réseaux présentent une liaison mutuelle remarquable, que nous rappellerons en disant qu'ils forment une *triade*. Voici divers exemples de triades : 1° tout réseau orthogonal tracé sur une surface, son réseau bissecteur et le réseau des lignes minima; en particulier, les lignes de courbure d'une surface, leurs courbes bissectrices et les lignes minima; 2° les lignes de courbure d'une surface, ses lignes asymptotiques et ses *lignes diagonales* (lignes tangentes aux diamètres conjugués égaux de l'indicatrice); 3° les réseaux considérés par M. Darboux dans sa théorie des douze surfaces (*loc. cit.*).

A l'hypothèse qui définit la *triade* ajoutons l'isothermie relative de deux des réseaux; d'après le théorème qui précède, le troisième réseau sera isotherme relativement aux deux premiers. En conséquence, pour exprimer l'isothermie relative de deux réseaux, on pourra introduire le réseau qui complète la triade dont ils font partie et exprimer que ce réseau est isotherme relativement à l'un des premiers. Il y aura donc trois manières équivalentes d'énoncer la propriété d'une surface sur laquelle deux réseaux déterminés sont isothermes l'un relativement à l'autre. Ainsi, les *surfaces isothermiques* étant définies par l'isothermie relative de leurs lignes de courbure et de leurs lignes minima, on a ces théorèmes, dont les réciproques sont vraies : *Sur toute surface isothermique, le réseau bissecteur des lignes de courbure est isotherme relativement au réseau des lignes minima; il est isotherme relativement au réseau des lignes de courbure. De même, les surfaces à lignes de courbure isothermes-conjuguées* étant définies par l'isothermie relative de leurs asymptotiques et de leurs lignes de courbure, en considérant le réseau des lignes diagonales, on trouve ces deux propriétés caractéristiques : *Sur toute surface à lignes de courbure isothermes-conjuguées, le réseau des lignes diagonales est isotherme relativement aux lignes asymptotiques; il est isotherme relativement aux lignes de courbure.*

Il résulte immédiatement de là que *les surfaces minima ont, comme l'a démontré M. Eisenhart, leurs lignes de courbure iso-*

thermes-conjuguées. En effet, les lignes asymptotiques des surfaces minima, étant rectangulaires, coïncident avec le réseau bissecteur des lignes de courbure; l'isothermie relative des lignes de courbure et de leur réseau bissecteur, que les surfaces minima présentent parce qu'elles sont isothermiques, revient donc à l'isothermie relative des lignes de courbure et des lignes asymptotiques, propriété qui définit les surfaces à lignes de courbure isothermes-conjuguées.

5. Nous allons maintenant donner, sous forme invariante, les conditions qui assurent l'isothermie relative de deux réseaux déterminés. A cet effet, nous introduirons une notion qui paraît de nature à intervenir dans bien d'autres recherches, la notion des *éléments invariants*. Soient

$$(I) \quad \mathcal{J} = A du^2 + 2B du dv + C dv^2 = 0$$

l'équation d'un premier réseau et

$$(II) \quad l du^2 + 2m du dv + n dv^2 = 0$$

celle d'un second réseau, isotherme relativement au premier. Cette dernière équation peut être remplacée par les deux suivantes :

$$(II') \quad l_1 du + n_1 dv = 0, \quad l_2 du + n_2 dv = 0,$$

dont les premiers membres ne sont déterminés chacun qu'à un facteur arbitraire près. A ces premiers membres nous substituerons des expressions différentielles que nous appellerons les *éléments invariants de la forme (II) ou du réseau (II) relativement à la forme (I) ou au réseau (I)* et qui seront indépendantes non seulement des facteurs arbitraires dont il vient d'être question, mais aussi des coordonnées curvilignes auxquelles on rapporte la surface. Ces *éléments invariants*, auxquels nous attribuons les expressions suivantes

$$(EI) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{Cl_2^2 - 2Bl_1n_2 + An_2^2} \frac{l_1 du + n_1 dv}{l_1 n_2 - n_1 l_2}, \\ \sqrt{Cl_1^2 - 2Bl_1n_1 + An_1^2} \frac{l_2 du + n_2 dv}{l_1 n_2 - n_1 l_2}, \end{array} \right.$$

sont homogènes et du degré zéro séparément par rapport à l_1, n_1

et par rapport à l_2, n_2 . Ils se réduisent respectivement, quand la forme (I) est l'élément linéaire de la surface, aux *éléments d'arc* ⁽¹⁾ des courbes du réseau (II). Pour établir dans tous les cas leur invariance, posons

$$(3) \quad l_1 du + n_1 dv = \omega_1 d\alpha, \quad l_2 du + n_2 dv = \omega_2 d\beta$$

et désignons par $\Delta\alpha, \Delta\beta$ les paramètres différentiels de α et de β calculés par rapport à la forme quadratique (I); soit enfin $\Theta(\alpha, \beta)$ le déterminant fonctionnel de α et β , divisé par $\sqrt{AC - B^2}$. Les expressions considérées sont respectivement identiques à ces deux-ci

$$\sqrt{\Delta\beta} \frac{d\alpha}{\Theta(\alpha, \beta)}, \quad \sqrt{\Delta\alpha} \frac{d\beta}{\Theta(\alpha, \beta)},$$

où ne figurent que des symboles invariants.

Cela étant, nous pouvons prendre pour courbes coordonnées les courbes du réseau (II) et faire, en conséquence, $l_1 = n_2 = 1$, $l_2 = n_1 = 0$. Les éléments invariants (EI) se réduisent respectivement à $\sqrt{A} du, \sqrt{C} dv$ ⁽²⁾.

Pour que le réseau (I) soit isotherme relativement au réseau (II), il faut et il suffit, par définition même, que $\mathcal{F}$ ne contienne pas de terme en $du dv$ et que les coefficients de du^2 et de dv^2 soient proportionnels à deux fonctions, dont l'une ne dépende que de u et l'autre que de v . C'est ce qu'expriment les deux relations

$$(4) \quad B = 0,$$

$$(5) \quad \frac{\sqrt{A}}{U(u)} = \frac{\sqrt{C}}{V(v)}.$$

La condition (4) exprime simplement que *les deux réseaux (I) et (II) se divisent harmoniquement*.

⁽¹⁾ Les *éléments d'arc* ont été considérés par M. von LILIENTHAL (*Grundlagen einer Krümmungslehre der Kurvenscharen*, Leipzig, 1896; p. 17) et lui ont fourni, entre autres, un résultat que nous rapporterons un peu plus loin.

⁽²⁾ L'équation $A du^2 - C dv^2 = 0$ définit le réseau qui divise harmoniquement le réseau (I) et le réseau (u, v) . D'où cette propriété générale : *En égalant entre eux les carrés des éléments invariants d'un réseau relativement à un autre, on obtient l'équation différentielle du réseau qui les divise harmoniquement tous les deux.*

D'après la condition (5), les éléments invariants s'écrivent

$$\sqrt{A} du = \zeta U(u) du, \quad \sqrt{C} dv = \zeta V(v) dv,$$

c'est-à-dire qu'ils admettent un facteur intégrant commun. Réciproquement, si les deux expressions $\sqrt{A} du$ et $\sqrt{C} dv$ admettent un facteur intégrant commun, la première ne dépendant que de u et la seconde que de v , on a les relations précédentes, qui entraînent la condition (5).

En conséquence nous arrivons à cette conclusion :

THÉOREME III. — *Pour que deux réseaux soient isothermes l'un relativement à l'autre, il faut et il suffit que ces deux réseaux se divisent harmoniquement et que les éléments invariants de l'un, calculés relativement à l'autre, admettent un facteur intégrant commun.*

Nous allons faire maintenant diverses applications de ce théorème. Il va sans dire que l'on peut, dans les applications, multiplier chaque élément invariant par tel facteur constant que l'on veut et multiplier simultanément ces deux éléments par n'importe quel facteur constant ou variable, par exemple négliger le dénominateur commun $l_1 n_2 - n_1 l_2$.

II. — RÉSEAUX ISOTHERMES ET CRITÈRES DIVERS POUR L'ISOTHERMIE DES LIGNES DE COURBURE.

6. Un réseau *isotherme* d'une surface est un réseau orthogonal, isotherme relativement au réseau des lignes de longueur nulle de la surface. En raison de leur orthogonalité, les tangentes aux courbes du réseau considéré forment un faisceau harmonique avec les tangentes aux lignes minima. Nous avons donc simplement à exprimer que *les éléments invariants du réseau relativement à l'élément linéaire admettent un facteur intégrant commun*; en d'autres termes, *pour qu'un réseau soit isotherme, il faut et il suffit que les éléments d'arc des deux familles de courbes dont il est composé admettent un facteur intégrant commun.*

C'est la forme même donnée par M. von Lilienthal (*loc. cit.*) au critère que Sophus Lie (1) a formulé ainsi :

Pour que les courbes intégrales d'une équation

$$l_1 du + n_1 dv = 0$$

fassent partie d'un réseau isotherme sur une surface d'élément linéaire

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

il faut et il suffit que l'expression $l_1 du + n_1 dv$ et le premier membre

$$\frac{En_1 - Fl_1}{\sqrt{EG - F^2}} du + \frac{Fn_1 - Gl_1}{\sqrt{EG - F^2}} dv$$

de l'équation différentielle des trajectoires orthogonales de ces courbes admettent un facteur intégrant commun.

Désignons, en effet, ce premier membre par $l_2 du + n_2 dv$ et comparons les éléments invariants (EI)

$$\sqrt{Gl_1^2 - 2Fl_1n_1 + En_1^2} \frac{l_1 du + n_1 dv}{l_1n_2 - n_1l_2},$$

$$\sqrt{Gl_2^2 - 2Fl_2n_2 + En_2^2} \frac{l_2 du + n_2 dv}{l_2n_1 - n_2l_1}$$

avec les expressions correspondantes de Sophus Lie

$$l_1 du + n_1 dv, \quad l_2 du + n_2 dv.$$

Pour prouver qu'ils leur sont proportionnels, nous n'avons qu'à vérifier l'identité

$$Gl_1^2 - 2Fl_1n_1 + En_1^2 = Gl_2^2 - 2Fl_2n_2 + En_2^2.$$

Or cette vérification est immédiate, eu égard aux significations de l_2 et n_2 .

7. C'est, au fond, le critère tiré des *éléments invariants* que M. Darboux (*Théorie des surfaces*, t. II, p. 248-249) a employé pour former l'équation aux dérivées partielles des surfaces isother-

(1) *Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen*, Leipzig, 1891; p. 162.

miques. La surface étant rapportée aux lignes minima ($\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$) de sa représentation sphérique (voir ci-dessus, n° 2), si l'on pose

$$z = \frac{\xi - p\alpha - q\beta}{\alpha\beta + 1},$$

l'élément linéaire a pour expression

$$ds^2 = [r d\alpha + (z + s) d\beta][(z + s) d\alpha + t d\beta],$$

et le réseau des lignes de courbure a pour équations

$$\pm \sqrt{r} d\alpha + \sqrt{t} d\beta = 0.$$

Formons ses éléments invariants relativement à l'élément linéaire, d'après les expressions générales (EI); nous aurons ici

$$A = r(z + s), \quad 2B = (z + s)^2 + rt, \quad C = t(z + s);$$

$$l_1 = \sqrt{r}, \quad n_1 = \sqrt{t}; \quad l_2 = -\sqrt{r}, \quad n_2 = \sqrt{t}.$$

De là résulte

$$Cl_2^2 - 2Bl_2n_2 + An_2^2 = \sqrt{rt}(z + s + \sqrt{rt})^2,$$

$$Cl_1^2 - 2Bl_1n_1 + An_1^2 = -\sqrt{rt}(z + s - \sqrt{rt})^2,$$

$$l_1n_2 - n_1l_2 = 2\sqrt{rt}.$$

Par suite, les éléments invariants sont, à des facteurs numériques près,

$$(z + s + \sqrt{rt}) \frac{\sqrt{r} d\alpha + \sqrt{t} d\beta}{\sqrt[4]{rt}}, \quad (z + s - \sqrt{rt}) \frac{\sqrt{r} d\alpha - \sqrt{t} d\beta}{\sqrt[4]{rt}}.$$

Or M. Darboux considère les deux expressions

$$\frac{\sqrt{r} d\alpha + \sqrt{t} d\beta}{z + s - \sqrt{rt}}, \quad \frac{\sqrt{r} d\alpha - \sqrt{t} d\beta}{z + s + \sqrt{rt}},$$

visiblement proportionnelles aux deux précédentes et il écrit qu'elles admettent un facteur intégrant commun, ce qui conduit à l'équation du quatrième ordre que nous formerons un peu plus loin (voir ci-après, n° 9).

8. *Comparaison avec le critère de M. Weingarten.* — Voici,

aux notations près, comment M. Bianchi expose ⁽¹⁾ le critère de M. Weingarten :

L'élément linéaire d'une surface et sa seconde forme quadratique fondamentale étant respectivement

$$E du^2 + 2F du dv + G dv^2, \quad L du^2 + 2M du dv + N dv^2,$$

on introduit trois fonctions λ, μ, ν , définies par le système

$$(6) \quad \begin{cases} E\nu - 2F\mu + G\lambda = 0, \\ L\nu - 2M\mu + N\lambda = 0, \end{cases}$$

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{\partial \lambda}{\partial v} - \frac{\partial \mu}{\partial u} = B\lambda + (B_1 - A)\mu - A_1\nu, \\ \frac{\partial \nu}{\partial u} - \frac{\partial \mu}{\partial v} = B_1\nu + (B - C_1)\mu - C\lambda, \end{cases}$$

où A, A_1, B, B_1, C, C_1 sont les symboles de Christoffel formés avec E, F, G . L'existence des fonctions λ, μ, ν est la condition nécessaire et suffisante pour que la surface soit isothermique.

Pour vérifier les équations finies (6), on pose

$$\lambda = \rho(EM - FL), \quad 2\mu = -\rho(GL - EN), \quad \nu = \rho(FN - GM).$$

Substituant dans les équations aux dérivées partielles, on obtient deux relations qui déterminent les deux dérivées de $\log \rho$; on écrit la condition d'existence de cette fonction auxiliaire : c'est la condition cherchée.

Tout revient donc ici à écrire qu'une certaine expression différentielle est une différentielle exacte. Pour appliquer le critère tiré des éléments invariants, on doit écrire que deux expressions différentielles admettent un facteur intégrant commun. Ces deux opérations ne sont pas, au fond, distinctes l'une de l'autre : en effet, pour vérifier si deux expressions différentielles admettent un facteur intégrant commun, on en forme une troisième et l'on écrit que cette expression différentielle est une différentielle exacte.

Pour ramener les deux procédés l'un à l'autre, rapportons la surface à ses lignes de courbure ($u = \text{const.}, v = \text{const.}$); nous aurons $F = M = 0$ et, par suite, $\lambda = \nu = 0$. Les équations (7) se

⁽¹⁾ *Lezioni di Geometria differenziale*, t. II, p. 30.

réduisent à

$$(7)' \quad \begin{cases} \frac{\partial \log \mu}{\partial u} = A - B_1 = \frac{\partial}{\partial u} \log \sqrt{\frac{E}{G}}, \\ \frac{\partial \log \mu}{\partial v} = C_1 - B = \frac{\partial}{\partial v} \log \sqrt{\frac{G}{E}}, \end{cases}$$

et la condition d'isothermie des lignes de courbure exprime simplement que l'expression

$$d' = \frac{\partial}{\partial u} \log \sqrt{\frac{E}{G}} du + \frac{\partial}{\partial v} \log \sqrt{\frac{G}{E}} dv$$

est une différentielle exacte.

Or les éléments invariants (qui sont ici les éléments d'arc) du réseau des lignes de courbure ont pour expressions respectives $\sqrt{E} du$ et $\sqrt{G} dv$. L'existence d'un facteur intégrant commun revient à la condition pour que l'expression

$$d'' = \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} du + \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} dv$$

soit une différentielle exacte. Mais l'identité

$$d \log \sqrt{EG} = d' + 2 d''$$

montre que d' et d'' sont en même temps des différentielles exactes.

Remarque. — Les fonctions λ, μ, ν étant proportionnelles aux coefficients de la forme invariante aux lignes de courbure

$$\mathcal{F} = \frac{EM - FL}{H} du^2 - \frac{GL - EN}{H} du dv + \frac{FN - GM}{H} dv^2 \quad (H = \sqrt{EG - F^2}),$$

il paraît préférable d'introduire cette forme elle-même, en posant

$$\rho = \frac{W}{H},$$

de manière à avoir

$$\lambda du^2 + 2\mu du dv + \nu dv^2 = W \mathcal{F}.$$

Alors la nouvelle fonction auxiliaire W a une signification invariante, facile à trouver. Reportons-nous, en effet, aux équations (7)'. L'existence de la fonction μ entraîne la condition

nécessaire et suffisante

$$(8) \quad \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \frac{E}{G} = 0.$$

D'autre part, les rayons de courbure principaux étant représentés par R_1 et R_2 , la forme invariante $\mathcal{F}$ se réduit ici à

$$\mathcal{F} = \sqrt{EG} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) du dv;$$

la fonction auxiliaire W est donc liée à μ par la relation

$$2\mu = W\sqrt{EG} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Mais, la condition (8) étant vérifiée, on peut supposer les paramètres des lignes de courbure choisis de façon que l'on ait $E = G$. Alors, en vertu des équations (7)', la fonction μ se réduit à une constante. En conséquence, la fonction W , dont la condition d'existence exprime l'isothermie des lignes de courbure, est, à un facteur constant près, l'inverse de

$$\frac{E}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right),$$

c'est-à-dire de la courbure moyenne de l'une des transformées par normales parallèles de la surface considérée (transformation de Bour-Christoffel; voir Annales de l'École Normale supérieure, 1905, p. 419).

Ajoutons que, d'après l'identité

$$2\mu du dv = W\mathcal{F},$$

où μ est maintenant une constante, $W\mathcal{F}$ est un produit de deux différentielles. Ainsi, *quand une surface est isothermique, pour changer sa forme invariante aux lignes de courbure $\mathcal{F}$ en un produit de deux différentielles, il suffit de diviser cette forme par la courbure moyenne de l'une des transformées par normales parallèles.* Ceci s'accorde bien avec la proposition de Sophus Lie, aux termes de laquelle les lignes de courbure de toute surface isothermique peuvent être déterminées par des quadratures de différentielles exactes.

On peut mettre le résultat précédent sous une forme un peu

AVIS IMPORTANT

—
Votre abonnement expirant avec le présent numéro nous
avons l'honneur de vous demander si votre intention est de le
renouveler.

Dans l'affirmative, et pour éviter toute interruption dans
l'envoi du journal, nous lèrons présenter, à votre domicile,
sans avis contraire de votre part, la quittance du nouvel
abonnement, à moins que vous ne préfériez nous en envoyer le
montant en un mandat-poste *avant huit jours*.

GAUTHIER-VILLARS.

PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

Librairie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris (6°).

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, publiées par les Professeurs.....					
Annales de l'Observatoire de Montsouris, publiées par les Chefs de service.....					
Annales de l'Université de Grenoble, publiées par les Facultés et l'Ecole de Médecine.....					
Annales scientifiques de l'Ecole Normale supérieure, publiées par les Maîtres de Conférences.....					
Bibliographie scientifique française, publiée par le Bureau tran- Sciences mathématiques et physiques.					
cais du Catalogue international de la littérature scientifique Sciences naturelles et biologiques.....					
Bulletin astronomique, publié par l'Observatoire de Paris; Directeur H. POINCARÉ.....					
Bulletin de la Société française de Photographie.....					
Bulletin de la Société internationale des Electriciens.....					
Bulletin de la Société mathématique de France.....					
Bulletin des Sciences mathématiques, publié par G. DARBOUX et J. TANNERY.....					
Bulletin mensuel du Bureau central météorologique de France, par A. ANGOT.....					
Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.....					
Journal de Chimie physique; publié par PHILIPPE-A. GUYE.....					
Journal de Mathématiques pures et appliquées, publié par CAMILLE JORDAN.....					
Journal de Physique théorique et appliquée, publié par L. POINCARÉ.....					
L'Enseignement mathématique, dirigé par G.-A. LAISANT et H. FÉRY.....					
L'Intermédiaire des Mathématiciens, dirigé par G.-A. LAISANT, EM. LEMOINE, ED. MAILLET et A. GREY.....					
La Revue électrique, publiée par J. BLONDIN.....					
Mémoires des Poudres et Salpêtres. Prix pour un volume (4 fascicules en deux années).....					
Nouvelles Annales de Mathématiques, rédigées par LAISANT, C. BOULEY et BRICARD.....					
Revue Générale de Chimie pure et appliquée, fondée par Ch. Friedel et G.-F. Jansbert.....					
Mathesis. Recueil mathématique publié par MANSION et NEUBERG.....					
Revue semestrielle des publications mathématiques (Société mathématique d'Amsterdam).....					

Les abonnements sont faits pour un an et partent de Janvier. — Envoyer un mandat de poste ou valem sur Paris à M. GAUTHIER-VILLARS, éditeur, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris (6°). On peut aussi s'abonner, sans supplément de frais, en versant le prix de l'abonnement dans un des bureaux de poste de France ou de l'Union postale. — Lorsque l'abonnement n'est pas payé ou souscrit, le prix est augmenté de 50 centimes pour frais de recouvrement.

FORMAT.	PÉRIODICITE.	PARIS.	FRANCE et ALGERIE.	UNION POSTALE.
In-4	Trimestriel	fr 25	fr 28	fr 28
G ⁴ in-8	Trimestriel	15	17	17
G ⁴ in-8	3 N ^{os}	12	12	15
In-4	Mensuel	30	35	35
G ⁴ in-8	Mensuel	5,50	6,50	6,50
G ⁴ in-8	Mensuel	9,50	10,50	10,50
G ⁴ in-8	Mensuel	16	18	18
G ⁴ in-8	Bi-mensuel	15	15	18
G ⁴ in-8	Mensuel	25	27	27
G ⁴ in-8	Trimestriel	15	16	16
G ⁴ in-8	Mensuel	18	20	20
In-4	Mensuel	5	6	6
In-4	Hebdomad.	30	40	44
G ⁴ in-8	8 à 10 N ^{os}	25	25	25
In-4	Trimestriel	17	17	18
G ⁴ in-8	Mensuel	15	15	15
G ⁴ in-8	Bimestriel	7	8,50	8,50
In-8	Mensuel	25	27,50	30
G ⁴ in-8	Semestriel	8	9	9
In-8	Mensuel	15	17	17
G ⁴ in-8	Mensuel	25	27,50	30
G ⁴ in-8	Bi-mensuel	13	14,25	15,50
G ⁴ in-8	Mensuel	9	9	9
G ⁴ in-8	Semestriel	8,50	8,50	8,50

différente et dire : *A toute surface isothermique correspond une fonction ω telle que l'élément linéaire, multiplié par ω , devient un produit de deux différentielles et que la forme invariante aux lignes de courbure devient aussi un produit de deux différentielles lorsqu'on la multiplie par ω et qu'on la divise par la différence des courbures principales.* En effet, si l'on désigne par 2Γ la différence des courbures principales, on a, d'après ce qui vient d'être rappelé,

$$\mathfrak{J} = 2\Gamma(\sqrt{E} du)(\sqrt{G} dv).$$

Ainsi la forme $\mathfrak{J}$ est égale au produit de 2Γ et des éléments invariants $\sqrt{E} du$, $\sqrt{G} dv$ du réseau des lignes de courbure. Soit $\sqrt{\omega}$ le facteur intégrant commun à ces deux éléments : nous aurons

$$\sqrt{\omega}\sqrt{E} = U'(u), \quad \sqrt{\omega}\sqrt{G} = V'(v);$$

d'où résulte immédiatement

$$\mathfrak{J} = \frac{2\Gamma}{\omega} dU dV, \quad ds^2 = E du^2 + G dv^2 = \frac{dU^2 + dV^2}{\omega},$$

ce qui démontre la proposition.

III. — LES SURFACES A LIGNES DE COURBURE ISOTHERMES-CONJUGUÉES ET LEURS CARACTÉRISTIQUES.

9. Pour exprimer la propriété qui définit ces surfaces, il faut écrire que le réseau de leurs lignes de courbure et celui de leurs lignes asymptotiques sont isothermes l'un relativement à l'autre. Les tangentes aux courbes de ces deux réseaux formant en chaque point un faisceau harmonique, nous n'avons à tenir compte que de la condition relative aux éléments invariants. Employons encore les coordonnées tangentielles isotropes de Bonnet (voir ci-dessus, nos 2 et 7). L'équation des lignes asymptotiques est

$$A d\alpha^2 + 2B d\alpha d\beta + C d\beta^2 = r d\alpha^2 + 2(z+s) d\alpha d\beta + t d\beta^2 = 0,$$

ce qui permet de prendre

$$A = r, \quad B = z + s, \quad C = t.$$

Pour les lignes de courbure, nous aurons, comme au n° 7,

$$l_1 = \sqrt{r}, \quad n_1 = \sqrt{t}, \quad l_2 = -\sqrt{r}, \quad n_2 = \sqrt{t}.$$

De là résulte

$$Cl_2^2 - 2Bl_2n_2 + An_2^2 = 2\sqrt{rt}(\sqrt{rt} + s + s),$$

$$Cl_1^2 - 2Bl_1n_1 + An_1^2 = 2\sqrt{rt}(\sqrt{rt} - s - s),$$

$$l_1n_2 - n_1l_2 = 2\sqrt{rt}.$$

En conséquence, les éléments invariants du réseau des lignes de courbure relativement aux asymptotiques sont, à des facteurs numériques près,

$$\sqrt{s+s+\sqrt{rt}} \frac{\sqrt{r} da + \sqrt{t} d\beta}{\sqrt{rt}}, \quad \sqrt{s+s-\sqrt{rt}} \frac{\sqrt{r} da - \sqrt{t} d\beta}{\sqrt{rt}}.$$

Il suffira donc d'écrire qu'il existe un facteur intégrant commun aux deux expressions

$$(s+s+\sqrt{rt})^m (\sqrt{r} da + \sqrt{t} d\beta), \quad (s+s-\sqrt{rt})^m (\sqrt{r} da - \sqrt{t} d\beta),$$

ce qui donne

$$(E) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \log \frac{r}{t} - m \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\sqrt{\frac{t}{r}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \log \frac{s+s+\sqrt{rt}}{s+s-\sqrt{rt}} \right) \\ - m \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\sqrt{\frac{r}{t}} \frac{\partial}{\partial \beta} \log \frac{s+s-\sqrt{rt}}{s+s+\sqrt{rt}} \right) = 0. \end{array} \right.$$

L'hypothèse $m = 0$ conduit à l'équation

$$(9) \quad \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \log \frac{r}{t} = 0,$$

qui caractérise (n° 2) les surfaces dont les lignes de courbure ont leur représentation sphérique isotherme.

En faisant $m = 1$, on retrouve l'équation de M. Darboux relative aux surfaces isothermiques. Pour $m = \frac{1}{2}$, on obtient l'équation de M. Eisenhart (*loc. cit.*, p. 226) relative aux surfaces à lignes de courbure isothermes-conjuguées.

Ces deux dernières équations ne différant que par les coefficients de leur premier terme, les surfaces qui les vérifient à la fois

satisfont visiblement à l'équation (9); il suit de là que la représentation sphérique de leurs lignes de courbure est isotherme. Réciproquement, toute surface qui vérifie à la fois l'équation (9), ainsi que l'une des équations de M. Darboux et de M. Eisenhart, satisfait aussi à l'autre. En conséquence, *si le réseau des lignes de courbure d'une surface est isotherme relativement à deux des trois réseaux formés par ses asymptotiques, ses lignes minima et les lignes minima de sa représentation sphérique, il est isotherme relativement à tous les trois.* On peut encore dire : *Toute surface qui possède deux des propriétés suivantes, lignes de courbure isothermes, représentation sphérique des lignes de courbure isotherme, lignes de courbure isothermes-conjuguées, possède aussi la troisième.* Tel est le cas des surfaces de révolution, des quadriques et, plus généralement, de toutes les surfaces isothermiques à représentation sphérique isotherme.

Nous allons maintenant chercher les caractéristiques de l'équation générale (E).

Le groupe des termes contenant les dérivées du quatrième ordre est, abstraction faite du diviseur commun $(z + s)^2 - rt$,

$$\frac{m(z+s)}{rt} \left(r^2 \frac{\partial^4 \xi}{\partial \beta^4} - t^2 \frac{\partial^4 \xi}{\partial \alpha^4} \right) - \frac{(z+s)^2 + (2m-1)rt}{rt} \left(r \frac{\partial^4 \xi}{\partial \beta^3 \partial \alpha} - t \frac{\partial^4 \xi}{\partial \beta \partial \alpha^3} \right),$$

de sorte que les caractéristiques sont définies par l'équation

$$m(z+s)(r^2 d\alpha^4 - t^2 d\beta^4) + [(z+s)^2 + (2m-1)rt](r d\alpha^3 - t d\beta^3) d\alpha d\beta = 0,$$

qu'on peut écrire

$$(r d\alpha^3 - t d\beta^3) \{ m(z+s)(r d\alpha^2 + t d\beta^2) + [(z+s)^2 + (2m-1)rt] d\alpha d\beta \} = 0.$$

Si l'on fait $m = 0$, on trouve

$$(r d\alpha^2 - t d\beta^2) d\alpha d\beta = 0.$$

Donc les caractéristiques des surfaces dont les lignes de courbure ont leur représentation sphérique isotherme sont les lignes de courbure et les lignes qui correspondent aux lignes minima de la représentation sphérique.

Pour $m = 1$, il vient

$$(r d\alpha^2 - t d\beta^2)[r d\alpha + (z+s) d\beta][(z+s) d\alpha + t d\beta] = 0,$$

ce qui vérifie un théorème que j'ai déjà démontré autrement : *les caractéristiques de l'équation des surfaces isothermiques sont les lignes de courbure et les lignes minima* (voir *Annales de l'École Normale supérieure*, 1906).

Pour $2m = 1$, en écartant l'hypothèse $z + s = 0$, qui correspond aux surfaces minima signalées plus haut, on a

$$(r dx^2 - t d\beta^2)[r dx^2 + 2(z + s) dx d\beta + t d\beta^2] = 0.$$

Ainsi les caractéristiques de l'équation des surfaces à lignes de courbure isothermes-conjuguées sont les lignes de courbure et les lignes asymptotiques. Cette proposition devra intervenir dans la théorie des surfaces dont il s'agit, de la même façon que la proposition ci-dessus intervient dans la recherche des surfaces isothermiques dépendant de fonctions arbitraires.

Ces deux théorèmes ne pouvaient d'ailleurs être prévus d'après les seules définitions des surfaces qu'ils concernent, car nous savons (n° 4) que ces surfaces sont également définies par l'isothermie relative de *trois couples* de réseaux, tandis qu'un seul de ces couples de réseaux est formé de leurs caractéristiques.

IV. — COMPATIBILITÉ DES CONDITIONS D'ISOTHERMIE ET QUESTIONS DIVERSES.

10. Dans les deux cas que nous venons d'étudier, l'une des conditions pour l'isothermie relative des deux réseaux considérés, celle du faisceau harmonique, était vérifiée d'elle-même. Il n'est resté que la condition concernant les éléments invariants : ces éléments étant exprimés au moyen d'une fonction inconnue ξ et de ses dérivées des deux premiers ordres, on a obtenu dans les deux cas *une équation* du quatrième ordre.

Si l'on veut exprimer qu'une surface présente l'isothermie relative de deux réseaux déterminés, on aura généralement *deux conditions distinctes*. Supposons que les équations différentielles des deux réseaux dépendent d'une fonction inconnue ξ et de ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre n inclusivement. La condition du faisceau harmonique s'exprime par une équation d'ordre n ; la condition relative aux éléments invariants donnera une équation

qui sera généralement de l'ordre $n + 2$ et ces deux équations aux dérivées partielles pourront n'admettre que des solutions fort particulières, ou même être incompatibles. C'est ce dont on s'assurerait en traitant des exemples convenablement choisis.

Pour définir des classes très étendues de surfaces présentant l'isothermie relative de deux réseaux, on pourra se donner *les deux familles* de l'un des réseaux et seulement *l'une des familles* de l'autre. Si les équations différentielles de ces trois familles dépendent d'une fonction inconnue ξ et de ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre n inclusivement, celle de la quatrième famille, qui sera fournie par la condition du faisceau harmonique, dépendra des mêmes dérivées et la condition relative aux éléments invariants fournira *une équation* de l'ordre $n + 2$ en général.

On peut aussi, dans ce cas, répéter le raisonnement bien connu qui conduit à la condition nécessaire et suffisante pour que les courbes $\varphi = \text{const.}$ constituent, avec leurs trajectoires orthogonales $\chi = \text{const.}$, un réseau isotherme (au sens classique du mot) sur une surface donnée. La condition d'orthogonalité $\Delta(\varphi, \chi) = 0$ exprime simplement que les courbes $\varphi = \text{const.}$, $\chi = \text{const.}$ qui se croisent en chaque point de la surface forment un faisceau harmonique avec ses lignes minima. Elle n'implique aucunement et la suite de la démonstration n'implique pas davantage que la forme quadratique de différentielles dont les coefficients figurent dans les paramètres $\Delta\varphi$, $\Delta\chi$, $\Delta(\varphi, \chi)$, $\Delta_2\varphi$ soit un élément linéaire. En conséquence, *pour que les courbes $\varphi = \text{const.}$ fassent partie d'un réseau isotherme relativement au réseau défini par l'équation*

$$\mathcal{F} = A du^2 + 2B du dv + C dv^2 = 0,$$

il faut et il suffit que le quotient des deux paramètres $\Delta_2\varphi$ et $\Delta\varphi$, calculés par rapport à $\mathcal{F}$, soit une fonction de φ . On arrive ainsi aux conclusions qui viennent d'être énoncées.

11. Il y a plus. La règle précédente fait connaître l'équation dont dépend *la recherche de tous les réseaux isothermes* relativement au réseau défini par l'équation $\mathcal{F} = 0$. En outre, les symboles qu'elle fait intervenir étant essentiellement invariants, nous pouvons réduire la forme $\mathcal{F}$ à son terme rectangle, en supposant

$A = C = 0$. Il vient alors simplement

$$\frac{\varphi''_{uv}}{\varphi'_u \varphi'_v} = \Phi(\varphi).$$

Cette équation exprime, comme on sait, que φ est une fonction de la somme $U(u) + V(v)$, où U et V sont des fonctions arbitraires de leurs arguments respectifs. Ainsi l'équation

$$U(u) + V(v) = \text{const.}$$

définit sur une surface quelconque une famille de courbes qui fait partie d'un réseau isotherme relativement au réseau des courbes coordonnées $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ Cette remarque générale s'applique en particulier à diverses classes de surfaces dont les courbures principales sont fonctions l'une de l'autre : le réseau (u, v) étant composé des lignes de courbure, les rayons principaux sont fonctions de $U(u) + V(v)$ pour les hélicoïdes, pour les surfaces isothermiques (voir la thèse de M. Caronnet, Paris, 1894), pour celles dont la représentation sphérique est isotherme, pour celles dont les lignes de courbure sont isothermes-conjuguées (Eisenhart), pour celles qui présentent une famille de lignes de courbure planes (Dini, Dobriner) ou sphériques et, sans doute, pour d'autres encore.

12. Proposons-nous, en terminant, la question inverse de celle qui fait l'objet du théorème III :

Étant données deux expressions différentielles

$$M_1(l_1 du + n_1 dv), \quad M_2(l_2 du + n_2 dv)$$

qui sont supposées admettre un facteur intégrant commun, trouver le réseau isotherme relativement au réseau (R) défini par l'équation

$$(l_1 du + n_1 dv)(l_2 du + n_2 dv) = 0.$$

Les deux inconnues du problème sont les rapports des coefficients A , B , C de l'équation

$$\mathcal{F} = A du^2 + 2B du dv + C dv^2 = 0,$$

qui définit le réseau cherché. Pour déterminer ces rapports, nous

allons écrire que les deux expressions données sont proportionnelles aux éléments invariants (El) du réseau (R) relativement au réseau $\mathcal{F} = 0$; il vient ainsi

$$C l_1^2 - 2 B l_1 n_1 + A n_1^2 = \lambda M_1^2,$$

$$C l_2^2 - 2 B l_2 n_2 + A n_2^2 = \lambda M_2^2,$$

λ étant une indéterminée. De plus, les réseaux (R) et ($\mathcal{F}$) devant se diviser harmoniquement, nous avons

$$C l_1 l_2 - B(l_1 n_2 + n_1 l_2) + A n_1 n_2 = 0.$$

Ainsi se trouve constitué un système de trois équations du premier degré à trois inconnues dont le déterminant $(l_1 n_2 - n_1 l_2)^2$ est différent de zéro. Il fait connaître A, B, C en fonctions des données et du coefficient λ auquel on peut attribuer telle expression qu'on veut.

En appliquant la règle précédente aux deux expressions différentielles

$$(x + s + \sqrt{rt})^m (\sqrt{r} dx + \sqrt{t} d\beta), \quad (x + s - \sqrt{rt})^m (\sqrt{r} dx - \sqrt{t} d\beta),$$

considérées ci-dessus (n° 9), on trouve sans peine l'équation

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = & [(x + s + \sqrt{rt})^{2m} - (x + s - \sqrt{rt})^{2m}] (r dx^2 + t d\beta^2) \\ & + 2\sqrt{rt} [(x + s + \sqrt{rt})^{2m} + (x + s - \sqrt{rt})^{2m}] dx d\beta = 0, \end{aligned}$$

pour définir le réseau isotherme relativement au réseau des lignes de courbure

$$r dx^2 - t d\beta^2 = 0.$$

Si l'on rapporte la surface à ses lignes de courbure $du dv = 0$, on voit facilement qu'il faut remplacer les expressions précédentes par ces deux-ci :

$$(10) \quad \frac{\sqrt{E} du}{R_1^{-m}}, \quad \frac{\sqrt{G} dv}{R_2^{-m}},$$

dont les numérateurs sont les éléments d'arc ds_1 et ds_2 des lignes de courbure; dans chaque dénominateur figure le rayon de la section principale tangente à la ligne de courbure considérée.

Supposons que ces deux expressions, visiblement invariantes, admettent un facteur intégrant commun et cherchons le réseau

dont cette hypothèse entraîne l'isothermie relativement aux lignes de courbure $du dv = 0$. Par l'application des formules ci-dessus, on trouve immédiatement

$$A = \lambda \frac{E}{R_1^{1-2m}}, \quad B = 0, \quad C = \lambda \frac{G}{R_1^{1-2m}};$$

d'où résulte l'équation du réseau cherché

$$\mathcal{F} = \frac{E du^2}{R_1^{1-2m}} + \frac{G dv^2}{R_1^{1-2m}} = 0.$$

Pour $m = 0$, on a les lignes minima de la représentation sphérique; pour $m = 1$, celles de la surface elle-même; pour $2m = 1$ ses lignes asymptotiques. Ainsi les surfaces dont les lignes de courbure ont leur représentation sphérique isotherme, les surfaces isothermiques et les surfaces à lignes de courbure isothermes-conjuguées rentrent dans la catégorie plus générale des surfaces dont les lignes de courbure forment un réseau isotherme relativement au réseau défini par l'équation $\mathcal{F} = 0$, où m est une constante arbitraire. On peut donc définir ces trois classes de surfaces par la condition que les deux expressions (10) admettent un facteur intégrant commun, pour les trois valeurs correspondantes de m .

FIN DU TOME XXXV.

ERRATA.

Page 184, ligne 4, au lieu de α , lire α_1 .

Même page, ligne 10, au lieu de σ_1'' , lire σ_1' .

Page 188, ligne 3, au lieu de $\sigma_1' \sigma_1' \sigma_1'$, lire $\sigma_1' \sigma_2' \sigma_3'$.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME XXXV.

(Les lettres et numéros qui précèdent les titres indiquent les classifications du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*.)

	Pages
État de la Société mathématique au commencement de 1907.....	v
Liste des Sociétés scientifiques et des recueils périodiques avec lesquels la Société échange son <i>Bulletin</i>	xv
Règlement.....	xvi
Liste des Présidents de la Société depuis sa fondation.....	xx
Comptes rendus des séances.....	1, 158

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

[R 9 a]	Appell. — Sur l'extinction du frottement.....	131
[I 23 a α]	Aurio. — Sur le développement en fraction continue d'une irrationnelle ambiguë du second degré.....	121
[O 5]	Barré. — Sur un élément géométrique nouveau des surfaces.....	98
[O 5 j α]	Bioche (Ch.). — Sur les surfaces du troisième et du quatrième ordre qui admettent pour ligne asymptotique une courbe de quatrième ordre et de quatrième classe.	70
[M ² 6 a]	Bioche (Ch.). — Sur les courbes gauches unicursales de quatrième ordre.....	233
[D 4 a]	Blumenthal (O.). — Sur le mode de croissance des fonctions entières.....	213
[L ¹ 17 e α]	Fontené (G.). — Extension à l'espace du théorème des polygones de Poncelet par des polyèdres réticulés.....	9
[H 1 a]	Goursat (E.). — Sur les séries entières et les approximations successives.....	81
[H 11 c]	Goursat (E.). — Sur un cas élémentaire de l'équation de Fredholm.....	163
[A 4 a]	Lalesco (T.). — Sur le groupe des équations trinomes.	75

		Pages.
[I 43 b]	Lalesco (T.). — Sur la représentation des nombres par les classes de formes appartenant à un déterminant donné.....	248
[J 5]	Lebesgue (H.). — Contribution à l'étude des correspondances de M. Zermelo.....	202
[R 9 a]	Lecornu (L.). — Sur l'extinction du frottement.....	3
[R 8 a α]	Lecornu (L.). — Sur une généralisation du mouvement de Poincot.....	91
[M' 4 a α]	Lucas (F.). — Note relative aux points d'intersection des courbes algébriques.....	47
[I 24 c]	Maillet (E.). — Sur diverses propriétés des nombres transcendants de Liouville.....	27
[I 43 f]	Niewenglowski. — Sur les équations $x^2 - ay^2 = 1$ et $x^2 - ay^2 = -1$	126
[X 3 b]	d'Ocagne (M.). — Sur les équations d'ordre nomographique 3 et 4.....	173
[M' 8 e, M' 9 c]	Pellet (A.). — Construction du rayon de courbure d'une classe de courbes et de surfaces.....	76
[O 8 a]	Pellet (A.). — Remarques sur le mouvement d'une figure plane dans son plan.....	252
[H 4 f]	Popovici. — Sur le problème des multiplicateurs réciproques.....	133
[O 5 n]	Raffy (L.). — Sur l'isothermie relative des réseaux....	259
[R 7 b β]	Rémoundos (G.). — Sur les trajectoires auxquelles donnent lieu les forces centrales.....	255
[M' 4 m]	Remy (L.). — Sur une famille dénombrable de surfaces hyperelliptiques du quatrième ordre.....	53
[R 9 a]	De Sparre. — Note au sujet de certaines discontinuités apparentes dans les mouvements où intervient le frottement de glissement.....	141
[L' 44 a]	Weill (M.). — Propriétés des polygones inscrits à une conique.....	196
Errata.....		282
Table des matières du Tome XXXV.....		283

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME XXXV.

EXTRAIT DES STATUTS ET DU RÈGLEMENT.

La Société mathématique de France a pour objet l'avancement et la propagation des études de Mathématiques pures et appliquées. Elle y concourt par ses travaux et ses publications. Elle a son siège à Paris.

La Société se compose de sociétaires perpétuels, de membres résidents et de membres non résidents, en nombre illimité.

Sont considérés comme résidents les membres qui ont à Paris leur domicile ou leurs occupations professionnelles.

Les Étrangers peuvent faire partie de la Société.

Les conditions à remplir, pour être membre de la Société, sont les suivantes : 1° avoir été présenté par deux de ses membres et agréé par le Conseil d'administration ou par le Bureau agissant en vertu d'un mandat du Conseil; 2° avoir obtenu, à l'une des séances qui ont suivi la présentation, les suffrages de la majorité des membres présents; 3° avoir versé un droit d'admission de *dix francs*; 4° payer une cotisation annuelle dont le montant est de *vingt francs* pour les membres résidents, et de *quinze francs* pour les membres non résidents.

La cotisation annuelle peut toujours être rachetée par une somme de *trois cents francs*, versée dans les conditions fixées par le règlement administratif de la Société.

Ce versement confère le titre de *sociétaire perpétuel*.

La cotisation annuelle est payée au commencement de chaque exercice dont l'origine est fixée au 1^{er} novembre de chaque année.

Les nouveaux membres doivent payer la totalité de la cotisation de l'exercice en cours, quelle que soit l'époque de leur admission.

La Société tient des séances ordinaires deux fois par mois; elle prend trois mois de vacances, de la mi-juillet à la mi-octobre.

Pour assister aux séances, les personnes étrangères à la Société doivent être présentées par l'un de ses membres.

La Société publie par livraisons un Recueil annuel qui a pour titre : *Bulletin de la Société mathématique de France*, et qui contient, avec un extrait des procès-verbaux des séances, des Notes et Mémoires sur les Mathématiques pures ou appliquées, ayant pour auteurs des membres de la Société, et présentant quelque originalité au point de vue de la méthode ou des résultats.

Les livraisons du *Bulletin* sont adressées à tous les membres de la Société, au fur et à mesure de leur publication. Toutefois, dans le cas où un sociétaire se met en retard dans le paiement de sa cotisation, l'envoi du *Bulletin* est suspendu pour lui, jusqu'à ce qu'il ait acquitté l'arriéré.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS.

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6^e).

HALPHEN (G.-H.), Membre de l'Institut. — **Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications.** 3 volumes grand in-8, se vendant séparément.

I^{re} PARTIE : *Théorie des fonctions elliptiques et de leurs développements en série*; 1886..... 15 fr.

II^e PARTIE : *Application de la Mécanique à la Physique, à la Géodésie, à la Géométrie et au Calcul intégral*; 1888..... 20 fr.

III^e PARTIE : *Fragments. (Quelques applications à l'Algèbre et en particulier à l'équation du 5^e degré. Quelques applications à la théorie des nombres. Questions diverses.)* Publiée par les soins de la Section de Géométrie de l'Académie des Sciences; 1891. 8 fr. 50 c

TABLE DES MATIÈRES

(FASCICULE IV).

	Pages.
[D4a] BLUMENTHAL (O.). — Sur le mode de croissance des fonctions entières.....	213
[V38a] BIOCHE (CH.). — Sur les courbes gauches unicursales du quatrième ordre.....	233
[I13b] LALESCO (T.). — Sur la représentation des nombres par les classes de formes appartenant à un déterminant donné.....	248
[O8a] PELLET (A.). — Remarques sur le mouvement d'une figure plane dans son plan.....	252
[R7bβ] RÉMOUNDOS (G.). — Sur les trajectoires auxquelles donnent lieu les forces centrales.....	255
[O5n] RAFFY (L.). — Sur l'isothermie relative des réseaux.....	259
ERRATUM.....	282
TABLE DES MATIÈRES DU TOME XXXV.....	283

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6°).

LÉVY (Maurice), Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, Membre de l'Institut, Professeur au Collège de France et à l'École centrale des Arts et Manufactures. — **La Statique graphique et ses applications aux constructions.** 2^e édition. 4 vol. grand in-8, avec 4 Atlas de même format. (*Ouvrage honoré d'une souscription du Ministère des Travaux publics.*)

I^{re} PARTIE. — *Principes et applications de la Statique graphique pure.* Grand in-8, de xxviii-549 pages, avec figures et un Atlas de 26 planches; 1886..... 22 fr.

II^e PARTIE. — *Flexion plane. Lignes d'influence. Poutres droites.* Grand in-8, de xiv-345 pages, avec figure et un Atlas de 6 planches; 1886..... 15 fr.

III^e PARTIE. — *Arcs métalliques. Ponts suspendus rigides. Coupole, corps de révolution.* Grand in-8 de ix-418 pages avec figures et un Atlas de 6 planches; 1887... 17 fr.

IV^e PARTIE. — *Ouvrages de maçonnerie. Systèmes réticulaires à lignes surabondantes. Index alphabétique des quatre Parties.* Grand in-8 de ix-350 pages, avec figures et un Atlas de 4 planches; 1888.... 15 fr.

